ZWEITER ABSCHNITT.

ABGELEITETE FUNCTIONEN.

§. 1. Uibergang. Wir hatten uns in diesem Hauptstücke vorgesetzt. das eigenthümliche Verhalten kennen zu lernen. das eine abhängige Zahl nach der besonderen Beschaffenheit des Gesetzes ihrer Abhängigkeit an den Tag legt, wenn die Veränderliche, von der sie abhängig ist, verschiedene Werthe annimmt. Bisher sind wir aber nur dabey stehen geblieben, zu beobachten. ob der Unterschied, den die abhängige Zahl erfährt, in das Unendliche abnehme. sofern der Unterschied ihrer Veränderlichen in das Unendliche vermindert wird, oder ob dieses nicht geschehe. Es ist aber leicht zu erachten, daß sich noch viele andere Eigenthümlichkeiten zu erkennen geben werden, wenn wir je zwey Unterschiede auf eine noch genauere Art mit einander vergleichen: nahmentlich wenn wir den Einen durch den anderen dividiren und auf die Beschaffenheit des hier zum Vorschein kommenden Quotienten achten. Denn während die Summe, die Differenz, und das Produkt zweyer Zahlen, die beyde in das Unendliche abnehmen, abermahls nur eine Zahl, die in das Unendliche abnimmt, erzeugen; hat der Quotient zweyer solchen Zahlen das Eigene, daß er die mannigfaltigsten Werthe erreichen kann. Ein solcher Quotient kann nämlich unter gewissen Umständen eine beständige Zahl von jedem beliebigen Werthe, unter anderen wieder eine veränderliche Zahl darbieten, und diese kann zuweilen in das Unendliche wachsen, zuweilen sich wieder einer gegebenen meßbaren Zahl, so sehr als man nur wil, nähern, zuweilen auch keines von diesen leisten. Wenn wir z. B. die Function $W = ax$ betrachten, so ist $\Delta W = a\Delta x$. somit der Quotient $\frac{\Delta W}{\Delta x} = a$, d. h, von x und Δx ganz unabhängige beständige Zahl. Haben wir $W = ax^2$, so ist

$\Delta W = (2ax + \Delta x)\Delta x$, also der Quotient $\frac{\Delta W}{\Delta x} = 2ax + \Delta x$. eine Zahl, die sich dem Werthe $2ax$. einer zwar nicht von Δx,

wohl aber von x abhängigen Zahl, in das Unendliche nähert. Bey der Function
$W = a/x$ ist $\Delta W = -\frac{a\Delta x}{x(x+\Delta x)}$, also der Quotient $\frac{\Delta W}{\Delta x} = -\frac{a}{x(x+\Delta x)}$ ein Ausdruck, der sofern x nicht Null ist, dem Werthe $-a/x^2$ in das Unendliche nahet, für $x = 0$ aber unmeßbar wird. U. s. w.

§. 2. Erklärung. Es leuchtet ein, daß der Fall, wenn eine Zahl angeblich ist, der sich der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ bey der unendlichen Abnahme von Δx in das Unendliche nahet, besonders merkwürdig sey. Wir sagen also von einer solchen Zahl, daß sie die abgeleitete von der Fx sey, und verstehen sonach unter der abgeleiteten von einer Function Fx für den Werth x und für ein positives oder ein negatives Δx, eine solche meßbare Zahl M, bey welcher der Unterschied $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - M$ für einen bestimmten Werth von x und für ein bestimmtes positives oder negatives Vorzeichen von Δx nach seinem absoluten Werthe kleiner als jede gegebene Zahl wird und verbleibt, wenn man nur Δx klein genug nimmt, und so sehr man es dann auch noch fernerhin vermindert. Wir sagen, daß die Function Fx eine abgeleitete für den Werth x und für einen positiven oder negativen Zuwachs oder in positiver oder in negativer Richtung habe, wenn eine solche Zahl, wie wir so eben die M beschrieben, für den besonderen Werth x und bey einem positiven oder negativen Werthe von Δx angeblich ist; und wir sagen, daß Fx eine beiderseitig abgeleitete oder eine abgeleitete nach beyden Richtungen oder hinsichtlich auf einen positiven sowohl als negativen Zuwachs habe, wenn eine solche Zahl M angeblich ist sowohl für einen positiven als negativen Werth von Δx. Wenn ein und eben dieselbe Zahl M den abgeleiteten Werth der Fx für den bestimmten Werth von x in beyden Richtungen d. h. für einen positiven sowohl als negativen Werth der Δx vorstellt: so nennen wir sie nur schlechtweg die abgeleitete von Fx für den Werth x. Da für verschiedene Werthe von x begreiflicher Weise auch eine verschiedene Zahl M nöthig, also M überhaupt zu enden von x abhängig sein kann: so nennen wir eine Function der x, die so beschaffen ist, daß sie für jeden Werth von x die zu der Fx gehörige abgeleitete vorstellt, die abgeleitete Function von Fx, und Fx dagegen die dieser abgeleiteten Function zugehörige ursprüngliche

Function. So nennen wir z. B. $2ax$ die abgeleitete Function von der ax^2, weil $2ax$ jene bloß von x abhängige Zahl ist, der sich der Quotient

$$\frac{\Delta(ax^2)}{\Delta x} = \frac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x$$

bey der unendlichen Abnahme von Δx in das Unendliche nahet: und zwar für jeden Werth von x. In dem besonderen Falle, wenn eine Function Fx für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen x keine abgeleitete hat bloß aus dem Grunde, weil der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ für diesen besonderen Werth von x unendlich groß ist, oder doch bey der unendlichen Abnahme von Δx in das Unendliche wächst: pflegt man zu sagen, die abgeleitete der Fx sey unendlich groß. So hat z. B. $\frac{1}{1-x}$ für $x = 1$ keine abgeleitete, weil der Quotient

$$\left(\frac{\frac{1}{1-x-\Delta x} - \frac{1}{1-x}}{\Delta x}\right)$$

für den Werth $x = 1$ unendlich groß wird. Man sagt also (uneigentlicher Weise) auch wohl, daß die abgeleitete der Function $\frac{1}{1-x}$ für $x = 1$ unendlich groß werde. Wenn die abgeleitete Zahl M der Function Fx in der That abhängig von x ist, und es zeigt sich, daß auch sie noch eine abgeleitete habe; so nennen wir diese die zweyte abgeleitete in Hinsicht auf die ursprüngliche von M, d. i. auf Fx; und zu besserer Unterscheidung heißt dann die vorhin beschriebene die erste abgeleitete. So hat z. B. die Function $2ax$, welche die abgeleitete, d. i. die erste abgeleitete von der ursprünglichen ax^2 ist, auch selbst noch eine abgeleitete, nämlich $2a$: weil $\frac{2a(x+\Delta x) - 2ax}{\Delta x} = 2a$ ist. Diese Zahl $2a$ also nennen wir die zweyte abgeleitete von der ursprünglichen ax^2. Hiernächst versteht man nun schon von selbst, was wir die dritte, vierte.... und überhaupt n^{te} abgeleitete nennen. Die erste abgeleitete einer gegebenen durch Fx angedeuteten Function pflegt man nach einer von Lagrange eingeführten Bezeichnung durch $F'x$, die zweyte durch $F''x$, die dritte durch $F'''x, \ldots$ die n^{te} durch $F^{(n)}x$ darzustellen. Ist die gegebene Function von x, deren abgeleitete wir vorstellig machen sollen, aus mehreren schon für sich selbst bedeutlichen Zeichen zusammengesetzt, wie $ax^5 + bx^3$: so schließt man sie zuvor in Klammern; und so würde man z. B. die dritte abgeleitete von dieser Function durch $(ax^5 + bx^3)'''$ ausdrücken. Weil aber ein und derselbe Ausdruck öfters aus mehreren Zahlen zusammengesetzt ist, die als veränderlich betrachtet werden können z. B. $4x^3 - y^2x + xyz$ oder $F(x + y + z, \ldots)$ und da begreiflicher Weise eine ganz andere abgeleitete zum Vorschein kommt, je nachdem wir bald diese bald jene seiner Zahlen als diejenige ansehen, die sich so eben verändern soll; wie denn z. B. $4x^3 - y^2x + xyz$ in Hinsicht auf x, d. h. wenn wir nur x als veränderlich ansehen, die abgeleitete $12x^2 - y^2 + yz$, in Hinsicht auf y aber die abgeleitete $-2yx + xz$ hat: so bezeichnen wir die abgeleitete einer gegebenen Function wie $F(x, y, z, \ldots)$ in Hinsicht auf x öfters auch durch folgende Zeichnung $\frac{dF(x, y, z, \ldots)}{dx}$, die abgeleitete von eben dieser Function in Hinsicht auf y durch $\frac{dF(x, y, z, \ldots)}{dy}$ u. s. w. Bey dieser Bezeichnung mag man sich vorstellen, daß die in Form eines Divisors untergesetzten Zeichen dx, $dy, \ldots$ bloß anzudeuten haben, in Hinsicht auf welche Veränderliche die Ableitung genommen werden soll: obgleich die ursprüngliche Bedeutung dieser Zeichen noch eine andere ist. Die zweyte abgeleitete der $F(x. y, z, \ldots)$ in Hinsicht auf x, oder die abgeleitete von $\frac{dF(x, y, z \ldots)}{dx}$ in Hinsicht auf x, die man nach dieser Bezeichnungsart durch

$$\frac{d\,\frac{dF(x, y, z, \ldots)}{dx}}{dx}$$

darstellen sollte, wird kürzer durch

$$\frac{d^2F(x, y, z \ldots)}{dx^2}\text{. die dritte durch } \frac{d^3F(x, y, z, \ldots)}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

vorgestellt. Wenn angezeigt werden sollte, daß von der Function $F(x. y, z, \ldots,)$ zuerst die abgeleitete in Beziehung auf x, und von dieser dann noch die abgeleitete in Hinsicht auf y genommen werden soll; so würden wir dieß durch $\frac{d^2F(x, y, z, \ldots)}{dx\,dy}$ ausdrücken. So ist also z. B. $\frac{d^2(x^5 + y^3x^2)}{dx\,dy} = 6y^2x$. Denn die erste abgeleitete von $x^5 + y^3x^2$ in Hinsicht auf x ist $5x^4 + 2y^3x$; die erste abgeleitete von $5x^4 + 2y^3x$ in Hinsicht auf y aber ist $6y^2x$. Wenn umgekehrt die zu einer gegebenen Function oder Zahl M, welche als abgeleitete betrachtet wird, gehörige ursprüngliche Function von x bezeichnet werden soll: so bedient man sich hiezu der Zeichen $\int M dx$ oder $\int [M] dx$, wobey man sich vorstellen mag, daß das Zeichen dx bloß da stehe, um bemerklich zu machen, welche Zahl (nämlich x) man hiebey als die frey Veränderliche zu betrachten habe. So wird z. B. eine Function die als die ursprüngliche der $5x^4 + 2y^3 x$ angesehen werden kann, wenn in dieser letzteren x als die Veränderliche betrachtet werden soll, durch $\int [5x^4 + 2y^3 x] dx$ dargestellt. U. s. w.

§. 3. Anmerkung. Wesentlich eben so wie hier, wird der Begriff einer abgeleiteten auch von Lagrange, Lacroix, Cauchy und den meisten unseren Mathematikern erklärt. Zu bemerken ist nur, daß man den Fall, wo eine Function Fx für einen bestimmten Werth ihrer Veränderlichen x, entweder nur in Beziehung auf einen positiven, oder nur in Beziehung auf einen negativen Zuwachs eine abgeleitete hat, oder wenn diese abgeleitete in jeder dieser Hinsichten einen anderen Werth hat, bey der Bestimmung dieses Begriffes insgemein mit Stillschweigen übergehet. Aus der hier aufgestellten Erklärung aber ergibt sich, daß eine Function in gewissen Fällen keine abgeleitete habe, wo Manche nicht abgeneigt seyn dürften, ihr eine solche zuzugestehen. So möchten wohl Viele der Function

$$Fx = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{2}} + (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$$

unbedenklich eine abgeleitete, nämlich

$$\tfrac{3}{2}(x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{2}}(2x - 3) + \tfrac{3}{2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} 2x$$

selbst für den Werth $x = 1$ zugestehen, und sagen, daß sie für diesen Werth $= 0$ sey; wogegen ich mich strenge haltend an die gegebene Erklärung sagen muß, daß diese Function für den erwähnten Werth gar keine abgeleitete habe. Denn weil ΔFx hier für einen positiven sowohl als negativen Zuwachs imaginär ausfällt; so kann auch von keiner Zahl M, der sich der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ bey der unendlichen Abnahme von Δx in das Unendliche nahet, die Rede seyn. Da ferner eine abgeleitete zuweilen nur für ein positives, zuweilen nur für ein negatives Δx vorhanden ist, oder die eine einen ganz anderen Werth als die andere hat: so wäre wohl zu wünschen, daß wir in der Bezeichnung einer abgeleiteten (so oft es nöthig ist) ausdrücken könnten, in welcher Hinsicht, ob in Beziehung auf einen positiven oder auf einen negativen Zuwachs, sie zu nehmen sey. Allein ich werde mich hütten, die ohnehin schon zu vielen Zeichen, die man insonderheit für die Ableitungsrechnung bereits in Vorschlag gebracht hat, noch durch ein neues zu vermehren.

§. 4. Lehrsatz. Es gibt Functionen, welche für alle Werthe ihrer Veränderlichen und bey einem positiven sowohl als negativen Zuwachse derselben eine und eben dieselbe beständige Zahl zu ihrer abgeleiteten haben; und es gibt Functionen, bey denen dieß nicht der Fall ist, sondern die abgeleitete derselben ist für verschiedene Werthe derselben gleichfalls verschieden, und somit selbst noch eine Function der x. Manche von diesen abgeleiteten Functionen ändern sich innerhalb gewisser Grenzen nach dem Gesetze der Stetigkeit, und haben wohl gar selbst wieder eine abgeleitete; andere nicht.

Beweis. Ist die gegebene Function von Form ax; so ist

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} = \frac{a(x+\Delta x) - ax}{\Delta x} = a.$$

Also die abgeleitete derselben $= a$ für alle Werthe von x und für ein positives sowohl als negatives Δx. Hätten wir aber z. B. $Fx = ax^2$: so fände sich

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} = \frac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = 2\,ax + a\Delta x,$$

also die abgeleitete $= 2ax$ für verschiedene Werthe von x verschieden. An eben dieser Function haben wir zugleich ein Beyspiel von einer Function, deren abgeleitete stetig ist, die selbst noch eine andere abgeleitete nämlich $2a$ hat. Setzen wir, daß für alle Werthe von x, < 2, $Fx = x^2$, für $x = 2$ und alle größeren $Fx = x^3$ seyn solle: so hat Fx für alle Werthe von $x < 2$ die abgeleitete $2x$, für $x = 2$ und alle größeren Werthe die abgeleitete $3x^2$. Diese abgeleitete ist also selbst eine Function von x, die für den Werth $x = 2$ das Gesetz der Stetigkeit hinsichtlich auf ein negatives Δx verletzet. Denn $\Delta F'x = F'(x - \Delta x) - F'x$ ist für diesen Werth $= 2\ (2 - \Delta x) - 3.4 = -8 - 2\Delta x$. U. s. w.

§. 5. Lehrsatz. Eine einförmige Function Fx hat für einen bestimmten (einförmigen) Werth ihrer Veränderlichen x und hinsichtlich auf ein bestimmtes Vorzeichen ihres Zuwachses auch nur eine einzige abgeleitete, sofern sie überhaupt eine hat.

Beweis. Denn ist Fx einförmig; so ist nach §. 11 (Einl.) auch Δx und somit auch $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ einförmig. Also kann es (nach §.) auch nicht zwey von einander verschiedene d. h. ungleiche meßbare Zahlen M und N geben, denen der Werth des Bruches $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ bey der unendlichen Abnahme von Δx so nahe kommt als man nur immer will.

§. 6. Zusatz. Für den Werth $\Delta x = 0$ übergehet der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ in den an und für sich jederzeit unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ (§.); indem, wenn $\Delta x = 0$ auch $\Delta Fx = Fx - Fx = 0$ ist. Hat aber die Function Fx für den bestimmten Werth x und hinsichtlich auf dasjenige Vorzeichen, das wir beym Δx so eben voraussetzen, eine abgeleitete d. h. gibt es eine gewisse von Δx unabhängige meßbare Zahl M von der Art, daß bey der unendlichen Abnahme von Δx der Unterschied $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - M < 1/N$ wird und verbleibt: so gibt es jederzeit auch Einen und nur einen einzigen Werth. nämlich M selbst, den wir dem Quotienten $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ beylegen müssen, wenn man verlangt. daß er eine Zahl vorstellen solle, die dem Gesetze der Stetigkeit für den Werth $\Delta x = 0$ gehorche. Denn wenn wir den Werth, in welchen dieser Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ übergehet. durch C bezeichnen: so fordert die Bedingung der Stetigkeit, daß $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - C < 1/N$ werde und verbleibe, wenn Δx in das Unendliche abnimmt. Da aber bey dieser Abnahme des Δx in das Unendliche auch $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - M < 1/N$ wird und verbleibt: so erhellet, daß $C = M$ seyn müsse.

§. 7. Lehrsatz. Wenn ein Paar Functionen fx und φx für alle innerhalb gewisser Grenzen a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen sich als die abgeleiteten einer und eben derselben Function Fx betrachten lassen: so muß für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe von x die Gleichung $fx = \varphi x$ bestehen.

Beweis. Wenn für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x die Gleichungen

$$\frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x} = fx + \Omega_1 \quad \text{und} \quad \frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x} = \varphi x + \Omega_2$$

bestehen sollen; so muß für eben diese Werthe auch die Gleichung $fx + \Omega_1 = \varphi x + \Omega_2$ bestehen. Dieses ist aber, da fx und φx sich als beständige Zahlen betrachten lassen, während Ω_1 und

Ω_2 in das Unendliche abnehmen, (nach §.) nur möglich, wenn für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe von x $fx = \varphi x$ ist.

§. 8. Zusatz. Für gewisse vereinzelt stehende Werthe von x können die Gleichungen

$$\frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x} = fx + \Omega_1 \text{ und } \frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x} = \varphi x + \Omega_2$$

bestehen, ohne daß fx und φx für jedes x einander gleich zu gelten brauchen. Setzet z. B. $\varphi x = fx + (x-1)(x-2)(x-3)\ldots$ *in inf.*; so können fx und φx keineswegs als ein Paar gleichgeltende Functionen angesehen werden. Ist aber

$$\frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x} = fx + \Omega_1;$$

so bestehet auch die Gleichung

$$\frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x} = \varphi x + \Omega$$

für alle Werthe von x, die in der Reihe 1, 2, 3, ... liegen; weil das Product $(x-1)(x-2)(x-3)$ *in inf.* für jeden dieser Werthe wegfällt.

§. 9. Lehrsatz. Wenn ein Paar Functionen für alle innerhalb gewisser Grenzen a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen einander gleichgelten; so müssen auch ihre abgeleiteten innerhalb eben dieser Grenzen einander gleichgelten. Allein nicht umgekehrt muß, wenn das Letztere ist, auch das Erstere seyn.

Beweis. *1.* Haben wir für alle Werthe von x innerhalb a und b, $Fx = \Phi x$; so haben wir auch, wenn wir nur $x + \Delta x$ innerhalb dieser Grenzen nehmen,

$$F(x+\Delta x) = \Phi(x+\Delta x);$$

daher auch $$F(x+\Delta x) - Fx = \Phi(x+\Delta x) - \Phi x$$

und $$\frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x} = \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi x}{\Delta x}.$$

Bezeichnen wir nun die abgeleitete der Function Fx durch $F'x$, der Φx durch $\Phi' x$; so soll

$$\frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x} = F'x + \Omega_1 \text{ und } \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi x}{\Delta x} = \Phi' x + \Omega_2,$$

also auch $F'x + \Omega_1 = \Phi' x + \Omega_2$ seyn. Da nun bey einerley x, Ω_1 und Ω_2 in das Unendliche abnehmen können; so folgt, daß $F'x = \Phi' x$ seyn müsse, und zwar für alle Werthe von x, die innerhalb a und b liegen.

2. Daß aber nicht umgekehrt bloß daraus, weil die Gleichung $F'x = \Phi'x$, wenn auch für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe von x bestehet, schon folge, daß auch die Gleichung $Fx = \Phi x$ Statt finden müsse, erhellet daraus, weil auch die zwey ungleichen Functionen $a + Fx$ und Fx einerley abgeleitete haben, wenn wir durch a eine beliebige von x ganz unabhängige Zahl bezeichnen. Denn unter dieser Voraussetzung ist $\frac{\Delta(a+Fx)}{\Delta x} = \frac{\Delta Fx}{\Delta x}$, also die abgeleitete von beyden Functionen gewiß dieselbe.

§. 10. Zusatz. Soll also eine Gleichung für alle Werthe einer in ihr vorkommenden Veränderlichen x, oder wenigstens für alle, die innerhalb gewisser Grenzen liegen, bestehen; so wird sie nicht gestört, wenn wir von beyden Gliedern derselben die abgeleitete in Hinsicht auf eben diese Veränderliche nehmen. Soll z. B. allgemein $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ seyn; so ist auch allgemein $3(1+x)^2 = 3 + 6x + 3x^2$. Nicht also wäre es, wenn eine Gleichung nur für einen oder einige vereinzeltstehenden Werthe der x bestehet, und wir die abgeleitete nehmen wollten. So ist z. B. $(x-3)(x-5)x^2 = (x-3)(x-5)x^4$ für $x=0$ oder $x=3$ oder $x=5$ eine richtige Gleichung. Keineswegs aber wäre es die folgende:

$$(x-5)\,x^2 + (x-3)\,x^2 + 2\,(x-3)\,(x-5)\,x =$$
$$= (x-5)\,x^4 + (x-3)\,x^4 + 4\,(x-3)\,(x-5)\,x^3,$$

welche zum Vorschein kommt, wenn wir von beyden Gliedern der vorigen die abgeleiteten nehmen. Denn diese letztere bestehet wohl noch für $x=0$, nicht aber für $x=3$ oder $x=5$.

§ 11. Lehrsatz. Wenn die Zahl W von der Zahl x, die wir soeben als die Veränderliche ansehen sollen, in der That unabhängig ist; wie wenn x in dem Ausdrucke derselben entweder gar nicht, oder doch nur auf eine solche Weise vorkömmt, daß sich der Werth von W bey jedem beliebigen Werthe von x nicht ändert; wie z. B. wenn $W = \frac{ax - bx}{cx}$ wäre: so ist die abgeleitete von W in Hinsicht auf x gleich 0.

Beweis. Denn nun ist, wenn wir $W = Fx$ setzen $F(x + \Delta x) = Fx$, also $\Delta Fx = 0$ und somit auch $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} = 0$. Also gewiß keine andere meßbare Zahl als Null, der sich der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ in das Unendliche nahet.

§. 12. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für den bestimmten Werth x in Hinsicht auf einen gewissen positiven oder negativen

Zuwachs eine abgeleitete hat: so muß sie für eben diesen Werth von x und hinsichtlich auf denselben Zuwachs auch stetig seyn: nicht aber umgekehrt folgt aus der Stetigkeit einer Function für einen bestimmten Werth ihrer Veränderlichen und hinsichtlich auf ein gewisses Vorzeichen, daß sie auch eine abgeleitete in dieser Beziehung habe.

Beweis. *1.* Soll Fx stetig seyn vom zweiten Grade für den Werth x und hinsichtlich auf dasjenige Vorzeichen, das wir bey Δx voraussetzen: so muß der Quotient

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x}$$

bey der unendlichen Abnahme von Δx einer bey einerley x beständigen und meßbaren Zahl M in das Unendliche nahen. Daraus folgt aber, daß auch der Zähler jenes Bruches oder die Differenz $F(x+\Delta x) - Fx$ eine meßbare Zahl vorstelle, welche mit Δx selbst in das Unendliche abnimmt. Denn im entgegengesetzten Falle, wenn dieser Zähler entweder gar keine meßbare Zahl darböthe, oder fortwährend $> \frac{1}{N}$ verbleibe, oder von Zeit zu Zeit $> \frac{1}{N}$ würde, indem man Δx in das Unendliche abnehmen läßt: so würde auch der Bruch $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ entweder gar keine meßbare Zahl vorstellen oder in das Unendliche wachsen. Nimmt aber der Unterschied $F(x+\Delta x) - Fx$ mit Δx in das Unendliche ab: so ist Fx stetig im ersten Grade für den Werth x und für dasjenige Vorzeichen von Δx, daß wir bey $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ zu Grunde legten.

2. Daß aber nicht umgekehrt aus der Stetigkeit einer Function oder bloß daraus, weil $F(x+\Delta x) - Fx$ mit Δx in das Unendliche abnimmt, schon auf das Vorhandenseyn einer abgeleiteten, oder darauf, daß der Quotient $\frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x}$ einer beständigen und meßbaren Zahl in das Unendliche nahet, geschlossen werden könne; lehrt uns schon das Beyspiel der Function $\frac{1}{1-x}$ für den Wert $x=1$, das wir §. 2. betrachteten.

§. 13. Lehrsatz. Wenn es wahr seyn soll, daß eine Function für den Werth x und hinsichtlich auf einen gewissen positiven oder negativen Zuwachs keine abgeleitete haben soll, während sie in eben dieser Hinsicht Stetigkeit hat: so kann nur einer von folgenden zwey Fällen Statt finden.

Erstens entweder der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ wächst bey der unendlichen Abnahme von Δx in das Unendliche; oder

zweitens es gibt wohl eine gewisse meßbare Zahl M, der dieser Unterschied so nahe gebracht werden kann, als man nur immer will, aber er bleibt nicht bey dieser Annäherung, sondern es gibt zu jedem Δx ein kleineres, dabey der Unterschied $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - M$ abermahls $> \frac{1}{N}$ wird.

Beweis. *1.* Einen dritten Fall kann es, weil Δx und ΔFx doch beyde fortwährend meßbar verbleiben sollen, nicht geben. Denn sind Δx und ΔFx fortwährend meßbar, so ist auch der Werth des Quotientes $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ fortwährend meßbar, und somit gibt es entweder eine gewisse meßbare Zahl, welche fortwährend größer ist, als dieser Quotient nach seinem absoluten Werthe oder derselbe wächst in das Unendliche. Gibt es eine meßbare Zahl, die fortwährend $> \frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ ist, so gibt es (nach §.) auch eine M, welche die kleinste unter denjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß allen größeren die Eigenschaft, fortwährend $> \frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ zu verbleiben, zukommt. Dieser Zahl M muß der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ für gewisse Werthe von Δx entweder völlig gleich werden, oder so nahe treten, daß der Unterschied $M - \frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ kleiner als jeder gegebene Bruch $\frac{1}{N}$ zu werden vermag. Denn bliebe dieser Unterschied fortwährend $> \frac{1}{N}$; so gäbe es eine noch kleinere Zahl als M, von welcher gleicher Weise, wie von M selbst gesagt werden könnte, daß alle größeren fortwährend $> \frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ bleiben.

Allein so klein auch der Unterschied $M - \frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ oder (was ebenso viel ist) der Unterschied $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - M$ (nach seinem absoluten Werthe) für gewisse Δx werde; so muß doch andere noch kleinere Δx geben, für welche $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - M$ abermahls $> \frac{1}{N}$ wird. Denn geschähe dieß nicht; so müßten wir nach der Erklärung des §. 2. zugeben, daß Fx eine abgeleitete habe, und daß M diese abgeleitete sey.

2. Daß aber jeder der beyden im Lehrsatze angegebenen Fälle unter gewissen Umständen eintreten könne, wollen wir durch ein Paar Beyspiele beweisen. Nehmen wir an, daß eine gewisse Zahl y von der Veränderlichen x nach einem solchen Gesetze abhänge, daß wir fortwährend die Gleichung $y^2 = 1 - x^2$ haben, wo überdieß festgesetzt seyn mag, daß der Werth von y nur immer positiv ist. Unter diesen Voraussetzungen ist leicht darzuthun, daß für alle x, die ihrem absoluten Werthe nach nur nicht eben > 1, sind, y eine meßbare und nur eine einzige Zahl sey. Denn wenn die Zeichen $a, b, c, d, \ldots$ beliebige wirkliche Zahlen, jede > 1, bedeuten, und wir wählen zu den Nennern $a, ab, abc, abcd, \ldots$ die Zähler $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ nach einem solchen Gesetze, daß $\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \overline{\gtrless} 1 - x^2$, aber $\left(\frac{\alpha+1}{a}\right)^2$ schon $> 1 - x^2$ ist, daß ferner $\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab}\right)^2 \overline{\gtrless} 1 - x^2$, aber $\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta+1}{ab}\right)^2 > 1 - x^2$, daß eben so

$$\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab} + \frac{\gamma}{abc}\right)^2 \overline{\gtrless} 1 - x^2, \text{ aber } \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab} + \frac{\gamma+1}{abc}\right)^2 > 1 - x^2,$$

und allgemein
$$\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab} + \cdots + \frac{\mu}{ab\ldots m}\right)^2 \overline{\gtrless} 1 - x^2,$$
aber
$$\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab} + \cdots + \frac{\mu+1}{ab\ldots m}\right)^2 > 1 - x^2$$

ausfällt: so folgt (aus §.), daß die Zeichen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ insgesammt wirkliche Zahlen oder theilweise auch Nullen bedeuten, ein jedes aber nur einen einzigen Werth hat. Ferner wissen wir (aus §.), daß der unendliche Zahlenausdruck

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab} + \frac{\gamma}{abc} + \cdots + \frac{\mu}{abc\ldots m} + \cdots \textit{ in inf.}$$

eine meßbare Zahl vorstelle, und zwar nur eine einzige und eine solche, die an die Stelle des y in die Gleichung $y^2 = 1 - x^2$ gesetzt, dieser Genüge thut. Ich behaupte nun, die so bestimmte Zahl y sey eine Function von x, welche für alle Werthe von $x = -1$ bis $x = +1$ einschließlich Stetigkeit, für alle Werthe von $x = -1$ bis $x = +1$ ausschließlich aber auch eine abgeleitete habe. Weil nämlich die Gleichung $y^2 = 1 - x^2$ für alle Werthe von x bestehen soll; so muß sie auch bestehen, wenn wir statt x, $x + \Delta x$ und statt y, $y + \Delta y$ setzen, d. h. es muß auch seyn

$$(y + \Delta y)^2 = 1 - (x + \Delta x)^2$$

oder
$$y^2 + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2 = 1 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2.$$

Hieraus ergibt sich aber durch Abzug

$$\Delta y(2y+\Delta y) = -\Delta x(2x+\Delta x) \text{ oder } \Delta y = -\frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{2y+\Delta y}.$$

Diese Gleichung erweiset nun zuvörderst die Stetigkeit der Function y für jeden Werth der x von $x=-1$ bis $x=+1$ einschließlich, sofern nur in dem ersten Falle Δx positiv in letzteren aber negativ angenommen wird. Denn für $x=-1$ ist $y=0$. und $\Delta y = \frac{(2-\Delta x)\Delta x}{\Delta y}$ oder $\Delta y^2 = (2-\Delta x)\Delta x$; woraus erhellet, daß es, wenn Δx positiv bleibt, ins Unendliche abnimmt, auch für Δy einen fortwährend meßbaren Werth gebe, der gleichfalls in das Unendliche abnimmt. Dieselbe Gleichung $\Delta y^2 = (2-\Delta x)\Delta x$ kommt aber auch zum Vorschein, wenn wir $x=+1$ und Δx negativ nehmen. Also ist dargethan, daß die Function stetig sey, sowohl für $x=+1$ als auch für $x=-1$. Aber auch für jeden dazwischen liegenden Werth von x; denn für jeden solchen hat y irgend einen von Null verschiedenen meßbaren Werth und der Werth von $\Delta y = -\frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{2y+\Delta y}$ nimmt hier mit Δx offenbar in das Unendliche ab. Ja für jeden solchen innerhalb $+1$ und -1 liegenden Werth von x hat y sogar auch eine abgeleitete. Denn der Werth $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x+\Delta x}{2y+\Delta y}$ nähert sich offenbar dem von Δx ganz unabhängigen Werthe $-\frac{x}{y}$ in das Unendliche. Für die zwey Werthe $x=+1$ und -1 hat y schon keine abgeleitete; denn weil für diesen Werth von x, $y=0$ ist; so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-\Delta x}{\Delta y}$; und wächst sonach in das Unendliche, wenn Δx in das Unendliche abnimmt, eben weil dann zugleich auch Δy in das Unendliche abnimmt. Wir haben hier also das Beyspiel einer Function, bey welcher der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ mit Δx in das Unendliche wächst.

Ein Beyspiel des zweyten Falles gibt uns die Function y, wenn sie nach einem solchen Gesetze von x hängt, daß wir für nachstehende Werthe von x beigeschriebene Werthe von y haben:

x				y
von	0	bis	$\frac{1}{2}$	x
„	$\frac{1}{2}$	„	$\frac{3}{4}$	$1-x$
„	$\frac{3}{4}$	„	$\frac{7}{8}$	$x-\frac{1}{2}$
„	$\frac{7}{8}$	„	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{4}-x$

x				y
von	$\frac{15}{16}$	bis	$\frac{31}{32}$	$x-\frac{5}{8}$
„	$\frac{31}{32}$	„	$\frac{63}{64}$	$\frac{21}{16}-x$
„	$\frac{63}{64}$	„	$\frac{127}{128}$	$x-\frac{21}{32}$

u. s. w., d. i. wenn allgemein für jeden Werth der x

$$\text{von } \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \text{ bis } \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}}, \quad y = x - \frac{2^{2n}-1}{3.2^{2n-1}},$$

und für jeden Werth der x von

$$\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}} \text{ bis } \frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n+2}}, \quad y = \frac{2^{2n+2}-1}{3.2^{2n}} - x \text{ ist.}$$

Daß y unter dieser Voraussetzung stetig sey einschließlich von $x=0$ bis $x=1$, sieht man von selbst. Für diesen letzteren Werth aber übergehet es (nach §. 70., I. Abschn.) in $\frac{1}{3}$, weil dieß die Grenze ist, der sich die Ausdrücke

$$x - \frac{2^{2n}-1}{3.2^{2n-1}}, \text{ und } \frac{2^{2n+2}-1}{3.2^{2n}} - x$$

bey dem unendlichen Wachsen von n in das Unendliche nähern, wenn $x=1$ gesetzt wird. Eine abgeleitete aber hat diese Function für den Werth $x=1$ keineswegs. Denn da für alle Werthe der x von

$$\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \text{ bis } \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = +1$$

und für alle Werthe der x von

$$\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}} \text{ bis } \frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n+2}}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \text{ ist:}$$

so sieht man, daß sich für den Werth $x=1$ kein negatives Δx klein genug angeben lasse, damit der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bey einem dieser Werthe $+1$ oder -1 verbleibe, wenn Δx noch immer kleiner gemacht wird.

§. 14. Anmerkung. Der soeben behauptete zweyte Fall, wo eine Function für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen bloß deshalb keine abgeleitete hat, weil der Quotient

$$\frac{F(x+\Delta x) - Fx}{\Delta x},$$

ob er gleich fortwährend meßbar verbleibt, doch keiner beständigen meßbaren Zahl M in das Unendliche so nahet, daß es nicht noch immer kleinere Werthe der x gäbe, für welche der Unterschied $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - M$ wieder $> \frac{1}{N}$ wird, — findet auch Statt bey Functionen, die einem einzigen für alle Werthe ihrer Veränderlichen gleichlautenden Gesetze folgen. Zum Beweise führe ich nur wieder die schon mehrmahls betrachtete Function

$$(c-x) \sin \log (c-x) \text{ an.}$$

welche für $x = c$ und einen negativen Zuwachs von x die §. 2. (I. Abschn.) erklärte Stetigkeit ohne Zweifel besitzt; indem der Unterschied $F(x+\Delta x)-Fx$ für $x=0$, $=\omega \sin\log\omega$ ist, also mit ω allerdings in das Unendliche abnimmt. Eine Abgeleitete aber ist hier nicht anzutreffen; indem der Quotient

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} = \sin\log\omega$$

in das Unendliche hin und herschwankt zwischen den beyden äußersten Werthen $+1$ und -1. Sonach mögen wohl einige in Hrn. Cauchy's *Cours d'Algèbre* vorkommende Sätze, nahmentlich der *Ch.* 2., §. 3.: „Wenn Zähler und Nenner eines Bruches unendlich kleine Größen sind, deren Werthe zugleich mit denen der Veränderlichen x in das Unendliche abnehmen; so ist der Werth dieser Function für $x=0$. bald endlich, bald Null, bald unendlich“ — einer kleinen Berichtigung bedürfen; insofern wenigstens als nicht an den Fall gedacht wird, wo der Werth jenes Bruches unbestimmt bleibt, indem er fortwährend zwischen zwey Grenzen hin und her schwankt. Hr. Cauchy gründete den Beweis seines Satzes auf die Voraussetzung, „daß eine jede veränderliche Größe, die mit einer anderen zugleich verschwindet, durch die Form $kx(1\pm\varepsilon)$ sich müsse darstellen lassen, worin k eine von Null verschiedene beständige, oder aber eine veränderliche und abermahls mit x selbst verschwindene Größe vorstellt“. Allein daß sich diese Voraussetzung nicht strenge darthun lasse, ja nicht einmahl allgemein wahr sey, wird jener scharfsinnige Gelehrte gewiß selbst eingestehen.

§. 13. Lehrsatz. Wie die Beschaffenheit der Stetigkeit mancher Function nur für einen gewissen vereinzelt stehenden Werth ihrer Veränderlichen zukommt (§. 10., I. Abschn.); so kann auch die Beschaffenheit, eine abgeleitete zu haben, einer Function zuweilen nur für einen vereinzelt stehenden Werth ihrer Veränderlichen zukommen: und es ist möglich, daß eine Function für eben den einzelnen Werth ihrer Veränderlichen, für welchen sie stetig ist, auch eine abgeleitete habe.

Beweis. Setzet, daß Fx für jeden Werth von x, der von der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ ist, den Werth $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)x$ habe, für jeden anderen Werth von x aber $=x$ sey; so zeigt sich, wie in §. 10., I. Abschn., daß $F(x+\Delta x)-Fx$ immer nur folgende vier Werthe haben könne;

$$\Delta x: -\frac{x}{2^n} + \Delta x;\ \frac{x}{2^n} + \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\Delta x:\ x\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n'}}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\Delta x,$$

je nach dem weder x noch $x+\Delta x$ von der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ sind, oder das erste oder das zweyte oder beyde von dieser Form sind. Hieraus erhellet, wie in §. 10., I. Abschn., daß diese Function nur für den einzigen Werth $x=0$ stetig sey. Für eben diesen Werth aber hat sie auch eine abgeleitete. Denn es ist

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} \text{ entweder } = 1 \text{ oder } = 1 + \frac{1}{2^n};$$

und dieser letztere Werth nähert sich bey der unendlichen Abnahme von Δx, wo n in das Unendliche wächst, dem Werthe 1 in das Unendliche. Also darf allgemein 1 als die Grenze angesehen werden, der sich der Quotient $\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}$ bey der unendlichen Abnahme von Δx in das Unendliche nahet.

§. 16. Lehrsatz. Wie eine Function eine abgeleitete haben kann. Beydes, sowohl für gewisse vereinzelt stehende Werthe, als auch für einen ganzen Inbegriff von Werthen ihrer Veränderlichen so viele innerhalb gewisser Grenzen a und b liegen oder auch durchgängig für alle Werthe von x: so kann auch umgekehrt eine Function einer abgeleiteten ermangeln sowohl für einen gewissen vereinzelt stehenden Werth, als auch für einen ganzen Inbegriff von Werthen ihrer Veränderlichen, so viel innerhalb gewisser Grenzen a und b liegen, ja auch wohl durchgängig für alle ihre Werthe.

Beweis. Setzet, daß Fx für alle Werthe von x, die < 10 sind, $=x$, für $x=10$, aber $=20$, endlich für alle Werthe von x, die > 10 sind, $=1+x$ sey: so ist für alle Werthe von x, die < 10 sind, der Quotient

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = 1:$$

also 1 selbst die abgeleitete. Eben so findet sich für alle Werthe von x, die > 10 sind,

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} = \frac{(1+x+\Delta x)-(1+x)}{\Delta x} = 1,$$

d. h. auch für alle diese Werthe ist 1 die abgeleitete. Für den Werth $x=10$ aber ist der Unterschied $F(x+\Delta x)-Fx$ für ein positives Δx, $\quad = 1 + 10 + \Delta x - 20 = -9 + \Delta x,$

und für ein negatives Δx.

$$= (10 - \Delta x) - 20 = -10 - \Delta x.$$

Also ist diese Function für den Werth $x = 10$ nicht einmahl stetig, um so viel weniger hat sie eine abgeleitete. (§. 12.) Daß es endlich auch Function gebe, welche für alle innerhalb gewisser Grenzen enthaltenen Werthe ihrer Veränderlichen oder für alle überhaupt einer abgeleiteten ermangeln, folgt schon daraus, weil es auch Functionen gibt, welche nicht einmahl stetig sind.

§. 17. Anmerkung. Der letztere Theil des vorigen Satzes widerspricht gewisser Maßen demjenigen, was Lagrange und so viele Andere theils ausdrücklich behaupten, theils nur stillschweigend voraussetzen, daß eine jede Function, höchstens mit Ausnahme einiger isolirt stehenden Werthe ihrer Veränderlichen, für alle übrigen Fälle eine abgeleitete habe. Es ist aber wohl zu bemerken, daß diese Gelehrten (wie ich es auch schon §. 3., I. Abschn. anmerkte) das Wort Function in einer viel engeren Bedeutung nehmen, indem sie darunter bloß solche von einer anderen x abhängige Zahlen verstehen, welche durch eines der sieben Zeichen

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^n,\ a^x,\ \log x;$$

oder durch eine Verbindung mehrerer derselben ausgedrückt werden können. Von solchen gilt nun, was sie behaupten, allerdings; zumahl da es bey einigen dieser Zeichen schon in die Bedeutung derselben gelegt wird, daß sie Zahlen bezeichnen sollen, die sich nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, ja eine abgeleitete haben. Da ich aber (§. 1., 2. Einl.) geglaubt, daß man dem Worte Function einen viel weiteren Begriff anweisen müsse; so wird es nothwendig auch dasselbe von Functionen zuzugestehen, die nicht nur keine abgeleitete haben, sondern selbst das Gesetz der Stetigkeit nicht nur für einzelne Werthe, sondern für alle innerhalb gewisser Grenzen gelegenen und für alle Werthe ihrer Veränderlichen überhaupt verletzten.

Allein auch Einige derjenigen Mathematiker, die den Begriff einer Function weiter und so wie ich es oben that, fassen, scheinen geneigt zu glauben, daß eine jede Function ihre abgeleitete habe, wenn wir nur einzelne Werthe ausnehmen. In den *Annales de Mathématiques par J. D. Gergonne T.* 21. (1830) findet sich p. 182 ein Versuch von Galois, der dieses darthun soll. Da der Beweis sehr kurz ist, mag er hier wörtlich folgen:

Théorème. Soient Fx et fx deux fonctions quelconques données: on aura quels que soient x et h, $\frac{F(x+h)-Fx}{f(x+h)-fx}=\varphi(k)$. φ étant une fonction déterminée. et k une quantité intermédiaire entre x et $x+h$.

Démonstration. Posons, en effet. $\frac{F(x+h)-Fx}{f(x+h)-fx}=P$: on en déduira $F(x+h)-P.f(x+h)=Fx-P.fx$: d'où l'on voit que la fonction $Fx-Pfx$ ne change pas quand on y change x en $x+h$: d'où il suit qu'à moins qu'elle en reste constante entre ces limites, ce qui ne pourrait avoir lieu que dans des cas particuliers, cette fonction aura, entre x et $x+h$, un ou plusieurs *maxima* et *minima*. Soit k la valeur de x répondant à l'un d'eux: on aura évidemment $k=\psi(P)$. ψ étant une fonction déterminée: donc on doit avoir aussi $P=\varphi(k)$, φ étant une autre fonction également déterminée: ce qui démontre le théorème. — De là on peut conclure, comme corollaire, que la quantité

$$\text{Lim}\ \frac{F(x+h)-Fx}{f(x+h)-fx}=\varphi(x)$$

pour $h=0$. est nécessairement une fonction de x. ce qui démontre. à priori, *l' existence des fonctions derivées.*

Dieser Beweis ist für mich nicht befriedigend. Ohne Zweifel fordert die Gleichung $\frac{F(x+h)-Fx}{f(x+h)-fx}=P$. daß man sich P als eine Zahl denke. die nicht nur von x und h. sondern auch von der Natur der Functionen. die durch die Zeichen F und f ausgedrückt werden sollen, abhänge. Daß nun der ganze Ausdruck $Fx-Pfx$ seinen Werth nicht ändert, wenn x in $x+h$ übergehet. ist richtig: und daraus folgt (wenn erst die Stetigkeit der Functionen Fx und fx vorausgesetzt wird) allerdings. daß jener Ausdruck innerhalb x und $x+h$ eine oder mehrere *Maxima* und *Minima* haben müsse. Daß aber, wenn man Eines derselben durch k bezeichnet. *évidemment* eine Function von der Zahl P seyn müsse, leuchtet mir gar nicht ein. Wie nämlich in dem Ausdrucke $Fx-P.fx$ nicht nur P vorkommt. sondern auch die Zeichen F und f: so könnte wohl seyn. ja es ist in der That, daß k nicht bloß von dem Werthe der P. sondern auch von der Natur der Functionen, die wir durch F und f bezeichnen. abhängt. Sollte man mir vielleicht entgegnen wollen. daß der Einfluß, den die Natur der Functionen Fx und fx auf die Bestimmung von k hat. allerdings unläugbar sey, daß man derselben aber bey der Bestimmung von k entbehren könne, wenn man k nur von P abhängig seyn läßt, weil ja P selbst schon von F und f abhängt: so antworte ich, es sey kein sicherer Schluß: „Wenn k und P beyde von einer und eben derselben Function Fx (oder von zweyen Fx und fx) abhangen: so müsse sich auch k durch P (und P durch k) bestimmen lassen". — So wird z. B. die Länge einer Linie s durch die Abszisse x, und die Function für die Ordinate $y = fx$ bestimmt: dasselbe gilt auch von dem Flächenraume P, den diese Linie mit ihrer Coordinate einschließt. Können wir aber wohl sagen, daß $s = \psi(P)$ oder $P = \varphi(s)$ sey? —

§. 19. Zusatz. Die I. §. 75. betrachtete Function Fx, bey welcher das Steigen und Fallen so vielmahl abwechselt, daß es zu keinem Werthe von x ein ω klein genug gibt, um behaupten zu können, daß Fx innerhalb x und $x \pm \omega$ fortwährend wachse oder fortwährend abnehme, gibt uns einen Beweis, daß eine Function sogar stetig seyn könne und doch keine abgeleitete hat für so viele Werthe ihrer Veränderlichen, daß zwischen je zwey derselben sich noch ein dritter, für welchen sie abermahls keine abgeleitete hat, nachweisen läßt. Denn ist x einer von denjenigen Werthen, deren zugehörige Fx mit einem der zu x gehörigen Werthe, welche die Function y_1, y_2, y_3, . . . annehmen, genau zusammenfällt: so ist leicht zu erweisen, daß es keine beständige meßbare Zahl gebe, der sich der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ bey der unendlichen Abnahme von Δx in das Unendliche nahe, sondern daß dieser Quotient vielmehr in das Unendliche wachse: welches somit heißt, als daß die abgeleitete $F'x$ unendlich groß d. h. gar nicht vorhanden ist (§. 2). Zu jedem auch noch so kleinen Δx nämlich läßt sich ein so großes n angeben, daß $(\frac{3}{8})^{n-2}(b-a) < \Delta x$ wird. Bezeichnen wir nun dieß $(\frac{3}{8})^{n-2}(b-a)$ zur Abkürzung durch α, den Unterschied aber, um welchen die zu $x + \alpha$ gehörigen Werthe der Function y_n größer ist, als der zu x gehörige $= Fx$, durch β: so wissen wir, daß zu $x + \frac{3}{8}\alpha$ ein Zuwachs von $y_{n+1} = \frac{5}{8}\beta$; zu $x + (\frac{3}{8})^2\alpha$ ein Zuwachs von $y_{n+2} = (\frac{5}{8})^2\beta$, und überhaupt zu $x + (\frac{3}{8})^r\alpha$ ein Zuwachs von $y_{n+r} = (\frac{5}{8})^r\beta$ gehöre. Da nun alle zu den so eben genannten Werthen der x zugehörigen Werthe oder Zuwächse der Function y_{n+r} auch zugleich Werthe oder Zuwächse der Fx sind: so sieht man, daß das Verhältniß $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ bey allmähliger Verminderung von Δx alle in folgender Reihe vorkommenden Werthe annehmen kann:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{\beta}{\alpha},\ \left(\frac{5}{3}\right)^2\frac{\beta}{\alpha},\ \left(\frac{5}{3}\right)^3\frac{\beta}{\alpha}\ldots\ldots\left(\frac{5}{3}\right)^r\frac{\beta}{\alpha}.$$

Da nun $(\frac{5}{3})^r$ in das Unendliche wächst: so ist kein Zweifel, daß auch das Verhältniß $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ in das Unendliche wachse.

§. 20. Lehrsatz. Es gibt Functionen die für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen eine abgeleitete haben, nur rücksichtlich auf einen positiven oder nur rücksichtlich auf einen negativen Zuwachs. Es gibt auch Functionen, welche für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen eine andere abgeleitete haben für ein positives und eine andere für ein negatives Vorzeichen von Δx. Es gibt endlich auch Functionen und Werthe ihrer Veränderlichen, bey welchen eine und eben dieselbe abgeleitete in beyden Rücksichten (d. h. für einen positiven sowohl als negativen Zuwachs) Statt hat.

Beweis. Ein Beyspiel des ersten und zweyten Falles gibt uns schon die §. 13 betrachtete Function y, die durch die Gleichung $y^2 = 1 - x^2$ bestimmt wird. Denn bey dem Werthe $x = -1$ hat y eine abgeleitete nur für ein positives Δx, für den Werth $x = +1$ aber nur für ein negatives Δx. Zu einem Beyspiele des dritten Falles laßt uns nur annehmen, daß y für alle Werthe von x, die < 4 sind, bis zu dem Werthe $x = 4$ einschließlich, den Werth $3x$, für alle größeren Werthe von x aber den Werth $3x - 8$ haben soll. Denn bey dieser Annahme ist für den Werth $x = 4$ und für ein positives Δx der Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3(4+\Delta x) - 8] - 3\,.\,4}{\Delta x} = 3,$$

für ein negatives Δx aber ist

$$\frac{\Delta y}{-\Delta x} = \frac{3(4-\Delta x) - 3\,.\,4}{-\Delta x} = 3.$$

Daß es endlich auch Functionen gebe, bey denen die Zahl M, der sich der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ in das Unendliche nähert, einerley Werth behält, wir mögen Δx positiv oder negativ annehmen, bedarf kaum eines Beweises. So ist, wenn $y = ax^2$ ist, für jeden Werth von x der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für ein positives Δx

$$= \frac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x.$$

und für ein negatives Δx

$$= \frac{a(x-\Delta x)^2 - ax^2}{-\Delta x} = 2ax - a\Delta x:$$

also $2ax$ die Zahl, der sich der Werth jenes Quotienten für beyde Fälle in das Unendliche nähert.

§ 21. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen eine abgeleitete in beyden Richtungen hat, die überdieß für alle so eben genannten Werthe der x dem Gesetze der Stetigkeit folgt: so muß diese abgeleitete für jeden einzelnen Werth von x in beyden Richtungen dieselbe seyn.

Beweis. Bezeichnet x einen beliebigen innerhalb a und b gelegenen Werth: so muß es ein positives Δx klein genug geben, damit der Unterschied

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} - F'x < \frac{1}{N}$$

ausfalle. Weil ferner wegen des Vorhandenseyns einer doppelten abgeleiteten die Function Fx (§. 12) und nach der ausdrücklichen Voraussetzung auch ihre abgeleitete $F'x$ selbst stetig seyn soll, für jedes innerhalb a und b gelegene x: so muß es ein positives i klein genug geben, daß für dasselbe und alle kleineren Werthe folgende drey Verhältnisse eintreten:

$$F'(x-i) - F'x < \frac{1}{N}$$

$$F(x-i) - Fx < \frac{\Delta x}{N}$$

$$F(x+\Delta x-i) - F(x+\Delta x) < \frac{\Delta x}{N},$$

wenn wir die Unterschiede in den drey Vordergliedern alle nach ihren absoluten Werthen nehmen. Daher ist auch, wenn wir die beyden letzteren Verhältnisse mit dem positiven Δx dividiren, und von einander abziehen

$$\frac{F(x+\Delta x-i)-F(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{F(x-i)-Fx}{\Delta x} < \frac{2}{N};$$

was sich auch so schreiben läßt:

$$\frac{F(x+\Delta x-i)-F(x-i)}{\Delta x} - \frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} < \frac{2}{N}.$$

Da aber $\dfrac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} - F'x < \dfrac{1}{N}$ seyn soll:

so muß auch $\frac{F(x+\Delta x-i)-F(x-i)}{\Delta x}-F'x<\frac{3}{N}$

seyn und verbleiben, wenn i ins Unendliche abnimmt.

1. Ist nun $i=\Delta x$: so ist

$$\frac{F(x+\Delta x-i)-F(x-i)}{\Delta x}=\frac{Fx-F(x-\Delta x)}{\Delta x}=\frac{F(x-\Delta x)-Fx}{-\Delta x}.$$

Also
$$\frac{F(x-\Delta x)-Fx}{-\Delta x}-F'x<\frac{3}{N}.$$

Da nun $\frac{3}{N}$ eben so gut wie $\frac{1}{N}$ eine Zahl bedeutet, die ins Unendliche abnehmen kann, wenn Δx in das Unendliche abnimmt: so ist kein Zweifel, daß sich für diesen Fall $F'x$ ganz so verhalte, wie es die abgeleitete der Fx bey einem n e g a t i v e n Δx soll.

2. Ist $i>\Delta x$: so wird das Verhältniß

$$\frac{F(x+\Delta x-i)-F(x-i)}{\Delta x}-F'x<\frac{3}{N}$$

um so gewisser bestehen, wenn wir i vermindern und $=\Delta x$ werden lassen. Denn die drey obigen Verhältnisse, aus welchen dieß letztere fließt, werden durch keine Verminderung von i gestört. Also ist auch in diesem Falle

$$\frac{F(x-\Delta x)-Fx}{-\Delta x}-F'x<\frac{3}{N}$$

d. h. auch hier verhält sich $F'x$ wie eine abgeleitete der Fx in negativer Richtung.

3. Ist endlich $i<\Delta x$: so brauchen wir nur zu bemerken, daß unsere Function für jeden Werth von x, also auch für den Werth $x-i$ eine abgeleitete haben soll: daher sich denn auch ein ω muß angeben lassen klein genug, daß für dasselbe und alle kleineren Werthe

$$\frac{F(x-i+\omega)-F(x-i)}{\omega}-F'(x-i)<\frac{1}{N}$$

wird und verbleibt.

Da wir aber, wie bereits festgesetzt wurde, i so klein nehmen sollten, daß

$$F'(x-i)-F'x<\frac{1}{N}$$

ist: so wird auch $\frac{F(x-i+\omega)-F(x-i)}{\omega}-F'x<\frac{2}{N}.$

Da nun dieses Verhältniß bestehet, auch wenn wir i und ω in das Unendliche abnehmen lassen: so muß es auch bestehen, wenn wir die größere dieser beyden Zahlen der kleineren gleich werden lassen. Dann aber ist

$$\frac{Fx - F(x-\omega)}{\omega} - F'x < \frac{2}{N} \text{ d. i. } \frac{F(x-\omega) - Fx}{-\omega} - F'x < \frac{2}{N}$$

d. h. die Function Fx hat eine abgeleitete auch für ein negatives Δx.

§. 22. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen eine abgeleitete hat, die nur für gewisse vereinzelt stehende Werthe der x, deren jeder auf beyden Seiten einen ihm nächsten hat, das Gesetz der Stetigkeit verletzet: so besteht diese Verletzung nur eben darin, daß, wenn c einen solchen Werth vorstellt, die abgeleitete $F'c$ einen anderen Werth M für einen positiven, und einen anderen R für einen negativen Zuwachs hat, während diejenigen abgeleiteten, die der Form $F'(c+\omega)$ unterstehen, dem Werthe M, diejenigen abgeleiteten aber, die der Form $F'(c-\omega)$ unterstehen, dem Werthe R bey der unendlichen Abnahme von ω in das Unendliche nahen.

Beweis. Weil jeder Werth von x, für welchen die abgeleitete das Gesetz der Stetigkeit verletzet, ein einzeln stehender seyn soll, auch auf beyden Seiten einen ihm nächsten hat; so sey $c+i$ dieser nächste auf der positiven, $c-j$ der auf der negativen Seite. Für alle Werthe der x, die zwischen c und $c+i$, ingleichen für alle, die zwischen c und $c-j$ liegen, folgt also $F'x$ dem Gesetze der Stetigkeit. Für alle diese Werthe ist daher nach dem vorigen Satze der Werth von $F'x$ in beyden Richtungen derselbe. Wäre dieß also auch für den Werth $x=c$: so würde sich überhaupt gar keine Abweichung von dem Gesetze der Stetigkeit kund geben. Wenn also im Gegentheil Eine Statt finden soll: so müssen die beyden Werthe von $F'c$, die wir im Lehrsatz durch M und R bezeichneten, einander ungleich seyn. Daß aber der Werth der abgeleiteten $F'(c+\omega)$ durch die unendliche Verminderung von ω dem Werthe M so nahe kommen könne, als man nur will, erweiset sich so. Weil M die abgeleitete der Fx für $x=c$ und einen positiven Zuwachs vorstellt; so muß ein positives ω klein genug angeblich seyn, damit

$$\frac{F(c+2\omega) - Fc}{2\omega} - M < \frac{1}{N}$$

wird, und dann ist um so gewisser

$$\frac{F(c+\omega)-Fc}{\omega}-M<\frac{1}{N}.$$

Allein
$$\frac{F(c+2\omega)-Fc}{2\omega}=\frac{F(c+2\omega)-F(c+\omega)}{2\omega}+\frac{F(c+\omega)-Fc}{2\omega}.$$

Also muß
$$\frac{F(c+2\omega)-F(c+\omega)}{\omega}+\frac{F(c+\omega)-Fc}{\omega}-2M<\frac{2}{N}$$

und wenn wir $\frac{F(c+\omega)-Fc}{\omega}-M$ abziehen,

$$\frac{F(c+2\omega)-F(c+\omega)}{\omega}-M<\frac{3}{N}\ \text{seyn.}$$

Aber der Quotient $\frac{F(c+2\omega)-F(c+\omega)}{\omega}$ nähert sich dem Werthe $F'(c+\omega)$ in das Unendliche. Also muß auch $F'(c+\omega)-M<\frac{3}{N}$ seyn. Auf ähnliche Art erweiset sich, daß $F'(c-\omega)-R<\frac{3}{N}$ ist.

§. 23. Lehrsatz. Bloß aus dem Umstande, daß eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen, hinsichtlich auf ein positives (oder negatives) Δx eine abgeleitete hat, folgt noch nicht, daß sie auch hinsichtlich auf ein negatives (oder positives) Δx eine abgeleitete haben müsse.

Beweis. Auf ähnliche Art, wie der ähnliche Satz §. 12. I. Absch.; so daß auch dasselbe Beyspiel hier wieder benützt werden kann. Denn ist für alle Werthe von $x<2$, $Fx=x^2$, für $x=2$ und alle größeren Werthe aber $Fx=x^3$: so ist für jedes $x<2$, $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}=2x+\Delta x$, also $2x$ die abgeleitete hinsichtlich auf ein positives Δx. Eben so ist für jedes $x>2$, $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2$, also $3x^2$ die verlangte abgeleitete hinsichtlich auf ein positives Δx. Endlich findet sich auch für den Werth $x=2$ hinsichtlich auf einen positiven Zuwachs eine abgeleitete; denn es ist

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x}=\frac{(2+\Delta x)^3-2^3}{\Delta x}=12+6\Delta x+\Delta x^2:$$

also 12 diese abgeleitete. Unsere Function hat also für alle Werthe der x eine abgeleitete in Hinsicht auf einen positiven Zuwachs. Nicht also ist es bey einer Differenz mit negativem Vorzeichen für den Werth $=2$. Denn hier ist

$$\frac{\Delta Fx}{-\Delta x}=\frac{(2-\Delta x)^2-2^3}{-\Delta x}=\frac{-4-4\Delta x+\Delta x^2}{-\Delta x}$$

ein Ausdruck, der seinem absoluten Werthe nach in das Unendliche wächst, wenn Δx in das Unendliche abnimmt.

§. 24. Lehrsatz. Bloß aus dem Umstande, daß eine gewisse Function für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen eine abgeleitete hat, folgt noch keineswegs, daß für alle innerhalb eben dieser Grenzen liegenden Werthe der x eine und eben dieselbe Zahl ε angeblich seyn müsse, klein genug um behaupten zu können, daß der Unterschied $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - F'x$ (wo $F'x$ die abgeleitete in Hinsicht auf x und für dasselbe Vorzeichen mit Δx vorstellt) nach seinem absoluten Werthe betrachtet $< \frac{1}{N}$ wird, ohne daß nothwendig wäre $\Delta x < \varepsilon$ zu nehmen.

Beweis. Setzen wir $Fx = \frac{1}{1-x}$, so tritt dasjenige, was hier behauptet wird, ein, wenn die Veränderliche x sich dem Werthe 1 in das Unendliche nahet. Schreiben wir nämlich zur Abkürzung $x = 1 - i$; so ist $\frac{\Delta Fx}{\Delta x} = \frac{1}{i\,(i - \Delta x)}$, also $\frac{1}{i^2}$ die abgeleitete von $\frac{1}{1-x}$ für $x = 1 - i$. Soll nun der Unterschied

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} - F'x = \frac{1}{i\,(i-\Delta x)} - \frac{1}{i^2} = \frac{\Delta x}{i^2\,(i-\Delta x)} < \frac{1}{N}$$

werden; so muß $\Delta x < \frac{i^3}{N + i^2}$ genommen werden; eine Zahl, die offenbar kleiner als jede gegebene e wird, sofern i ins Unendliche abnimmt, d. h. sofern sich x der Grenze 1 in das Unendliche nahet.

§. 25. Lehrsatz. Es ist möglich, daß eine Function Fx für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth ihrer Veränderlichen eine abgeleitete wenigstens in Bezug auf einen positiven (oder negativen) Zuwachs habe, und dabei doch nicht das Gesetz der Stetigkeit für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth ihrer Veränderlichen in beyden Richtungen befolge. Wenn aber die Function eine abgeleitete hat; so muß sie allerdings auch fortwährend stetig seyn in beyden Richtungen.

Beweis. *1.* Setzen wir, daß für alle Werthe von x, die < 4 sind, und für $x = 4$ selbst $Fx = x^2$, für jeden größeren aber $Fx = x^3$ sey; so hat Fx für alle Werthe der x eine abgeleitete, wenigstens hinsichtlich auf Eine Richtung. Für alle $x < 4$ nämlich die abgeleitete $2x$, für alle $x > 4$ die abgeleitete $3x^2$

in beyden Richtungen: für $x=4$ aber nur eine abgeleitete in negativer Richtung $=2x=8$: während für einen positiven Zuwachs

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x}=\frac{(4+\Delta x)^3-4^2}{\Delta x}=\frac{48+48\Delta x+12\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}$$

in das Unendliche wächst. Für alle diese Werthe ist diese Function auch nicht mehr stetig. Denn ΔFx ist hier

$$=48+48\Delta x+12\Delta x^2+\Delta x^3, \text{ also fortwährend } >48.$$

2. Wenn aber die Function eine abgeleitete in beyden Richtungen für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe hat: so muß sie auch für alle diese Werthe in beyden Richtungen Stetigkeit haben. Denn gäbe es irgend einen innerhalb a und b gelegenen Werth $x=c$, für welchen die Function für ein entweder positives oder negatives ω unstetig ist: so müßte $F(c+\omega)-Fc$ ein Unterschied seyn, der entweder nie $<\frac{1}{N}$ wird, so sehr man auch ω vermindert, oder nicht fortwährend $<\frac{1}{N}$ verbleibt, wenn man ω in das Unendliche abnehmen läßt. Denn weil die Function für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x eine doppelseitige abgeleitete hat: so müssen die Werthe Fc und $F(c+\omega)$ beyde meßbar seyn: also kann (nach §. 2. I. Absch.) allerdings außer den beyden genannten Fällen kein dritter eintreten. Allein in keinem dieser zwey Fälle könnte der Quotient $\frac{F(c+\omega)-Fc}{\omega}$ einer von ω unabhängigen meßbaren Zahl in das Unendliche nahen, sondern er müßte im Gegentheil durch die Verminderung von ω in das Unendliche wachsen. Denn gibt es zu jedem ω irgend ein kleineres, dabey $F(c+\omega)-Fc \overline{\overline{>}} \frac{1}{N}$ wird: so wird $\frac{F(c+\omega)-Fc}{\omega} \overline{\overline{>}} \frac{1}{\omega N}$, welches, wenn nur ω klein genug ist, größer als jede gegebene Zahl werden kann.

§. 26. Zusatz. Nicht umgekehrt können wir daraus, wenn uns bloß mitgetheilt wird, daß eine Function Fx für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth ihrer Veränderlichen eine abgeleitete habe, ohne jedoch zu bestimmen, ob auch jederzeit in beyden Richtungen, wohl aber beygesetzt wird, daß diese Function fortwährend stetig sey: den Schluß ziehen, daß sie für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth eine abgeleitete in beyden Richtungen habe.

Denn setzen wir, daß für alle Werthe der x von

$$\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \text{ bis } \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}},\ Fx = x - \frac{2^{2n}-1}{3 \cdot 2^{2n-1}},$$

für alle Werthe der x von

$$\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}} \text{ aber bis } \frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n+2}},\ Fx = \frac{2^{2n+2}-1}{3 \cdot 2^{2n}} - x$$

sey, daß man endlich für alle $x \geqq 1$, $Fx = \frac{x^2}{3}$ hat: so zeigt uns die Vergleichung mit dem letzten Beyspiele in §. 70., I. Absch., daß diese Function für alle Werthe der x von 0 bis 10 oder zu jeder beliebigen größeren Grenze stetig sey hinsichtlich auf einen positiven sowohl als negativen Zuwachs: ingleichen daß diese Function für jeden Werth innerhalb dieser Grenzen auch eine abgeleitete in Einer, doch nicht in beyden Beziehungen habe. Für $x=1$ nämlich und für ein positives Δx gibt es hier die abgeleitete $\frac{2x}{3} = \frac{2}{3}$, für ein negatives Δx aber keine.

§. 27. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und $a+h$ gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen eine abgeleitete $F'x$ in beyden Richtungen, für den Werth $x=a$ aber wenigstens eine in derselben Richtung mit h, und für den Werth $x=a+h$ in entgegengesetzter Richtung hat: wenn diese abgeleitete überdieß für alle soeben genannten Werthe der x dem Gesetze der Stetigkeit folgt: so muß eine Zahl e klein genug angeblich seyn, um behaupten zu können, daß der Zuwachs Δx nie kleiner als e genommen zu werden braucht, damit der Unterschied $\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} - F'x$ nach seinem absoluten Werthe kleiner als ein gegebener Bruch ausfalle, so oft nur x und $(x+\Delta x)$ beyde nicht außerhalb a und $a+h$ liegen.

Beweis. Wäre das Gegentheil und gäbe es keine Zahl e klein genug, daß das so eben Gesagte von ihr gälte: so müßten die Werthe von Δx, die dazu nothwendig sind, um das Verhältniß

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} - F'x < \frac{1}{N}$$

für jeden Werth von x, der nur nicht außerhalb a und $a+h$ liegt, herzustellen, in das Unendliche abnehmen. Zu jedem auch noch so klein angenommenen Δx gäbe es also hier ein anderes, das annoch kleiner ist. Wenn wir daher durch $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ Werthe der x bezeichnen, die so beschaffen sind, daß sie ein jeder innerhalb a und $a+h$ liegen, und jeder folgende immer ein Δx kleiner als das des nächstvorhergehenden brauche, um das Verhältniß

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}-F'x<\frac{1}{N}$$

herzustellen: so würden diese Werthe eine Reihe bilden, die ins Unendliche gehet. Aus §. wissen wir aber, daß es eine gewisse nicht außerhalb a und $a+h$ liegende meßbare Zahl c von der Art geben müßte, daß eine unendliche Menge von Gliedern jener Reihe sich durch die beyden Grenzen c und $c\pm i$ einschließen ließe, wo i nach seinem absoluten Werthe so klein man nur immer will genommen werden dürfte. Hieraus folgt unmittelbar, daß für Werthe von x, die sich dem c in das Unendliche nahen, auch der Werth von Δx in das Unendliche abnehmen müßte, um die Bedingung

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}-F'x<\frac{1}{N}$$

zu erfüllen. Denn schließen die Grenzen c und $c+i$, so nahe sie auch einander rücken mögen, jederzeit auch eine unendliche Menge der Glieder $x_1, x_2, x_3 \ldots$ *in inf.* zwischen sich ein: so liegt am Tage, es müsse dieser Werthe unendlich viele geben, welche dem c so nahe stehen, daß der Abstand kleiner als jede gegebene Zahl ist. Unter diesen unendlich vielen Werthen muß es denn nothwendig auch solche geben, die in der Reihe $x_1, x_2, x_3 \ldots$ *in inf.* soweit entfernt von ihrem Anfange liegen, daß ihre Stellenzahl größer als eine jede gegebene ist; also Glieder, deren zugehöriges Δx kleiner als jeder gegebene Bruch gemacht werden muß, wenn die Bedingung

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}-F'x<\frac{1}{N}$$

erfüllt werden soll. Wenn aber Fx für jeden innerhalb a und $a+h$ gelegenen Werth der x eine abgeleitete in beyden Richtungen, für $x=a$ überdieß eine in derselben Richtung mit h, und für $x=a+h$ in der entgegengesetzten Richtung hat: so ist für jeden nicht außerhalb a und $a+h$ gelegenen Werth von c eine Zahl e von demselben Vorzeichen mit i und klein genug angeblich, damit der Unterschied

$$\frac{F(c+e)-Fc}{e}-F'c<\frac{1}{2N}$$

ausfalle. Ich behaupte nun, kleiner als dieses e brauche kein Δx

zu werden, welches zu irgend einem nur nahe genug an c angrenzenden Werthe von x gehört, damit das Verhältniß

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}-F'x<\frac{1}{N}$$

eintrete. Weil nämlich der Voraussetzung nach die abgeleitete $F'x$ für alle nicht außerhalb a und $a+h$ gelegenen Werthe der x stetig seyn soll, und weil für alle diese Werthe auch die Function Fx selbst nach §. 12 stetig seyn muß, indem sie widrigenfalls nicht für jeden der genannten Werthe eine abgeleitete nach beyden Richtungen besitzen könnte: so ist kein Zweifel, es müsse irgend eine Zahl j von demselben Vorzeichen mit i angeblich seyn so klein, daß für sie und alle kleineren Zahlen nachstehende drey Verhältnisse gleichzeitig eintreten:

$$F'(c+j)-F'c<\frac{1}{6N}$$

$$F(c+j)-Fc<\frac{e}{6N}$$

$$F(c+j+e)-F(c+e)<\frac{e}{6N},$$

wenn wir die Unterschiede, welche die Vorderglieder in diesen Verhältnissen bilden, alle nach ihren absoluten Werthen nehmen. Aus diesen Verhältnissen aber folgt durch Division der beyden letzteren mit e und Addirung

$$\frac{F(c+j+e)-F(c+e)}{e}+\frac{F(c+j)-Fc}{e}+F'(c+j)-F'c<\frac{1}{2N}.$$

Also auch

$$\frac{F(c+j+e)-F(c+e)}{e}-\frac{F(c+j)-Fc}{e}-(F'(c+j)-F'c)<\frac{1}{2N}:$$

ingleichen

$$\frac{F(c+j+e)-F(c+j)}{e}-\frac{F(c+e)-Fc}{e}-(F'(c+j)-F'c)<\frac{1}{2N}.$$

Da aber auch $$\frac{F(c+e)-Fc}{e}-F'c<\frac{1}{2N};$$

so folgt durch Addition, daß auf jeden Fall

$$\frac{F(c+j+e)-F(c+j)}{e}-F'(c+j)<\frac{1}{N}$$

sey, j mag so klein genommen werden als man nur immer will. Unter dieser Voraussetzung stellt aber $c+j$ jeden beliebigen innerhalb c und $c+i$ liegenden Werth der x vor: und es ist somit dargethan, daß es für keinen dieser Werthe von x eines Δx kleiner als e bedürfe, um das Verhältniß

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}-F'x<\frac{1}{N}$$

herzustellen.

§. 28. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und $a+h$ gelegenen Werthe der x eine abgeleitete in beyden Richtungen hat, für $x=a$ aber wenigstens eine in derselben Richtung mit h, und für $x=a+h$ in der entgegengesetzten Richtung: wenn endlich diese abgeleitete für alle nur eben genannten Werthe der x fortwährend stetig ist: so besteht jederzeit die Gleichung

$$F(a+h)=Fa+\frac{h}{n}\Big[F'a+F'\Big(a+\frac{h}{n}\Big)+F'\Big(a+\frac{2h}{n}\Big)+$$
$$+F'\Big(a+\frac{3h}{n}\Big)+\cdots+F'\Big(a+\frac{\overline{n-1}h}{n}\Big)\Big]+\Omega.$$

in welcher n eine beliebige wirkliche Zahl bedeutet, durch deren Vermehrung in das Unendliche die Zahl Ω in das Unendliche vermindert werden kann.

Beweis. Wenn die Function Fx die eben angegebene Beschaffenheit hat: so gibt es nach dem vorigen §. eine Zahl e klein genug, um behaupten zu können, daß der Zuwachs Δx nie kleiner als e genommen zu werden braucht, damit der Unterschied $\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}-F'x$ nach seinem absoluten Werthe kleiner als der gegebene Bruch $\frac{1}{N}$ ausfalle, so oft nur x und $x+\Delta x$ nicht außerhalb der Grenzen a und $a+h$ liegen. Gewiß aber gibt es auch eine Zahl n groß genug, daß der Quotient $\frac{h}{n}$ nach seinem absoluten Werthe $\overline{\overline{<}}\, e$ wird. Es werden sonach, wenn wir zur Abkürzung $\frac{h}{n}=\omega$ schreiben, nachstehende Verhältnisse obwalten:

$$\frac{F(a+\omega)-Fa}{\omega}-F'a<\frac{1}{N}$$
$$\frac{F(a+2\omega)-F(a+\omega)}{\omega}-F'(a+\omega)<\frac{1}{N}$$
$$\frac{F(a+3\omega)-F(a+2\omega)}{\omega}-F'(a+2\omega)<\frac{1}{N}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{F(a+n\omega)-F(a+\overline{n-1}\,\omega)}{\omega}-F'(a+\overline{n-1}\,\omega)<\frac{1}{N},$$

worin es uns erlaubt seyn wird, die Vorderglieder alle nach ihrem wirklichen nicht bloß absoluten Werthe zu nehmen; indem wenn jener von diesem verschieden ist, er als ein negativer das Verhältniß um so gewisser erfüllt. Unter dieser Voraussetzung aber erhalten wir durch Addirung, wenn wir die Glieder, die sich als gleich und entgegengesetzt aufheben, weglassen und bemerken, daß die Anzahl dieser Verhältnisse n ist

$$\frac{F(a+n\omega)-Fa}{\omega}-\Big[F'a+F'(a+\omega)+F'(a+2\omega)+\cdots$$
$$\cdots+F'(a+\overline{n-1}\,\omega)\Big]<\frac{n}{N}.$$

denn wenn wir mit $\omega=\frac{h}{n}$ multipliziren und für $n\omega=h$ substituiren:

$$\Big[F(a+h)-Fa\Big]-\frac{h}{n}\Big[F'a+F'\Big(a+\frac{h}{n}\Big)+F'\Big(a+\frac{2h}{n}\Big)+\cdots$$
$$\cdots+F'\Big(a+\frac{n-1}{n}h\Big)\Big]<\frac{h}{N}.$$

In diesem Ausdrucke kann nun bey einerley a und h durch bloße Vermehrung von n auch die Zahl N in das Unendliche vergrößert werden, weil die Vermehrung von n das Δx und folglich auch den Bruch $\frac{1}{N}$ in das Unendliche abnehmen läßt. Hieraus ergibt sich dann, daß

$$F(a+h)=Fa+\frac{h}{n}\Big[F'a+F'\Big(a+\frac{h}{n}\Big)+F'\Big(a+\frac{2h}{n}\Big)+\cdots$$
$$\cdots+F'\Big(a+\frac{n-1}{n}h\Big)\Big]+\Omega$$

seyn müsse.

Beyspiel. Da in diesem Lehrsatze weder ausdrücklich noch stillschweigend die Bedingung vorausgesetzt ist, daß die Function Fx zur Klasse derjenigen gehören müsse, welche nach einem für alle Werthe der Veränderlichen gleichlautenden Gesetze bestimmt werden: so lasset uns annehmen, daß für alle x, die <2 sind, $Fx=x^2$, für $x=2$ und alle größeren Werthe aber $Fx=x^3-8x+12$ sey. Ferner sey $a=1$ und $h=3$: so treffen hier alle Bedingungen zu, welche der Lehrsatz fordert. Die Function Fx hat eine abgeleitete für alle Werthe der x von $a=1$ bis $a+h=4$ einschließlich und nach beyden Richtungen: und diese abgeleitete selbst ist stetig. Für alle $x<2$ ist nämlich $F'x=2x$ bey einem positiven sowohl als negativen Δx; für $x>2$ ist $F'x=3x^2-8$ gleichfalls bey einem positiven sowohl als negativen Δx; für $x=2$ aber hat man für ein positives Δx

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x}=\frac{[(2+\Delta x)^3-8(2+\Delta x)+12]-[2^3-8.2+12]}{\Delta x}=4+6\Delta x+\Delta x^2.$$

Also ist die abgeleitete $=4$. Und eben so findet sich für ein negatives Δx
$$\frac{\Delta Fx}{-\Delta x}=\frac{(2-\Delta x)^2-[2^3-8.2+12]}{-\Delta x}=4-\Delta x,$$
also die abgeleitete abermahls $=4$. Da nun auch $2x$ und $3x^2-8$ für $x=2$ in den Werth 4 übergehen: so ist Fx offenbar stetig. Nehmen wir also $n=10$: so erhalten wir
$$44=1+\frac{3}{10}\left[\frac{2(10+13+16+19)}{10}+\right.$$
$$\left.+\frac{3(22^2+25^2+28^2+31^2+34^2+37^2)}{100}-6.8\right]+\Omega=39{\cdot}391+\Omega.$$

§. 29. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und $a+h$ gelegenen Werthe der x eine abgeleitete in beyden Richtungen, für $x=a$ aber wenigstens eine in derselben Richtung mit h, und für $x=a+h$ eine in der entgegengesetzten Richtung hat: wenn wir überdieß wissen, daß diese abgeleitete für alle soeben genannten Werthe der x dem Gesetze der Stetigkeit folgt: so gibt es jederzeit eine nicht außerhalb 0 und 1 gelegene Zahl μ oder (was eben soviel ist) eine nicht außerhalb a und $a+h$ liegende Zahl $a+\mu h$, bey welcher die Gleichung
$$F(a+h)=Fa+h\,.\,F'(a+\mu h)$$
zutrifft.

Beweis. Nach dem vorigen §. ist
$$F(a+h)=Fa+\frac{h}{n}\left[F'a+F'\left(a+\frac{h}{n}\right)+F'\left(a+\frac{2h}{n}\right)+F'\left(a+\frac{3h}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\cdots+F'\left(a+\frac{n-1}{n}h\right)\right]+\Omega,$$
worin Ω bloß durch Vermehrung von n in das Unendliche abnehmen kann.

1. Wenn nun (was nicht unmöglich ist) die Zahlen
$$F'a,\ F'\left(a+\frac{h}{n}\right),\ F'\left(a+\frac{2h}{n}\right),\ldots F'\left(a+\frac{n-1}{n}h\right)$$
alle einander gleich wären, und es bey jeder auch noch so großen Vermehrung der Zahl n blieben (etwa weil $F'x$ eigentlich gar nicht abhängig ist von x): so wäre die Wahrheit dessen, was unser Lehrsatz für diesen Fall voraussetzt, außer Zweifel. Denn hier wäre
$$F'a+F'\left(a+\frac{h}{n}\right)+F'\left(a+\frac{2h}{n}\right)+F'\left(a+\frac{3h}{n}\right)+\cdots$$
$$\cdots+F'\left(a+\frac{n-1}{n}h\right)=nF'a.$$

Also $F(a+h) = Fa + hF'a + \Omega$. Da nun in dieser Gleichung n gar nicht vorkommt: so ist zu schließen, daß $\Omega = 0$ seyn müsse: daher wir schlechtweg $F(a+h) = Fa + h \,.\, F'a$ setzen dürfen, was mit der Aussage unseres Lehrsatzes übereinstimmt, weil wir μ auch $= 0$ annehmen dürfen.

2. Wenn aber die Zahlen

$$F'a,\ F'\left(a+\frac{h}{n}\right),\ F'\left(a+\frac{2h}{n}\right), \ldots\ldots$$

ungleich sind: so muß es, weil die Function $F'x$ für alle nicht außerhalb a und $a+h$ gelegenen Werthe der x stetig seyn soll, nach §. 24 (I. Absch.) einen gleichfalls nicht außerhalb a und $a+h$ gelegenen Werth der $x = p$ geben, für welchen $F'x$ am Größten, und einen anderen $x = q$, für welchen $F'x$ am Kleinsten wird, in dem Sinne, daß es unter den sämmtlichen Werthen der $F'x$, von $F'a$ bis $F'(a+h)$ einschließlich keinen größeren als $F'p$ und keinen kleineren als $F'q$ gibt. Unter dieser Voraussetzung bestehet gewiß für jeden beliebigen Werth von n das doppelte Verhältniß

$$F'p > \frac{1}{n}\left[F'a + F'\left(a+\frac{h}{n}\right) + F'\left(a+\frac{2h}{n}\right) + F'\left(a+\frac{3h}{n}\right) + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + F'\left(a+\frac{n-1}{n}h\right)\right] > F'q.$$

Ist daher h positiv: so hat man (nach §.) durch Multiplication mit h und Addirung von Fa und Ω, wodurch das mittlere Glied dieses doppelten Verhältnisses in $F(a+h)$ übergehet,

$$Fa + h \,.\, F'p + \Omega > F(a+h) > Fa + h \,.\, F'q + \Omega.$$

Wenn aber h negativ: so hat man (§.)

$$Fa + h \,.\, F'p + \Omega < F(a+h) < Fa + h \,.\, F'q + \Omega.$$

Da jedoch Ω in das Unendliche abnehmen kann: so muß (nach §.) im ersten Falle auch

$$Fa + h \,.\, F'p > F(a+h) > Fa + h \,.\, F'q:$$

im zweyten Falle aber

$$Fa + h \,.\, F'p < F(a+h) < Fa + h \,.\, F'q$$

seyn. Also ist überhaupt

$$F'p > \frac{F(a+h) - Fa}{h} > F'q.$$

Hieraus aber folgt nach I. §. 29, es müsse irgend einen innerhalb p und q, folglich auch einen nicht außerhalb a und $a+h$ gelegenen Werth der x, der sich mithin recht füglich durch $a+\mu h$ darstellen läßt, geben, bey welchem die Gleichung

$$F'(a+\mu h)=\frac{F(a+h)-Fa}{h}$$

oder (was eben soviel ist) die Gleichung

$$Fa+h\,.\,F'(a+\mu h)=F(a+h)$$

eintritt.

Beyspiel. Nehmen wir, daß für alle Werthe von $x < 8$ $Fx = x^2$; für $x=8$ und alle größeren Werthe aber

$$Fx=2x^2-16x+64$$

sey; setzen wir ferner $a=6$, $h=4$; so trift die Bedingung des Lehrsatzes zu, daß Fx für alle Werthe der x von $a=6$ bis $a+h=10$ einschließlich eine abgeleitete in beyden Richtungen hat, die überdieß noch dem Gesetze der Stetigkeit folgt. Denn für alle Werthe von $x<8$ ist $F'x=2x$, für $x=8$ und alle größeren Werthe aber ist $F'x=4x-16$; wo denn für $x=8$ beyde Ausdrücke in einen und eben denselben Werth 16 übergehen. Es muß also irgend ein nicht außerhalb 0 und 1 liegender Werth für μ angeblich seyn, der die Gleichung $F(10)=F(6)+4\,.\,F'(6+4\mu)$ erfüllet. Und so ist es auch: denn da $F(10)=104$, $F(6)=36$; so soll $104=36+4F'(6+4\mu)$, $F'(6+4\mu)=17$ seyn. Nehmen wir nun $\mu<\frac{1}{2}$, so wäre $F'(6+4\mu)$ noch von der Form $2x$, und es ließe sich allerdings kein Werth für μ angeben, der $2(6+4\mu)=17$ machte. Nehmen wir aber $\mu \overline{>} \frac{1}{2}$ an: so muß $F'(6+4\mu)$ von der Form $4x-16$ seyn, und wir erhalten zur Bestimmung von μ die Gleichung $4(6+4\mu)-16=17$; welcher der Werth $\mu=\frac{9}{16}$ genüge thut.

§. 30. Zusatz. Wenn eine der beyden Bedingungen, entweder die, daß die Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x eine abgeleitete in beyden Richtungen und für den Wert $x=a$ wenigstens eine in derselben Richtung mit h, für $x=a+h$ aber eine in der entgegengesetzten Richtung hat, oder die andere, daß diese abgeleitete für alle genannten Werthe dem Gesetze der Stetigkeit gehorcht, wegfällt; so fällt auch die Nothwendigkeit der Aussage weg. Denn setzen wir z. B. für alle Werthe von $x<1$ und für $x=1$ selbst eine $Fx=x^2$, für alle größeren Werthe aber $Fx=4x-x^2+6$; so hätte Fx eine abgeleitete für jeden Werth von x, für alle, die <1, die doppelseitige $2x$, für alle die >1, die doppelseitige $4-2x$, für $x=1$ aber nur eine abgeleitete für ein negatives Δx, $=2$; diese abgeleitete selbst würde sich für alle Werthe von x nach dem Gesetze der Stetigkeit richten, weil für $x=1$ der Werth $2x$ mit dem $4-2x$ zusammenfällt: dennoch würde die Aussage des Lehrsatzes hier nicht Statt finden. Denn wenn wir z. B. $a=0$, $h=2$ nehmen; so gibt es keinen innerhalb 0 und 1 liegenden Werth für μ, der die Gleichung $F(2)=F(0)+2F'(2\mu)$ erfüllt. Da nämlich $F(2)=10$, $F(0)=0$ ist: so müßte $F'(2\mu)=5$ seyn. Nehmen wir nun $\mu \leqq \frac{1}{2}$, so ist $F'(2\mu)$ von der Form $2x$ und der größte Werth derselben $=2.1=2$. Nehmen wir aber $\mu > \frac{1}{2}$: so ist $F'(2\mu)$ von der Form $4-2x$, und der größte Werth $=4$. Also in keinem Falle $F'(2\mu)=5$. Eben so wesentlich ist die zweyte Bedingung, nämlich der Stetigkeit der $F'x$. Denn wenn wir z. B. für alle $x \leqq 8$, $Fx=x^2$, für alle größeren Werthe aber $Fx=2x^2-64$ nehmen: so hat Fx wohl für alle Werthe der x eine abgeleitete in beyden Richtungen: allein diese abgeleitete selbst ändert sich nicht nach dem Gesetze der Stetigkeit, weil sie für alle x von der Form $8-\omega$, $=16$, für alle x von der Form $8+\omega$, $=32$ ist. Würden wir nun $a=6$, $h=4$ annehmen: so fände sich in der That kein Werth für μ, der $F(10)=F(6)+4.F'(6+4\mu)$ machte. Denn es müßte $F'(6+4\mu)=25$ werden. Nehmen wir aber $\mu \leqq \frac{1}{2}$, so ist $F'(6+4\mu)$ von der Form $2x$, also der größte Werth $=16<25$; nehmen wir aber $\mu > \frac{1}{2}$, so ist $F'(6+4\mu)$ von der Form $4x$, also der kleinste Werth $32>25$.

§. 31. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und $a+h$ gelegenen Werthe der x eine abgeleitete in beyden Richtungen hat, die überdieß für die genannten Werthe der x das Gesetz der Stetigkeit befolgt: wenn ferner die Function Fx auch für die beyden Werthe $x=a$ und $=a+h$ Stetigkeit hat für den ersten wenigstens in demselben Sinn mit h, für den zweyten wenigstens im entgegengesetzten Sinne: so gilt auch für diesen Fall noch die Gleichung des vorigen Lehrsatzes:

$$F(a+h)=Fa+h.F'(a+\mu h).$$

Beweis. Es seyen α und $\alpha+i$ ein Paar innerhalb a und $a+h$ gelegene Zahlen: so hat Fx eine abgeleitete, und zwar in beyden Richtungen nicht nur für alle innerhalb α und $\alpha+i$ gelegenen Werthe der x, sondern auch noch für $x=\alpha$ und $x=\alpha+i$. Es muß also, weil sich der vorige Lehrsatz hier gewiß anwenden läßt, $F(\alpha+i)=F\alpha+i.F'(\alpha+\mu i)$ seyn und verbleiben, so nahe wir auch den Werth der α an a, den der i an h rücken; thun wir dieß nur immer so, daß α und $\alpha+i$ innerhalb a und $a+h$ liegen. Wenn wir den Unterschied $\alpha-a$ nach seinem absoluten Werthe in das Unendliche abnehmen lassen; so muß, weil die gegebene Function Fx für den Werth $x = a$ und hinsichtlich auf einen Zuwachs von demselben Vorzeichen mit h, stetig seyn soll, auch der Unterschied $Fa - Fa$ nach seinem absoluten Werthe in das Unendliche abnehmen. Dasselbe muß auch von dem Unterschiede $F'(a + \mu i) - F'(a + \mu i)$ gelten. Wir dürfen also auch $F(a + i) = Fa + i \,.\, F'(a + \mu i) + \Omega$ schreiben. Soll der Werth $a + i$ innerhalb a und $a + h$ liegen, wie wir vorausgesetzt haben; so muß i seinem absoluten Werthe nach $< h$ seyn. Mithin kann jede Zahl, die sich durch $a + \mu i$ vorstellen läßt, um so gewisser durch $a + \mu h$ vorgestellt werden, wenn μ nichts anderes als eine gewisse nicht außerhalb 0 und 1 liegende Zahl bedeuten soll. Wir können also statt $F'(a + \mu i)$ ohne unsere Gleichung zu stören, auch $F'(a + \mu h)$ setzen und erhalten hiedurch $F(a + i) = Fa + i \,.\, F'(a + \mu h) + \Omega$. Weil aber Fx auch für den Werth $x = a + h$ stetig seyn soll, und zwar hinsichtlich auf einen Zuwachs von entgegengesetztem Vorzeichen mit h: so muß, wenn wir die Zahl i dem Werthe h in das Unendliche nahe rücken, auch der Unterschied

$$F(a + h) - F(a + i)$$

nach seinem absoluten Werthe in das Unendliche abnehmen. Es muß also auch $F(a + h) = Fa + i \,.\, F'(a + \mu h) + \Omega_1$ seyn.

Da endlich bey der unendlichen Annäherung von i an h auch der Werth von $i \,.\, F'(a + \mu h)$ dem Werthe $h \,.\, F'(a + \mu h)$ in das Unendliche nähert: so dürfen wir gewiß auch

$$F(a + h) = Fa + h \,.\, F'(a + \mu h) + \Omega_2$$

schreiben. Bestimmen wir endlich, wie es erlaubt seyn muß, den Werth der Zahl μ auf die Art, daß der Werth des Ausdrucks $Fa + h \,.\, F'(a + \mu h)$ dem Werthe $F(a + h)$ so nahe tritt, als es nur immer möglich ist, durch die Annahme eines Werthes für μ, welcher nicht außerhalb der Grenzen 0 und 1 liegt: so sind die sämmtlichen Ausdrücke $F(a + h)$, Fa und $h \,.\, F'(a + \mu h)$ durchaus ganz unabhängig von i: und somit muß auch Ω, da

$$\Omega = F(a + h) - Fa - h \,.\, F'(a + \mu h)$$

ist, einen von dem i ganz unabhängigen Werth haben. Da aber Ω auf jeden Fall nur einen Werth von solcher Art haben kann, der bey der unendlichen Annäherung des i an h kleiner als jede gegebene Zahl wird: so folgt, daß dieser Werth hier kein anderer seyn könne, als Null. Demnach ist

$$F(a + h) = Fa + h \,.\, F'(a + \mu h).$$

Beyspiel. Wäre $Fx = y$ eine solche Function von x, daß wir (wie in §. 13. 2) die Gleichung $y^2 = 1 - x^2$ hätten: so wäre

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x + \Delta x}{2y + \Delta y},$$

welches so oft nur y nicht eben Null ist, dem Werthe $-\frac{x}{y}$ in das Unendliche nahet, den wir somit als die abgeleitete von Fx ansehen können. Für $x = 1$ aber ist $y = 0$ und $-\frac{2x + \Delta x}{2y + \Delta y}$ wächst ins Unendliche. Für diesen Werth also hat Fx keine abgeleitete. Gleichwohl wird sich die Formel

$$F(a + h) = Fa + h \,.\, F'(a + \mu h)$$

auch auf diesen Fall anwenden lassen, wenn wir z. B. $a = \frac{3}{5}$ und $h = \frac{2}{5}$ also $a + h = 1$ annehmen. Hier nämlich wird

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25},$$

also $Fa = y = \frac{4}{5}$ und $F(a + h) = F(1) = 0$ seyn. Es ist also hinreichend, wenn ein Werth für μ angeblich ist, der

$$F'(a + \mu h) = -\frac{Fa}{h} = -\tfrac{4}{5} : \tfrac{2}{5} = -\tfrac{4}{2} = -2$$

oder was eben so viel ist $(F'(a + \mu h))^2 = 4$ d. i.

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{\left(\frac{3}{5} + \frac{2\mu}{5}\right)^2}{1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{2\mu}{5}\right)^2} = 4 \quad \text{oder} \quad \frac{9 + 12\mu + 4\mu^2}{16 - 12\mu - 4\mu^2} = 4$$

macht, welches abermahls möglich. Denn für $\mu = 0$ wird

$$\frac{9 + 12\mu + 4\mu^2}{16 - 12\mu - 4\mu^2} < 4,$$

für $\mu = 1$ aber unendlich groß. Also gibt es gewiß einen innerhalb 0 und 1 liegenden Werth für μ, der der obigen Gleichung Genüge thut.

§. 32. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und $a + h$ gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen in beyden Richtungen, für $x = a$ aber wenigstens in demselben Sinne mit h, und für $x = a + h$ in der entgegengesetzten Richtung stetig ist; wenn ferner — höchstens mit Ausnahme gewisser vereinzelter Werthe der x, deren Menge übrigens auch wohl unendlich seyn mag, wenn es zu jedem derselben nur einen ihm nächsten gibt, — die Function Fx auch nur abgeleitete $F'x$ in beyden

Richtungen hat, die innerhalb je zwey so eben erwähnter Werthe von x abermahls stetig ist: so behaupte ich, daß man die Gleichung

$$F(a+h) = Fa + h \, . \, M$$

ansetzen könne, wenn man sich unter M eine gewisse Zahl vorstellt, die zwischen dem größten und kleinsten der Werthe liegt, welche die abgeleitete $F'x$ innerhalb a und $a+h$ annimmt.

Beweis. Bezeichnen wir diejenigen Werthe der x, für welche die abgeleitete $F'x$ entweder gar nicht vorhanden ist, oder doch das Gesetz der Stetigkeit verletzet, in der Ordnung vom kleineren zum größeren oder umgekehrt durch $a+h_1$; $a+h_1+h_2$; $a+h_1+h_2+h_3$; u. s. w., so müssen wir zwar voraussetzen, daß die Menge der Glieder in dieser Reihe auch selbst unendlich seyn könne; aber wir wissen doch, daß für alle Werthe der x, die zwischen je zwey unmittelbar aufeinander folgenden Gliedern der Reihe liegen, eine abgeleitete $F'x$ in beyden Richtungen nicht nur vorhanden, sondern auch stetig sey. Hieraus ergeben sich nach dem vorigen §. nachstehende Gleichungen, deren Menge allenfalls unendlich seyn kann:

$$F(a+h_1) = Fa + h_1 \, . \, F'(a+\mu_1 h_1)$$
$$F(a+h_1+h_2) = F(a+h_1) + h_2 \, . \, F'(a+h_1+\mu_2 h_2)$$
$$F(a+h_1+h_2+h_3) = F(a+h_1+h_2) + h_3 \, . \, F'(a+h_1+h_2+\mu_3 h_3)$$

u. s. w. Die r-te dieser Gleichungen lautet

$$F(a+h_1+h_2+h_3+\cdots+h_r) =$$
$$= F(a+h_1+h_2+\cdots+h_{r-1}) + h_r \, . \, F'(a+h_1+h_2+\cdots+\mu_r h_r)$$

und die Addirung aller r Gleichungen gibt, wenn wir die gleichen Glieder auf beyden Seiten weglassen,

$$F(a+h_1+h_2+h_3+\cdots+h_r) =$$
$$= Fa + h_1 \, . \, F'(a+\mu_1 h_1) + h_2 \, . \, F'(a+h_1+\mu_2 h_2) +$$
$$+ h_3 \, . \, F'(a+h_1+h_2+\mu_3 h_3) + \cdots + h_r \, . \, F'(a+h_1+\cdots+h_{r-1}+\mu_r h_r)$$

Weil aber die Zahlen h_1, h_2, h_3, ... h_r alle von einerley Vorzeichen sind: so wissen wir (aus §.), daß die Summe der Producte, die hinter Fa stehen, gleichgesetzt werden können einem einzigen Producte, dessen ein Factor die Summe $(h_1+h_2+h_3+\cdots+h_r)$, der andere irgend ein zwischen dem größten und kleinsten Werthe der $F'(a+\mu_1 h_1)$; $F(a+h_1+\mu_2 h_2)$; ... u. s. w. liegender mittlerer Werth ist. Dieser mittlere Werth ist auch ein mittlerer zu den sämmtlichen Werthen, die $F'x$ von $x=a$ bis $x=a+h$

annimmt: also dasjenige, was wir im Lehrsatze durch M bezeichnet haben. Wir dürfen sonach die Gleichung

$$F(a+h_1+h_2+h_3+\cdots+h_r)=Fa+(h_1+h_2+h_3+\cdots+h_r)M$$

schreiben. Bey der unendlichen Vermehrung von r übergehet aber die Summe $h_1+h_2+h_3+\cdots+h_r$ in den Werth h. Demnach ist

$$F(a+h)=Fa+h\,.\,M.$$

Beyspiel. Setzen wir, daß zu nachstehenden Werthen von x nachstehende von Fx gehören:

x	Fx
von 0 bis 1	x
„ 1 „ 2	$2x-1$
„ 2 „ 3	$4x-5$
„ 3 „ 4	$8x-17$
„ 4 „ 5	$16x-49$

u. s. w.,

so ist die Function Fx von $a=0$ bis $a+h=5$ stetig und erfüllt alle Bedingungen, welche der Lehrsatz fordert. Die sämmtlichen Werthe aber, welche die abgeleitete $F'x$ innerhalb a und $a+h$ annimmt, sind 1, 2, 4, 8, 16; der kleinste Werth also ist 1, der größte 16; und somit muß es einen zwischen 1 und 16 liegenden Werth für M geben, welcher die Gleichung $F(a+h)=Fa+h\,.\,M$ erfüllt, wie dem auch wirklich ist, da $F(a+h)=31$ und $Fa=0$, h aber $=5$, also $M=\frac{31}{5}=6\frac{1}{5}$ ist.

§. 33. Lehrsatz. Wenn eine Function zweyer Veränderlichen $F(x,y)$ von einer solchen Beschaffenheit ist, daß sie bey jedem innerhalb a und b liegenden Werthe der einen Veränderlichen x bloß durch Verminderung der anderen y, nach ihrem absoluten Werthe kleiner als jeder gegebene Bruch wird und verbleibt, wenn man dann y immer noch mehr vermindert; und diese Function hat in Beziehung auf x (d. h. wenn x allein als die Veränderliche betrachtet wird) eine abgeleitete für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth der x in beyden Richtungen: so behaupte ich, daß auch diese abgeleitete $\frac{dF(x,y)}{dx}$ die nur so eben beschriebene Beschaffenheit, für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth der x durch bloße unendliche Abnahme von y in das Unendliche vermindert zu werden, besitze.

Beweis. *1.* Daß es zuvörderst Functionen von der Art, wie sie hier angenommen werden, gebe, zeigt uns das Beyspiel der Reihe

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^r,$$

deren Werth $= \frac{x^{r+1}}{1-x}$ wohl füglich als eine Function von x und r oder auch von x und $\frac{1}{r} = y$ betrachtet werden kann. So oft nun x innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ liegt: so wissen wir, daß der Werth dieser Reihe bloß durch Vermehrung von r, oder was eben soviel heißt, bloß durch Verminderung von y kleiner als jeder gegebene Bruch $\frac{1}{N}$ werde und verbleibe, wenn wir dann r noch immer größer d. h. y noch immer kleiner machen.

2. Ist nun x irgend ein innerhalb a und b gelegener Werth: so muß die Gleichung

$$\frac{F(x+\omega, y) - F(x, y)}{\omega} = \frac{dF(x, y)}{dx} + \Omega$$

bestehen, worin bey einerley x und y, Ω mit ω in das Unendliche abnimmt; jedoch nur so, daß bey einem geänderten Werthe von x oder y vielleicht ein anderes und immer kleineres ω nöthig seyn könnte, um $\Omega < \frac{1}{N}$ zu machen. Obgleich also bey einerley ω d. h. bey einerley Nenner des Bruches

$$\frac{F(x+\omega, y) - F(x, y)}{\omega}$$

der Zähler, und somit auch der ganze Werth des Bruches bloß durch Verminderung von y so klein werden kann, als man nur will: so dürfen wir hieraus doch nur schließen, daß die algebraische Summe $\frac{dF(x, y)}{dx} + \Omega$ in das Unendliche abnehme: nicht aber, daß auch das Glied $\frac{dF(x, y)}{dx}$ für sich allein in das Unendliche abnimmt: indem ja seyn könnte, daß durch Verminderung von y, Ω wächst und bey verschiedenen Vorzeichen beyder Zahlen $\frac{dF(x, y)}{dx}$ und Ω nur ihre Differenz in das Unendliche abnimmt. — Allein nach §. muß es ein ω klein genug geben, um behaupten zu können, daß die Function $\frac{dF(x, y)}{dx}$ für alle Werthe von x bis $x+\omega$ dem Gesetze der Stetigkeit gehorche.

Daraus folgt aber nach §. 29., es müsse eine nicht außerhalb Null und 1 gelegene Zahl μ geben, welche die Gleichung

$$F(x+\omega, y) = F(x, y) + \omega \cdot \frac{dF(x+\mu\omega, y)}{dx}$$

oder
$$\frac{F(x+\omega, y) - F(x, y)}{\omega} = \frac{dF(x+\mu\omega, y)}{dx}$$

hervorbringt.

In dieser Gleichung mag nun der Werth von μ immerhin von der Zahl y abhängig seyn: so lehrt sie uns doch, daß der Werth von $\frac{dF(x+\mu\omega, y)}{dx}$ bey einerley x und ω bloß durch Verminderung von y in das Unendliche abnehmen könne, weil auch $F(x, y)$ und $F(x+\omega, y)$ also der Zähler des Bruches $\frac{F(x+\omega, y) - F(x, y)}{\omega}$ bey ungeändertem Nenner, und somit der Werth des ganzen Bruches selbst bloß durch Verminderung von y in das Unendliche abnehmen kann. Da aber bey jedem Werthe von y oder μ wegen

$$\frac{dF(x+\mu\omega, y)}{dx} = \frac{dF(x, y)}{dx} + \Omega$$

seyn muß, weil widrigenfalls diese Function sich nicht nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern würde: so muß auch von $\frac{dF(x, y)}{dx}$ gelten, daß es durch bloße Verminderung von y in das Unendliche vermindert werden könne.

§. 34. Zusatz. *1.* Auch wenn die Function $F(x, y)$ nicht durch Verminderung, wohl aber durch unbegrenzte Vermehrung von y in das Unendliche vermindert werden kann, muß ihre abgeleitete in Hinsicht auf x d. h. die Function $\frac{dF(x, y)}{dx}$ diese Beschaffenheit mit ihr gemein haben. Denn wenn y in das Unendliche wächst, so ist dagegen $\frac{1}{y}$ eine Zahl, die ins Unendliche abnimmt: und $F(x, y)$ ist eine Function von x und $\frac{1}{y}$, auf die sich der Lehrsatz anwenden läßt.

§. 35. Zusatz. 2. Wenn also eine Gleichung von der Form $F(x, y) = \Phi(x, y) + \Omega$ für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x bestehet, in welcher durch bloße Verminderung oder Vermehrung von y in das Unendliche der Werth von Ω in das Unendliche vermindert werden kann: und beyde Functionen $F(x, y)$ sowohl als $\Phi(x, y)$ haben in Hinsicht auf alle innerhalb a und b

gelegenen Werthe der x eine abgeleitete in beyden Richtungen: so bestehet innerhalb eben dieser Grenzen für x auch die Gleichung:

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{d\Phi(x, y)}{dx} + \Omega.$$

so zwar, daß durch bloße Verminderung oder Vermehrung von y in das Unendliche der Werth von Ω in das Unendliche vermindert werden kann. Denn dieser Voraussetzung nach stellt $F(x, y) - \Phi(x, y)$ eine Function von x und y vor, von welcher Alles gilt, was in unserem Lehrsatze zur Bedingung gemacht wird. Daher muß auch die abgeleitete von dieser Function in Hinsicht auf x d. h.

$$\frac{dF(x, y)}{dx} - \frac{d\Phi(x, y)}{dx} = \Omega \quad \text{seyn.}$$

§. 36. Lehrsatz. Jede Function von der Form ax^n, worin a eine beliebige von x ganz unabhängige meßbare Zahl, n aber eine wirkliche Zahl bezeichnet: hat für jeden meßbaren Werth ihrer Veränderlichen x eine abgeleitete von der Form nax^{n-1}.

Beweis. Ist $n = 1$, so hat man, wie wir schon wissen $\frac{\Delta ax}{\Delta x} = a$: also ist a selbst die verlangte abgeleitete: welches auch mit der Formel nax^{n-1} übereinstimmt. Ist aber $n > 1$: so haben wir

$$\frac{\Delta ax^n}{\Delta x} = \frac{a(x + \Delta x)^n - ax^n}{\Delta x}.$$

welches (nach §.) zwischen den Grenzen nax^{n-1} und $na(x + \Delta x)^{n-1}$ liegt. Da aber der Werth von $na(n + \Delta x)^{n-1}$ dem Werthe nax^{n-1} in das Unendliche nahet, wenn Δx in das Unendliche abnimmt (§.), so ist kein Zweifel, daß nax^{n-1} die verlangte abgeleitete sey.

§. 37. Lehrsatz. Jede algebraische Summe zweyer Functionen Fx und Φx einer und eben derselben Veränderlichen x, die beyde für den nämlichen Werth dieser Veränderlichen, und beyde hinsichtlich auf einen positiven oder beyde hinsichtlich auf einen negativen Zuwachs derselben eine abgeleitete haben, hat auch selbst eine abgeleitete für diesen Werth der Veränderlichen und hinsichtlich auf eben diesen (positiven oder negativen) Zuwachs derselben: und zwar ist diese abgeleitete die Summe der abgeleiteten von beyden Addenden nämlich $F'x$ und $\Phi'x$.

Beweis. Setzen wir $Fx + \Phi x = W$: so ist

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\Delta Fx}{\Delta x} + \frac{\Delta \Phi x}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - Fx}{\Delta x} + \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi x}{\Delta x}.$$

Hat nun die Fx eine abgeleitete für den soeben angenommenen Werth von x, und bey demjenigen Vorzeichen, das Δx hat: so ist

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}=F'x+\Omega_1:$$

und unter ähnlicher Voraussetzung für Φx, auch

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi x}{\Delta x}=\Phi'x+\Omega_2.$$

Daher denn auch

$$\frac{\Delta W}{\Delta x}=F'x+\Omega_1+\Phi'x+\Omega_2=F'x+\Phi'x+\Omega_3:$$

woraus erhellet, daß $F'x+\Phi'x$ die verlangte abgeleitete von $W=Fx+\Phi x$ sey."

§. 38. Zusatz. Man sieht von selbst, daß diese Schlüsse auf eine jede beliebige selbst unendliche Menge von Summanden ausgedehnt werden können und es ist also die abgeleitete von

$$Fx+\Phi x+\Psi x+\cdots\textit{ in inf.}=F'x+\Phi'x+\Psi'x+\cdots\textit{ in inf.}$$

§. 39. Lehrsatz. Ein Product aFx aus zwey Factoren a und Fx, deren der Eine a eine von x ganz unabhängige meßbare Zahl, der andere eine beliebige Function von x ist, welche für den so eben zu Grunde gelegten Werth von x und in Beziehung auf einen positiven oder negativen Zuwachs eine abgeleitete hat, hat auch selbst eine abgeleitete für eben diesen Werth von x und hinsichtlich auf denselben (positiven oder negativen) Zuwachs; und zwar ist diese abgeleitete $a.F'x$, ein Product aus dem beständigen Factor a in die abgeleitete des anderen.

Beweis. Schreiben wir $a.Fx=W$: so ist

$$\frac{\Delta W}{\Delta x}=\frac{a.F(x+\Delta x)-a.Fx}{\Delta x}.$$

Ist also der hier angenommene Werth von x derselbe, für welchen Fx eine abgeleitete hat, und nehmen wir bey Δx dasselbe Vorzeichen an, für welches die Fx eine abgeleitete hat: so ist

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}=F'x+\Omega.$$

Daher

$$\frac{\Delta W}{\Delta x}=a(F'x+\Omega)=a.F'x+\Omega_1.$$

Also ist $a.F'x$ die abgeleitete von W oder $a.Fx$.

§. 40. Zusatz. Auf ähnliche Art ist auch die abgeleitete eines Quotienten $\frac{Fx}{a}$, dessen Divisor eine von Null verschiedene meßbare Zahl ist $=\frac{F'x}{a}\cdot$ Denn das vorige a kann unter der nur eben gemachten Voraussetzung auch den Factor $\frac{1}{a}$ bedeuten.

§. 41. Lehrsatz. Auch ein Product aus zwey veränderlichen Factoren $Fx\,.\,\Phi x$, deren jeder eine abgeleitete hat für einen und eben denselben Werth von x, und hinsichtlich auf denselben positiven oder negativen Zuwachs, hat gleichfalls selbst eine abgeleitete in eben derselben Beziehung, und zwar ist diese abgeleitete $Fx\,.\,\Phi'x+F'x\,.\,\Phi x$ d. h. wir erhalten sie, wenn wir jeden Factor mit der abgeleiteten des anderen multipliziren, und diese Producte addiren.

Beweis. Schreiben wir $Fx\,.\,\Phi x=W$; so ist

$$\frac{\Delta W}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)\,.\,\Phi(x+\Delta x)-Fx\,.\,\Phi x}{\Delta x}.$$

Hat aber Fx eine abgeleitete $=F'x$ und Φx eine abgeleitete $=\Phi'x$: so ist

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}=F'x+\Omega_1 \text{ und } \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi x}{\Delta x}=\Phi'x+\Omega_2;$$

daher

$$F(x+\Delta x)=Fx+\Delta x\,.\,F'x+\Delta x\,.\,\Omega_1$$

und

$$\Phi(x+\Delta x)=\Phi x+\Delta x\,.\,\Phi'x+\Delta x\,.\,\Omega_2.$$

Durch Substitution findet sich also

$$\frac{\Delta W}{\Delta x}=\frac{(Fx+\Delta x\,.\,F'x+\Delta x\,.\,\Omega_1)\;(\Phi x+\Delta x\,.\,\Phi'x+\Delta x\,.\,\Omega_2)-Fx\,.\,\Phi x}{\Delta x}$$
$$=F'x\,.\,\Phi x+Fx\,.\,\Phi'x+Fx\,.\,\Omega_2+\Phi x\,.\,\Omega_1+$$
$$+\Delta x\,[F'x\,.\,\Phi'x+F'x\,.\,\Omega_2+\Phi'x\,.\,\Omega_1+\Omega_1\Omega_2].$$

Da nun die Glieder, die Ω_1, Ω_2 und Δx als Factoren enthalten, in das Unendliche abnehmen, wenn Δx in das Unendliche abnimmt: so erhellet, daß

$$\frac{\Delta W}{\Delta x}=Fx\,.\,\Phi'x+F'x\,.\,\Phi x+\Omega_3$$

und somit $Fx\,.\,\Phi'x+F'x\,.\,\Phi x$ die verlangte abgeleitete von W oder $Fx\,.\,\Phi x$ sey.

§. 42. Zusatz. Also muß auch ein Product aus 3, 4, ... und jeder beliebigen nur immer endlichen Menge von veränderlichen Factoren eine abgeleitete haben für einen gewissen Werth der Veränderlichen und hinsichtlich auf einen gewissen positiven oder negativen Zuwachs, wenn alle diese Factoren ihre abgeleitete in eben dieser Richtung haben. So ist z. B. die abgeleitete eines Productes aus drey Factoren

$Fx \,.\, \Phi x \,.\, \Psi x = F'x \,.\, \Phi x \,.\, \Psi x + Fx \,.\, \Phi'x \,.\, \Psi x + Fx \,.\, \Phi x \,.\, \Psi'x$. U. s. w.

§. 43. Lehrsatz. Eine Function $\frac{Fx}{\Phi x}$, welche ein Quotient zweyer anderer Fx und Φx ist, hat eine abgeleitete für jeden Werth von x und hinsichtlich auf jeden positiven oder negativen Zuwachs, wenn in dieser Beziehung auch beyde Functionen ihre abgeleitete haben, und der Werth Φx überdieß nicht Null ist: und zwar ist diese abgeleitete $= \frac{F'x \,.\, \Phi x - Fx \,.\, \Phi'x}{(\Phi x)^2}$ d. h. wir erhalten sie, wenn wir die abgeleitete des Zählers mit dem Nenner und die abgeleitete des Nenners mit dem Zähler multipliciren, beyde Producte von einander abziehen und durch das Quadrat des Nenners dividiren.

Beweis. Schreiben wir $\frac{Fx}{\Phi x} = W$: so ist

$$\Delta W = \frac{F(x+\Delta x)}{\Phi(x+\Delta x)} - \frac{Fx}{\Phi x} = \frac{F(x+\Delta x) \,.\, \Phi x - \Phi(x+\Delta x) \,.\, Fx}{\Phi(x+\Delta x) \,.\, \Phi x}.$$

Also $$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) \,.\, \Phi x - \Phi(x+\Delta x) \,.\, Fx}{\Delta x \,.\, \Phi(x+\Delta x) \,.\, \Phi x}.$$

Setzen wir hier statt

$$F(x+\Delta x) = Fx + \Delta x \,.\, F'x + \Delta x \,.\, \Omega_1,$$

statt $$\Phi(x+\Delta x) = \Phi x + \Delta x \,.\, \Phi'x + \Delta x \,.\, \Omega_2;$$

und heben im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor Δx auf, und bemerken, daß die Glieder, welche Ω_1, Ω_2 oder Δx als Factoren enthalten, in das Unendliche abnehmen: so findet sich, so oft nur Φx nicht eben Null ist,

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{F'x \,.\, \Phi x - Fx \,.\, \Phi'x}{(\Phi x)^2} + \Omega.$$ Also ist $\frac{F'x \,.\, \Phi x - Fx \,.\, \Phi'x}{(\Phi x)^2}$ die verlangte abgeleitete des Quotienten $\frac{Fx}{\Phi x}$.

§. 44. Lehrsatz. Jede ganze oder gebrochene rationale Function ist für alle Werthe ihrer Veränderlichen, die letztere nur mit Ausnahme solcher, dadurch ihr Nenner zu Null wird, stetig im zweyten Grade, und ihre abgeleitete ist abermahls nur eine ganze oder gebrochene rationale Function, die wir nach Anweisung der in dem vorhergehenden Lehrsatze enthaltenen Andeutung finden können.

Beweis. *1.* Jede ganze rationale Function ist unter der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots + lx^m$$

enthalten; und somit ist nach Ausweis der §. 36. und 38. ihre abgeleitete für jeden beliebigen meßbaren Werth von x

$$b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \cdots + mlx^{m-1}.$$

welches offenbar abermahls eine ganze rationale Function ist.

2. Jede gebrochene rationale Function unterstehet der Form

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + lx^m}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots + \lambda x^\mu}:$$

ihre abgeleitete also für jeden Werth von x, der nur den Nenner

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots + \lambda x^\mu$$

nicht zu Null macht, ist nach §. 43

$$\frac{(b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + mlx^{m-1})(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots + \lambda x^\mu)}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots + \lambda x^\mu)^2} -$$

$$- \frac{(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \cdots + \mu\lambda x^{\mu-1})(a + bx + cx^2 + \cdots + lx^m)}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots + \lambda x^\mu)^2}.$$

welches abermahls eine rationale Function ist.

Beyspiel. *1.* Die erste abgeleitete Function von $8x^4 + 3x^3 - 5x$ ist also $32x^3 + 9x^2 - 5$; die zweyte oder die abgeleitete von dieser ist $96x^2 + 18x$; die dritte oder die abgeleitete von der nun eben gefundenen $192x + 18$; die vierte 192; alle folgenden $= 0$.

2. Die abgeleitete des Products $(x^3 + a)(3x^2 + b)$ ist nach §. 41

$$3x^2(3x^2 + b) + (x^3 + a)\, 6x.$$

3. Die abgeleitete der Function $\frac{1 - 2x^2}{1 + 3x - 5x^2}$ für jeden Werth von x, der nur den Nenner $1 + 3x - 5x^2$ nicht zu Null macht, ist nach §. 43

$$\frac{-4x(1 + 3x - 5x^2) - (1 - 2x^2)(3 - 10x)}{(1 + 3x - 5x^2)^2} = -3\,\frac{1 - 2x + 2x^2}{(1 + 3x - 5x)^2}.$$

U. s. w.

§. 45. Zusatz *1.* Jede ganze rationale Function vom n-ten Grade hat eine abgeleitete, die eine ganze rationale Function vom Grade $(n-1)$ ist. Die zweyte abgeleitete ist somit nur vom Grade $(n-2)$; die $(n-1)$-te vom ersten Grade, die n-te schon keine veränderliche sondern bloß beständige Zahl (zuweilen auch die Null); die $(n+1)$-te und alle folgenden sind immer und durchgängig Null.

§. 46. Zusatz 2. Nicht also ist es mit den gebrochenen rationalen Functionen, bey welchen die Menge ihrer abgeleiteten in das Unendliche gehen kann. So hat die Function $\frac{1}{x}$ zur ersten abgeleiteten $-\frac{1}{x^2}$, zur zweyten $+\frac{2}{x^3}$, zur dritten $-\frac{2.3}{x^4}$, zur vierten $+\frac{2.3.4}{x^5}$, u. s. w.: woraus man bald die allgemeine Form ersieht, nämlich die n-te abgeleitete ist $\pm\frac{2.3\ldots.n}{x^{n+1}}$, wobey das Zeichen $+$ für ein gerades, das Zeichen $-$ für ein ungerades n gilt.

§. 47. Lehrsatz. Wenn eine Function Fy für den bestimmten Werth ihrer Veränderlichen, den wir soeben durch y bezeichnen, eine abgeleitete hat, entweder nur hinsichtlich auf einen positiven oder nur hinsichtlich auf einen negativen Zuwachs oder in beyden Hinsichten zugleich: und wir betrachten nun diese Veränderliche y selbst als Function einer anderen frey veränderlichen Zahl x, wobey sich findet, daß diese Function $y=fx$ für den bestimmten Werth von x, der $fx=y$ macht, auch eine abgeleitete hat, und dieß zwar wenigstens hinsichtlich auf einen solchen Zuwachs von x, dabey das zugehörige Δy dasselbe Vorzeichen erhält, in Betreff dessen auch Fy ihre abgeleitete hat: so behaupte ich, daß die Function von x, $F(fx)$, welche zum Vorschein kommt, wenn wir in der Fy an die Stelle des y die fx setzen, gleichfalls eine abgeleitete habe für jeden Werth von x, der $fx=y$ macht, und hinsichtlich auf dieselbe positive oder negative Natur des Zuwachses, die schon erwähnt worden ist; und diese abgeleitete ist $=F'(fx)\,.\,f'x$; d. h. wir erhalten die abgeleitete einer Function von der Veränderlichen y, die wir selbst noch als eine Function von x betrachten, wenn wir die abgeleitete der ersteren in Hinsicht auf das y noch durch die abgeleitete des y selbst in Hinsicht auf x multiplicieren.

Beweis. Weil Fy eine abgeleitete in Hinsicht auf y hat, so muß wenigstens bey einem gewissen Vorzeichen von Δy,

$$\frac{F(y+\Delta y)-Fy}{\Delta y}=F'y+\Omega_1$$

seyn. Setzen wir $y=fx$, so ist

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x), \text{ und } \Delta y=f(x+\Delta x)-fx;$$

also

$$\frac{F[f(x+\Delta x)]-F(fx)}{f(x+\Delta x)-fx}=F'(fx)+\Omega_1$$

und

$$F[f(x+\Delta x)]-F(fx)=[f(x+\Delta x)-fx]\,[F'(fx)+\Omega_1].$$

Wenn nun auch fx eine abgeleite hat, und zwar bey demselben Vorzeichen von Δx, das eben nothwendig ist, um das oben vorkommende Δy hervorzubringen: so haben wir

$$\frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}=f'x+\Omega_2.$$

Dieß gibt durch Substitution

$$\frac{F[f(x+\Delta x)]-F(fx)}{\Delta x}=(f'x+\Omega_2)\,[F'(fx)+\Omega_1]=F'(fx)\,.\,f'x+\Omega_3.$$

woraus erhellet, daß $F'(fx)\,.\,f'x$ die abgeleitete von $F(fx)$ sey.

Beyspiel. Die abgeleitete der Function

$$(a+bx+cx^2+\cdots\cdot+lx^m)^n$$

wäre sonach, wenn wir $a+bx+cx^2+\cdots\cdot+lx^m$ als y betrachten.

$$n(a+bx+cx^2+\cdots\cdot+lx^m)^{n-1}\,(b+2cx+\cdots\cdot+mlx^{m-1}):$$

z. B. die abgeleitete von

$(4x^2+5x^4)^3$ gleich $3(4x^2+5x^4)^2\,(8x+20x^3)$ u. s. w.

§. 48. Anmerkung. Daß die im Lehrsatze gemachte Beschränkung, betreffend die positive oder negative Natur des Zuwachses, für welchen die abgeleitete von Fy und fx Statt finden, nicht überflüssig sey, obgleich man sie insgemein wegläßt, ist leicht durch Beyspiele zu zeigen. Nehmen wir, daß Fy für einen bestimmten Werth von y nur eine abgeleitete habe hinsichtlich auf ein negatives Δy, wenn $Fy=(1-y)^{\frac{5}{2}}$ wäre, für $y=1$: setzen wir ferner, daß y ein solcher Werth von x, fx sey, welcher bey demjenigen Werthe von x, der $fx=y$ macht, nur eine abgeleitete für ein positives Δx habe; und daß aus diesem nur ein positives Δy hervorgehe, wie wenn $y=4x^2\pm(x^2-\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}$ ist: so wird $F(fx)$ für den eben bestimmten Werth, der $fx=1$ macht, hier $x=\frac{1}{2}$ gar keine abgeleitete haben. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$F(fx)=[1-4x^2\mp(x^2-\tfrac{1}{4})^{\frac{3}{2}}]^{\frac{5}{2}},$$

welches für $x=\frac{1}{2}$ zu Null wird, für $x=\frac{1}{2}\pm\Delta x$ aber imaginär ist, man mag bey Δx das obere oder untere Vorzeichen gelten lassen. Wer gewohnt ist, das Daseyn einer abgeleiteten überall anzunehmen, wo die gewöhnliche Regel des Differenzirens nur keinen imaginären oder unendlich großen Ausdruck hervorbringt, würde hier eine abgeleitete zu finden glauben: denn er erhielte

$$\tfrac{5}{2}[1-4x^2\mp(x^2-\tfrac{1}{4})^{\frac{3}{2}}]^{\frac{3}{2}}\,[-8x\mp3\,(x^2-\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\,x],$$

welches für $x=\frac{1}{2}$ in den Werth 0 übergehet.

§. 49. Zusatz 1. Da wir die abgeleitete einer Function Fy in Hinsicht auf y nach der zweyten in §. 2 gelehrten Bezeichnungsweise durch $\frac{d.Fy}{dy}$ darstellen und die abgeleitete von y in Hinsicht auf x durch $\frac{dy}{dx}$: so wird die abgeleitete von $Fy = F(fx)$, wenn wir x als frey veränderlich betrachten d. i.

$$\frac{d.Fy}{dx}\left(=\frac{d.F(fx)}{dx}\right)=\frac{d.Fy}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

geschrieben werden können.

§. 50. Zusatz 2. Der Lehrsatz erinnert durch seine Aehnlichkeit von selbst an den des §. 31 (I. Abschn.), wo von der Stetigkeit des ersten Grades gesprochen wird. Wie aber dort schon angemerkt wurde, daß man wohl von der Stetigkeit der beyden Functionen Fy und fx auf die Stetigkeit der $F(fx)$, nicht aber umgekehrt von der Unstetigkeit einer der Functionen Fy, fx für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen sofort auch auf die Unstetigkeit der $F(fx)$ für diese Werthe schließen dürfe: so gilt dasselbe auch bey der Stetigkeit des zweyten Grades. So hat z. B. $Fy = \frac{y^2}{a-y}$ keine abgeleitete für den Werth $y = a$: setzen wir aber $y = fx = \frac{b}{x}$, eine Function, die für $x = 0$ keine abgeleitete hat; so findet sich, daß

$$F(fx) = \frac{b^2}{x^2\left(a-\frac{b}{x}\right)} = \frac{b^2}{ax^2 - bx}$$

schon für zwey Werthe von x keine abgeleitete hat, nämlich für den Werth $x = \frac{b}{a}$, der $y = a$ macht und für den Werth $x = 0$, der $fx = \frac{b}{x}$ unstetig macht. Wäre dagegen wie in §. 33 (I. Abschn.) $Fy = \frac{1}{1-y}$, und $y = fx = \frac{1}{x}$; so hätte $F(fx) = \frac{x}{x-1}$ nur für den einzigen Werth $x = 1$ keine abgeleitete.

§. 51. Lehrsatz. Wenn die Gleichung $y = fx$ für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x bestehet: für eben diese Werthe bestehet aber auch die Gleichung $x = \varphi y$: und wir finden, daß fx für irgend einen innerhalb a und b gelegenen Werth der x eine abgeleitete $f'x$ hat, wenigstens hinsichtlich auf einen positiven (oder negativen) Zuwachs von x: so hat auch die Function φy eine abgeleitete für den Werth y und wenigstens hinsichtlich auf einen (positiven oder negativen) Zuwachs von y, sofern nur $f'x$ nicht eben $=0$ ist; und zwar bestehet die Gleichung $\varphi' y = \frac{1}{f'x}$.

Beweis. Hat fx eine abgeleitete für den Werth x und hinsichtlich auf einen positiven Zuwachs; so muß

$$\frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x} = f'x + \Omega_1$$

seyn. Weil aber die Gleichung $fx = y$ für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x bestehet; so müssen, wenn wir nur x und $x+\Delta x$ innerhalb dieser Grenzen nehmen $f(x+\Delta x) = y + \Delta y$ und $f(x+\Delta x) - fx = \Delta y$; und weil eben so $x = \varphi y$ seyn solle auch $x + \Delta x = \varphi(y+\Delta y)$ und $\Delta x = \varphi(y+\Delta y) - \varphi y$ seyn. Die Verbindung dieser Gleichungen gibt

$$\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi y}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-fx} = \frac{1}{f'x+\Omega_1},$$

welches sofern nur $f'x$ nicht $=0$ ist, $= \frac{1}{f'x} + \Omega_2$ gesetzt werden kann. (§.). Aus dieser letzteren Gleichung ist aber zu ersehen, daß auch φy eine abgeleitete habe, wenigstens hinsichtlich auf einen Zuwachs von solchem Vorzeichen, wie ihn Δy hat, und zwar bestehet die Gleichung $\varphi' y = \frac{1}{f'x}$.

Beyspiel. Ist $y = fx = \frac{a}{x}$, so ist dagegen $x = \varphi y = \frac{a}{y}$; und weil fx eine abgeleitete hat für jeden Werth von x, der nur nicht Null ist, nämlich $f'x = -\frac{a}{x^2}$; so muß auch φy eine abgeleitete, nämlich $\varphi' y = \frac{-a}{y^2}$ für jeden Werth von y haben. Und es bestehet die Gleichung $-\frac{a}{y^2} = \frac{1}{(-a:x^2)} = -\frac{x^2}{a}$.

§. 52. Erklärung. Ganz in demselben Sinne wie im §. 38., (I. Abschn.) von einer Stetigkeit des ersten Grades bey Functionen mehrerer Veränderlichen gesprochen wurde, bediene ich mich dieser Redensarten auch von der Stetigkeit des zweyten Grades; und sage also z. B. daß die Function $F(x, y)$ stetig im zweyten Grade sey oder eine abgeleitete habe für ihre beyden Veränderlichen x und y wenigstens für diesen bestimmten Werth derselben und hinsichtlich auf einen positiven oder negativen

Zuwachs, wenn $F(x, y)$ eine abgeleitete hat in Hinsicht auf x für den bestimmten von x, und für jeden von y, der nicht außerhalb der Grenzen y und $y+\Delta y$ liegt; und eben so eine abgeleitete in Hinsicht auf y für den bestimmten Werth von y und bey jedem von x, der nicht außerhalb der Grenzen x und $x+\Delta x$ liegt, u. s. w.

§. 53. Lehrsatz. Wenn eine Function $F(y, z, \ldots)$ mehrerer Veränderlichen $y, z, \ldots$ eine abgeleitete hat zuvörderst in Hinsicht auf die Veränderliche y für den bestimmten Werth y, sodann in Hinsicht auf die Veränderliche z für den bestimmten Werth z u.s.w. immer zum Wenigsten hinsichtlich auf einen positiven oder auf einen negativen Zuwachs; und wir betrachten nun diese Veränderlichen $y, z, \ldots$ selbst wieder als Functionen von einer einzigen frey Veränderlichen x, nämlich $y = fx$, $z = \varphi x$ u. s. w. und diese Functionen haben für denjenigen Werth von x, der $fx = y$, $\varphi x = z$ macht, insgesammt ihre abgeleiteten in Hinsicht auf x abermahls wenigstens für einen solchen Zuwachs von x als erforderlich ist, um in y und z Zuwächse von einem solchen Vorzeichen zu erzeugen, in Betreff deren die erwähnten abgeleiteten Statt finden; so behaupte ich, daß auch die Function von x, in welche $F(y, z, \ldots)$ übergehet, wenn wir für $y, z, \ldots$ beziehungsweise $fx, \varphi x, \ldots$ setzen, eine abgeleitete habe für jeden Werth von x, der nur $fx = y$, $\varphi x = z, \ldots$ macht: und zwar sey diese abgeleitete

$$\frac{d \,.\, F(y, z \ldots)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d \,.\, F(y, z, \ldots)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \ldots$$

d. h. man findet die abgeleitete einer Function $F(y, z, \ldots)$ mehrerer Veränderlichen $y, z, \ldots$, die selbst noch als Functionen einer einzigen frey Veränderlichen x betrachtet werden, wenn man die abgeleitete von dieser Function in Hinsicht auf jede Veränderliche $y, z, \ldots$ so nimmt, als ob dieselben von einander unabhängig wären, sodann mit der abgeleiteten ihrer Veränderlichen selbst hinsichtlich auf x multiplicirt und diese Producte zuletzt in eine Summe vereinigt.

Beweis. Es wird genügen, den Satz nur für den Fall zweyer Veränderlichen y, z zu beweisen. Hier ist nun offenbar

$$\frac{\Delta F(y, z)}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y,\ z + \Delta z) - F(y, z)}{\Delta x}$$

und der letztere Ausdruck kann auch

$$= \frac{F(y+\Delta y, z+\Delta z) - F(y+\Delta y, z) + F(y+\Delta y, z) - F(y, z)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{F(y+\Delta y, z) - F(y, z)}{\Delta x} + \frac{F(y+\Delta y, z+\Delta z) - F(y+\Delta y, z)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{F(y+\Delta y, z) - F(y, z)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{F(y+\Delta y, z+\Delta z) - F(y+\Delta y, z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

geschrieben werden.

Allein $\frac{F(y+\Delta y, z) - F(y, z)}{\Delta y}$ ist, weil die gegebene Function $F(y, z)$ eine abgeleitete in Hinsicht auf y hat. $= \frac{d\,.\,F(y, z)}{dy} + \Omega_1$, und $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist, weil y auch eine abgeleitete in Hinsicht auf x hat, $= \frac{dy}{dx} + \Omega_2$. Also das Product

$$\frac{F(y+\Delta y, z) - F(y, z)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\frac{d\,.\,F(y, z)}{dy} + \Omega_1\right]\left[\frac{dy}{dx} + \Omega_2\right] =$$

$$= \frac{d\,.\,F(y, z)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \Omega_3.$$

Weil die gegebene Function $F(y, z)$ eine abgeleitete auch in Hinsicht auf z haben soll; so muß

$$\frac{F(y, z+\Delta z) - F(y, z)}{\Delta x}$$

einer gewissen (bey einerley y) bloß von z abhängigen meßbaren Zahl, nämlich der $\frac{d\,.\,F(y, z)}{dz}$ so nahe kommen, als man nur immer will, wenn wir nur Δz klein genug nehmen, und so sehr wir es dann auch noch ferner vermindern. Weil aber die Function $F(y, z)$ auch in Hinsicht auf y stetig seyn muß; so ist es möglich den Zuwachs Δy (folglich nur durch Verminderung von Δx. und somit auch Δz) so klein zu machen, daß

$$\frac{F(y+\Delta y, z+\Delta z) - F(y+\Delta y, z)}{\Delta z}$$

dem Werthe von

$$\frac{F(y, z+\Delta z) - F(y, z)}{\Delta z},$$

und somit auch dem von $\frac{d\,.\,F(y, z)}{dz}$ so nahe kommt, als man nur immer will. Wir dürfen daher

$$\frac{F(y+\Delta y, z+\Delta z) - F(y+\Delta y, z)}{\Delta z} = \frac{d\,.\,F(y, z)}{dz} + \Omega_4$$

schreiben; und da auch $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx} + \Omega_5$ ist: so erhalten wir

$$\frac{F(y+\Delta y,\ z+\Delta z) - F(y+\Delta y, z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} = \left[\frac{d.F(y,z)}{dz} + \Omega_4\right]\left[\frac{dz}{dx} + \Omega_5\right] =$$

$$= \frac{d.F(y,z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \Omega_6.$$

Also $$\frac{\Delta F(y,z)}{\Delta x} = \frac{d.F(y,z)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d.F(y,z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \Omega_7.$$

Mithin ist $$\frac{d.F(y,z)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d.F(y,z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

die abgeleitete der $F(y, z)$.

Beyspiel. Wäre $F(y,z) = \frac{y+z}{y-z}$; so hätte man

$$\frac{d.F(y,z)}{dy} = \frac{-2z}{(y-z)^2}, \qquad \frac{d.F(y,z)}{dz} = \frac{2y}{(y-z)^2}$$

für jeden Werth von y und z, dabey nur $y-z$ nicht aber $=0$ wird. Wäre nun ferner

$$y = \frac{x^2 - a^2}{x}, \qquad z = \frac{b^2 x}{x^2 + a^2};$$

so hätte man $$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 + x^2}{x^2}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{(x^2 + a^2)^2}$$

für jeden Werth von x, mit Ausnahme etva von $x=0$. Also muß auch, höchstens mit Ausnahme des Werthes $x=0$ und derjenigen, die $y-z = \frac{x^4 - b^2x^2 - a^4}{x(x^2 + a^2)}$ zu Null machen, die abgeleitete von $\frac{y+z}{y-z}$ in Hinsicht auf x seyn

$$\frac{-2z \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dz}{dx}}{(y-z)^2} = \frac{-2b^2x(a^4 + x^4)}{(x^4 - b^2x^2 - a^4)^2}.$$

§. 54. Anmerkung. Die Nothwendigkeit der angebrachten Beschränkung, nämlich derjenigen des §. 48. leuchtet auch hier wieder ein. So hat z. B., wenn wir $F(y,z) = y \,.\, z$ und $y = (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$, $z = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{2}}$ setzen, $F(y,z) = (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \,.\, (x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{2}}$ keine abgeleitete für den Werth $x = 1$, weil der Ausdruck $F(y + \Delta y, z + \Delta z)$ für ein positives sowohl als negatives Δx imaginär, nämlich $= (\pm 2\Delta x + \Delta x^2)^{\frac{3}{2}} \,.\, (\mp \Delta x + \Delta x^2)^{\frac{3}{2}}$ wird. Man würde also irren, wenn man bloß aus dem Umstande, weil

$$\frac{d.F(y,z)}{dy},\ \frac{d.F(y,z)}{dz},\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}$$

alle reell sind; sofort den Schluß ziehen wollte, daß auch

$$\frac{d.F(y,z)}{dx}$$

reell seyn müsse. Uibrigens behaupte ich keinerdings, daß der Satz umgekehrt werden könne, und daß für jeden Werth, für welchen eine der nur eben genannten abgeleiteten fehlt, auch die abgeleitete $\frac{d.F(y,z)}{dx}$ fehlen müsse. Das Beyspiel des Lehrsatzes selbst beweiset das Gegentheil. Denn obgleich $y=\frac{x^2-a^2}{x}$ für den Werth $x=0$ gewiß keine abgeleite hat, so hat doch

$$F(y,z)=\frac{x^4+b^2x^2-a^4}{x^4-b^2x^2-a^4}$$

eine abgeleitete für den Werth $x=0$ hinsichtlich auf ein positives sowohl als negatives Δx; für beyde Fälle findet sich nämlich

$$\frac{F(y+\Delta y,z+\Delta z)-F(y,z)}{\Delta x}=\frac{2b^2\Delta x}{\Delta x^4-b^2\Delta x^2-a^4};$$

also die abgeleitete $=0$.

§. 55. Zusatz. Wenn $F(x,y,z\ldots)$ eine Function mehrerer Veränderlichen ist, darunter wir eine x als unabhängig, die übrigen $y,z\ldots$ aber als von ihr selbst abhängig betrachten; so erhalten wir die abgeleitete dieser Function in Hinsicht auf x, wenn wir zuerst die abgeleitete von $F(x,y,z,\ldots)$ in Hinsicht auf x nehmen, als ob sich x ohne die $y,z\ldots$ verändern könnte, d. h. als ob $y,z,\ldots$ beständige Zahlen wären; dann eben so die abgeleitete von $F(x,y,z,\ldots)$ in Hinsicht auf y, auf $z\ldots$, immer als konnte jede derselben für sich allein sich ändern, während die übrigen alle samt x unverändert bleiben; jede von dieser Abgeleiteten, sodann auch noch mit der abgeleiteten ihrer Veränderlichen als einer Function von x betrachtet multipliciren, und alles addiren. Wäre nämlich nebst $y,z,\ldots$ auch x noch abhängig von einer anderen frey Veränderlichen u; so wäre der Fall des Lehrsatzes vorhanden, und wir erhielten die abgeleitete von $F(x,y,z,\ldots)$, wenn wir die abgeleitete in Hinsicht auf $x,y,z,\ldots$ suchten, wie eben angegeben wurde, und jede noch mit der abgeleiteten ihrer Veränderlichen in Hinsicht auf u

multiplicirten. In dem gegebenen Falle aber ist x mit u einerley, also die abgeleitete von x in Hinsicht auf u gleich 1. Diejenige abgeleitete, die wir von $F(x, y, z, \ldots)$ erhalten, wenn wir bloß x als veränderlich ansehen, brauchen wir also bloß durch *1*, d. h. gar nicht zu multipliziren.

Beyspiel. Wäre

$$F(x, y, z,) = \frac{x^3 y - y^2 z^2 + a z^3}{a^2 + x^2};$$

und y, z abhängig von x. x aber frey veränderlich; so wäre die vollständige abgeleitete dieses Ausdruks

$$= \frac{3(a^2 + x^2)x^2 y - 2(x^3 y - y^2 z^2 + az^3)x}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{x^3 - 2y \,.\, z^2}{a^2 + x^2} \cdot \frac{dy}{dx} +$$
$$+ \frac{-2y^2 z + 3az^2}{a^2 + x^2} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Wäre nun $\qquad y = 6 + x, \qquad z = \dfrac{a^2 - x^2}{x};$

so wäre $\qquad \dfrac{dy}{dx} = 1, \; \dfrac{dz}{dx} = -1 - \dfrac{a^2}{x^2};$

also die vollständig abgeleitete nun

$$\frac{x^6(6 + x) - x(6 + x)^2(a^2 - x^2)^2 + a(a^2 - x^2)^3}{x^3(a^2 + x^2)} =$$
$$= \frac{3x^2(6 + x)}{a^2 + x^2} - 2\frac{x^6(6 + x) - x(6 + x)^2(a^2 - x^2)^2 + a(a^2 - x^2)^3}{x^2(a^2 + x^2)^2} +$$
$$+ \frac{x^5 - 2(6 + x)(a^2 - x^2)^2}{x^2(a^2 + x^2)} - \frac{3a(a^2 - x^2)^2 - 2x(6 + x)^2(a^2 - x^2)}{x^2(a^2 + x^2)} -$$
$$- \frac{3a^3(a^2 - x^2)^2 - 2a^2 x(6 + x)^2(a^2 - x^2)}{x^4(a^2 + x^2)}.$$

§. 36. Lehrsatz. Wenn eine Function zweyer von einander unabhängiger Veränderlichen $F(x, y)$ eine abgeleitete sowohl in Hinsicht auf x als auf y hat, $\dfrac{dF(x,y)}{dx}$, $\dfrac{dF(x,y)}{dy}$; beydes zum Wenigsten für diejenigen Werthe der Veränderlichen, die wir so eben durch x und y bezeichnen und in Bezug auf einen positiven oder negativen Zuwachs; wenn ferner die abgeleitete in Hinsicht auf x oder $\dfrac{dF(x,y)}{dx}$ noch eine abgeleitete in Hinsicht auf y, nämlich

$$\frac{d\,\dfrac{dF(x,y)}{dx}}{dy}$$

hat, und zwar in Bezug auf denselben positiven oder negativen Zuwachs, der bey $\frac{dF(x.y)}{dy}$ zu Grunde liegt; wenn endlich eben so die Abgeleitete in Hinsicht auf y oder $\frac{dF(x,y)}{dy}$ noch eine abgeleitete in Hinsicht auf x nämlich

$$\frac{d\frac{dF(x,y)}{dy}}{dx}$$

hat, und zwar in Bezug auf denselben positiven oder negativen Zuwachs, der bey $\frac{d.F(x,y)}{dx}$ zu Grunde liegt; so behaupte ich, daß diese letzteren zwey abgeleiteten

$$\frac{d\frac{dF(x,y)}{dx}}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{d\frac{dF(x,y)}{dy}}{dx}$$

einander gleich sind.

Beweis. Weil $F(x,y)$ eine abgeleite hat in Hinsicht auf x, wenigstens in Bezug auf einen gewissen positiven oder negativen Zuwachs; so muß, wenn wir diese durch Δx bezeichnen,

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x} - \Omega_1.$$

Nach der §. gegebenen Erklärung muß aber diese abgeleitete auch noch bestehen, wenn wir statt y, $y+\Delta y$ setzen: also ist auch,

$$\frac{dF(x,y+\Delta y)}{dx} = \frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)}{\Delta x} - \Omega_2.$$

In diesen Gleichungen bezeichnen Ω_1 und Ω_2 ein Paar Zahlen, die mit Δx in das Unendliche abnehmen. Es ist daher durch Abzug und Division mit Δy

$$\frac{\frac{dF(x,y+\Delta y)}{dx}-\frac{dF(x,y)}{dx}}{\Delta y} =$$

$$= \frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y} + \Omega_3,$$

wenn wir statt $\frac{\Omega_1-\Omega_2}{\Delta y}$, da es bey einerley Δy durch bloße Verminderung von Δx in das Unendliche abnehmen kann, Ω_3 schreiben. Es ist aber das Glied linker Hand dieser Gleichung, nichts anderes als die Differenz der Function $\frac{dF(x.y)}{dx}$, wenn y um Δy wächst, getheilt durch Δy: also vermög der Voraussetzung des Lehrsatzes

$$=\frac{d\frac{dF(x.y)}{dx}}{dy}+\Omega_4.$$

Wir erhalten sonach

$$\frac{d\frac{dF(x.y)}{dx}}{dy}=\frac{F(x+\Delta x.y+\Delta y)-F(x.y+\Delta y)-F(x+\Delta x.y)+F(x.y)}{\Delta x.\Delta y}+\Omega_5, \qquad (A)$$

wenn wir $\Omega_3-\Omega_4=\Omega_5$ setzen. Auf ähnliche Art ist

$$\frac{dF(x.y)}{dy}=\frac{F(x.y+\Delta y)-F(x.y)}{\Delta y}+\Omega_6$$

und

$$\frac{dF(x+\Delta x.y)}{dy}=\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x.y)}{\Delta y}+\Omega_7$$

und durch Abzug und Division mit Δx

$$\frac{\frac{dF(x+\Delta x,y)}{dy}-\frac{dF(x.y)}{dy}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{F(x+\Delta x.y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x.y+\Delta y)+F(x.y)}{\Delta x.\Delta y}+\Omega_8,$$

wenn wir statt $\frac{\Omega_6-\Omega_7}{\Delta x}$ nur Ω_8 schreiben, weil Ω_6 und Ω_7 bey einerley Δx durch bloße Verminderung von Δy in das Unendliche abnehmen können. Da ferner das Glied linker Hand

$$=\frac{d\frac{dF(x.y)}{dy}}{dx}+\Omega_9$$

ist: so erhalten wir

$$\frac{d\frac{dF(x.y)}{dy}}{dx}=$$

$$=\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x.y)-F(x,y+\Delta y)+F(x.y)}{\Delta x\Delta y}+\Omega_{10}. \qquad (B)$$

Die Vergleichung der beyden Gleichungen (A) und (B) zeigt, daß

$$\frac{d\cdot\frac{dF(x,y)}{dx}}{dy}=\frac{d\cdot\frac{dF(x.y)}{dy}}{dx}$$

seyn müsse: weil sich die Glieder rechter Hand nur durch ein Ω unterscheiden.

§. 57. Anmerkung. Man könnte versucht seyn, zu glauben, daß aus dem Vorhandenseyn einer abgeleiteten von $F(x,y)$ in Hinsicht auf x oder $\frac{dF(x,y)}{dx}$, und einer abgeleiteten von dieser abermahls in Hinsicht auf y

$$\frac{d\frac{dF(x,y)}{dx}}{dy},$$

sofort auch auf das Daseyn einer abgeleiteten von $F(x,y)$ in Hinsicht auf y oder $\frac{dF(x,y)}{dy}$ geschlossen werden dürfe. So ist es aber nicht. Denn wenn z. B. $F(x,y)=x^2y^2+\sqrt{1-y}$ ist: so gibt es für den Werth $y=1$, wohl ein $\frac{dF(x,y)}{dx}$ nämlich $2xy^2$: ingleichen auch eine abgeleitete von dieser abgeleiteten in Hinsicht auf y nämlich

$$\frac{d\frac{dF(x,y)}{dx}}{dy}=4xy.$$

Allein eine abgeleitete von $F(x,y)$ in Hinsicht auf y für den Werth $y=1$ gibt es in Wahrheit nicht: indem

$$\frac{dF(x,y)}{dy}=2x^2y-\frac{1}{2\sqrt{1-y}}$$

für $y=1$ unendlich groß wird.

§. 58. Zusatz. Da auf ähnliche Art auch noch erwiesen werden kann, daß unter ähnlichen Einschränkungen, wie die im Lehrsatze angegeben sind,

$$\frac{d\frac{d\frac{dF(x,y,z)}{dx}}{dy}}{dz}=\frac{d\frac{d\frac{dF(x,y,z)}{dz}}{dx}}{dy}$$

sey: so erhellet, daß es überhaupt gleichgültig sey, in welcher Ordnung die abgeleitete von einer und eben derselben Function mehrerer Veränderlichen genommen werden möge. Daher bestehet z. B. die Gleichung

$$\frac{d^3F(x,y,z)}{dx\,dy\,dz}=\frac{d^3F(x,y,z)}{dz\,dy\,dx}$$

u. s. w.

§. 59. Lehrsatz. Wenn ein Paar Functionen dieselben abgeleiteten für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen haben; so kann ihr Unterschied für irgend einen innerhalb eben dieser Grenzen gelegenen Werth ihrer Veränderlichen höchstens in einer von x selbst unabhängigen beständigen Zahl bestehen.

Beweis. Wenn Fx und Φx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x einerley abgeleitete fx haben; so ist nach §. 28, wenn wir x und $h+x$ innerhalb a und b nehmen,

$$F(x+h)-Fx=$$
$$=\frac{h}{n}\left[fx+f\left(x+\frac{h}{n}\right)+f\left(x+\frac{2h}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(x+\frac{n-1}{n}h\right)\right]+\Omega_1,$$
$$\Phi(x+h)-\Phi x=$$
$$=\frac{h}{n}\left[fx+f\left(x+\frac{h}{n}\right)+f\left(x+\frac{2h}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(x+\frac{n-1}{n}h\right)\right]+\Omega_2,$$

wo Ω_1 und Ω_2 durch die Vermehrung von n in das Unendliche abnehmen können. Hieraus ergibt sich (nach §.), daß $F(x+h)-Fx=$ $=\Phi(x+h)-\Phi x$ oder $F(x+h)-\Phi(x+h)=Fx-\Phi x$ seyn müsse. Setzen wir nun für x einen beständigen innerhalb a und b gelegenen Werth c, während wir h willkürlich doch immer so abändern, daß $c+h$ einen innerhalb a und b gelegenen Werth, den ich durch x bezeichnen will, darbietet; so sehen wir, daß $Fx-\Phi x=Fc-\Phi c$ eine beständige von x ganz unabhängige Zahl sey.

§. 60. Zusatz. Haben wir also erst eine einzige Function Fx gefunden, die so beschaffen ist, daß ihre abgeleitete $F'x$ einer gegebenen Function fx oder einer gegebenen von x ganz unabhängigen constanten Zahl gleich gilt, und zwar für alle innerhalb gewisser Grenzen a und b liegenden Werthe der Veränderlichen x: so können wir auch schon *alle Functionen*, die sich als ursprüngliche der gegebenen abgeleiteten fx oder C ansehen lassen; insofern wenigstens, daß wir wissen, sie alle können sich höchstens um eine einzige von x nicht abhängige beständige Zahl, die mit dem übrigen allen gemeinschaftlichen Theile durch das Vorzeichen + oder — verbunden ist, unterscheiden d. h. sie müssen der Form Fx + oder $-C$ unterstehen. Denn wäre dieß nicht, wie könnte, wenn wir eine der ersten durch Φx bezeichnen, der Unterschied $Fx-\Phi x$ für alle Werthe von x einer und eben derselben constanten C gleich kommen?

§. 61. Lehrsatz. Die ursprüngliche Function, deren abgeleitete eine von x ganz unabhängige constante Zahl a ist, muß der Form $ax+C$ unterstehen.

Beweis. Denn ax ist Function, die als ursprüngliche betrachtet, die abgeleitete a gibt. (§. 36.)

§. 62. Lehrsatz. Sind $Fx, \Phi x, \Psi x, \cdots$ Functionen von einer endlichen oder unendlichen Menge, die sich als ursprüngliche der abgeleiteten $fx, \varphi x, \psi x, \cdots$ betrachten lassen; so muß jede Function die sich als eine ursprüngliche der algebraischen Summe $fx+\varphi x+\psi x+\cdots$ soll ansehen lassen, der Form $Fx+\Phi x+\Psi x+\cdots+C$ unterstehen; d. h. wir finden die Form der ursprünglichen Function einer algebraischen Summe, wenn wir die ursprüngliche Function der einzelnen Summanden nehmen und dazu noch eine beliebige constante beifügen.

§. 63. Lehrsatz. Wenn die gegebene Function, die wir als eine abgeleitete betrachten, und deren zugehörige ursprüngliche wir (soviel es sich nämlich thun läßt) bestimmen sollen, ein Product $aF'x$ aus zwey Factoren ist, deren der eine a von der Veränderlichen x ganz unabhängig, der andere $F'x$ dagegen eine uns bekannte ursprüngliche Fx hat: so ist die allgemeine Form der verlangten ursprünglichen Function $aFx+C$.

Beweis. Ergibt sich unmittelbar aus §. 39.

§. 64. Lehrsatz. Wenn die gegebene Function, deren ursprüngliche wir suchen, eine Summe aus zwey Producten $Fx\Phi'x+F'x\Phi x$ ist, in deren jedem wir nur zwey Factoren finden, davon der Eine die abgeleitete des Einen in dem anderen Producte vorkommenden Factors ist ($\Phi'x$ nämlich die abgeleitete von Φx, und $F'x$ die abgeleitete von Fx): so bildet das Product aus den zwey Factoren, die sich als ursprüngliche Functionen betrachten lassen, nämlich $Fx\Phi x$ den veränderlichen Theil der zu findenden ursprünglichen Function, die somit unter der Form $C+Fx\Phi x$ enthalten seyn muß.

Beyspiel. Wäre uns als abgeleitete folgende Function gegebenen: $2x(x^3-b^2x)+(x^2+a^2)(3x^2-b^2)$, so brauchen wir nur zu bemerken, daß $2x$ die abgeleitete von x^2+a^2, und dagegen $3x^2-b^2$ die abgeleitete von x^3-b^2x ist, um sofort schließen zu können, daß die gesuchte ursprüngliche unter der Form $(x^2+a^2)(x^3-b^2x)+C$ enthalten seyn müsse.

§. 65. Uibergang. In dem Bisherigen ist noch nicht erwiesen, daß eine jede Function fx einer Veränderlichen x, sich in Rücksicht auf eben diese Veränderliche als eine ***abgeleitete*** betrachten lasse, dergestalt, daß irgend eine andere Function von eben dieser Veränderlichen x, Fx angeblich seyn müsse, die sich zu jener als die ***ursprüngliche*** verhält, oder in Betreff deren die Gleichung

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}=fx+\Omega$$

bestehet. Sollte nun in der That eine gewisse Function fx von einer solchen Beschaffenheit seyn, daß keine Function Fx angeblich ist, von der sie als abgeleitete betrachtet werden kann: so wäre der Begriff, den das Zeichen $\int[fx]dx$ ausdrückt, ***gegenstandlos***. (E i n l e i t u n g. II. §.) Insonderheit dürfen wir uns nicht erlauben, aus dem Umstande, daß eine gewisse *Summe* mehrerer Functionen $fx+\varphi x+\cdots$ die ***abgeleitete*** einer gegebenen Function Fx darstellt, sofort zu schließen, daß auch jede einzelne dieser Functionen fx, $\varphi x, \cdots$ für sich als abgeleitete einer gewissen Function betrachtet werden könne. Hieraus ergibt sich, daß wir aus der Gleichung $\int[fx+\varphi x+\cdots]dx=Fx$ nicht unbedingt die Gleichung $\int[fx]\,dx+\int[\varphi x]\,dx+\cdots=Fx$ ableiten dürfen. So ist z. B. nach §. 41 die Summe $Fx\Phi'x+F'x\Phi x$ eine Function, die als die abgeleite von folgender $Fx.\Phi x$ angesehen werden kann. Ob aber auch $Fx.\Phi'x$, ingleichen $F'x.\Phi x$ für sich schon Functionen sind, die sich als abgeleitete betrachten lassen, wissen wir nicht. Während also die Zeichnung $\int[Fx.\Phi'x+F'x.\Phi x]dx$ eine gegenständliche Vorstellung ausdrückt, könnte es seyn, daß die Vorstellung, die durch die Zeichnung

$$\int[Fx.\Phi'x]dx+\int[F'x.\Phi x]dx$$

ausgedrückt wird, gegenstandlos sey. Gleichwohl erachtet man leicht, daß es seine große Bequemlichkeit hätte, wenn wir uns allgemein erlauben dürften, solche Zeichnungen wie

$$\int[fx+\varphi x+\cdots]dx \text{ und } \int[fx]dx+\int[\varphi x]dx+\cdots$$

als gleichgeltend zu betrachten. Und wir werden dieß dürfen, wenn wir durch eine gewisse Erweiterung des Begriffes, welchen wir mit der Zeichnung $\int[fx]dx$ bisher verbanden, festsetzen, daß diese Zeichnung künftig nur eben eine solche Bedeutung haben soll, daß $\int[fx]dx+\int[\varphi x]dx$ jederzeit $=\int[fx+\varphi x]dx$ gesetzt werden könne.

§. 66. Erklärung. Wir setzen also fest, die Zeichnung $\int[fx]dx$ solle in Zukunft einen Begriff von solcher Art bezeichnen, daß nicht nur jede Function, deren abgeleitete $= fx$ ist, unter derselben begriffen werde, sondern daß auch

$$\int[fx]dx + \int[\varphi x]dx = \int[fx + \varphi x]dx$$

geschrieben werden dürfe, gleichviel ob eine Function, deren abgeleitete $= fx$, und eine andere, deren abgeleitete $= \varphi x$, und endlich eine dritte, deren abgeleite $= fx + \varphi x$ ist, in der That angeblich sind oder nicht.

§. 67. Zusatz. Also gilt allgemein die Gleichung:

$$d\int[Fx]dx = Fx.$$

§. 68. Lehrsatz. Wenn eine gegebene Function, die wir als eine abgeleitete betrachten sollen, ein Product aus zwey Factoren $Fx.\Phi'x$ ist, deren der eine $\Phi'x$ die abgeleitete einer aus bekannten Functionen Φx vorstellt; so wird es erlaubt seyn, die Gleichung $\int[Fx.\Phi'x]dx = Fx.\Phi x - \int[F'x.\Phi x]\,dx + C$ anzusetzen.

Beweis. Wenn wir von beyden Gliedern der Gleichung die abgeleitete nehmen; so erhalten wir nach §. 67. u. 41.

$$Fx.\Phi'x = Fx.\Phi'x + F'x.\Phi x - F'x.\Phi x,$$

eine identische Gleichung. Da nun das eine Glied dieser Gleichung überdieß noch eine beliebige constante C enthält; so ist kein Zweifel, daß wenn es in der That eine ursprüngliche Function von der Art gibt, wie sie das Zeichen $\int[Fx.\Phi'x]\,dx$ andeutet, dieselbe unter der Form, welche das andere Glied der Gleichung hat, gleichfalls enthalten seyn müsse. Falls aber keine solche Function angeblich seyn sollte, so ergibt sich die Richtigkeit dieser Gleichung aus der nun eben aufgestellten Erklärung. Denn zu Folge dieser kann

$$\int[Fx.\Phi'x]dx + \int[F'x.\Phi x]dx = \int[Fx.\Phi'x + F'x.\Phi x]dx,$$

und dieses nach §. 41 $= Fx.\Phi x + C$ gesetzt werden. Also ist auch

$$\int[Fx.\Phi'x]dx = Fx.\Phi x - \int[F'x.\Phi x]dx + C.$$

Beyspiel. Wäre $\int(x^2 + a^2)(3x^2 - b^2)\,dx$ zu bestimmen, so fände sich, indem wir $3x^2 - b^2$ als die abgeleitete von $x^3 - b^2x$ betrachten

$$\int(x^2 + a^2)(3x^2 - b^2)\,dx = (x^2 + a^2)(x^3 - b^2x) - \int(x^3 - b^2x)\,2x\,dx + C.$$

Eben so fände sich $\int x^4(x-1)^3 dx$, wenn wir x^4 als die abgeleitete von $\frac{x^5}{5}$ betrachten,

$$= \frac{x^5}{5}(x-1)^3 - \frac{3}{5}\int x^5(x-1)^2 dx,$$

und wenn wir $\int x^5(x-1)^2 dx$ auf ähnliche Weise behandeln, indem wir x^5 als die abgeleitete von $\frac{x^6}{6}$ ansehen, so ist

$$\int x^5(x-1)^2 dx = \frac{x^6}{6}(x-1)^2 - \frac{2}{6}\int x^6(x-1)\,dx.$$

Und

$$\int x^6(x-1)\,dx = \frac{x^7}{7}(x-1) - \frac{1}{7}\int x^7 dx.$$

Und

$$\int x^7 dx = \frac{x^8}{8}.$$

Wir erhalten also

$$\int x^4(x-1)^3 dx = \frac{x^5}{5}(x-1)^3 - \frac{3}{5.6}x^6(x-1)^2 + \\ + \frac{3.2}{5.6.7}\cdot x^7(x-1) - \frac{3.2.1}{5.6.7.8}x^8 + C.$$

Andererseits ist $x^4(x-1)^3 = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4$, also nach §. 71. $\int x^4(x-1)^3 dx = \frac{x^8}{8} - \frac{3x^7}{7} + \frac{3x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + C$, und die Entwiklung der obigen Formel zeigt, daß sie mit dieser letzteren einstimmig sey,

§. 69. **Lehrsatz.** Wenn die gegebene Function, die wir als eine abgeleitete betrachten sollen, sich auf die Form

$$\frac{F'x.\Phi x - Fx.\Phi' x}{(\Phi x)^2}$$

bringen läßt; so ist die verlangte ursprüngliche $\frac{Fx}{\Phi x} + C$.

Beweis. Unmittelbar aus §. 43.

Beyspiel. Wäre

$$\frac{(x^2+cx)(3x^2-a^2)-(x^3-a^2x)(2x+c)}{(x^2+cx)^2}$$

gegeben; so könnten wir schließen, daß die ursprüngliche

$$\frac{x^3-a^2x}{x^2+cx}+C$$

seyn müsse.

§. 70. **Lehrsatz.** Wenn die gegebene Function, die wir als eine abgeleitete betrachten sollen, sich auf die Form $F'(fx).f'x$

bringen läßt, so ist die gesuchte ursprüngliche von der Form $F(fx)+C$.

Beweis. Aus §. 47.

Beyspiel. Wäre $15(x^3+a^3)^4x^2$ gegeben; so bemerken wir bald, daß dieser Ausdruck auch so zerlegt werden könne $5(x^3+a^3)^4 3x^2$, und nun ist, wenn wir x^3+a^3 als eine einzige Veränderliche y betrachten, $5(x^3+a^3)^4$ die abgeleitete von y^5, $3x^2$ aber die abgeleitete von x^3+a^3. Also ist $\int 15(x^3+a^3)^4x^2dx = = (x^3+a^3)^5+C$.

§. 71. Lehrsatz. Jede ganze rationale Function läßt sich als eine abgeleitete betrachten. und die ihr zugehörige ursprüngliche Function kann abermahls nur eine ganze rationale Function seyn, die nur um einen Grad höher als die gegebene ist.

Beweis. Jede ganze rationale Function unterstehet der Form $a+bx+cx^2+dx^3+\cdots+lx^m$. Setzen wir nun statt a eine Function, von der sich a als die abgeleitete ansehen läßt (und eine solche ist ax); setzen wir ferner statt bx eine Function, von der sich bx als abgeleitete betrachten läßt (und eine solche ist $\frac{bx^2}{2}$, indem die abgeleitete von $\frac{bx^2}{2}$ nach §. 36 $=\frac{2bx}{2}=bx$ ist); setzen wir eben so statt cx^2 eine Function, von der sich cx^2 als abgeleitete ansehen läßt, (und eine solche ist $\frac{cx^3}{3}$, indem die abgeleite von $\frac{cx^3}{3}$ nach §. 36 $=\frac{3cx^2}{3}=cx^2$ ist) u. s. w.; setzen wir überhaupt statt eines jeden Gliedes von der Form lx^m ein Glied, von dem sich lx^m als abgeleitete Function ansehen läßt (und ein solches Glied ist $\frac{lx^{m+1}}{m+1}$, indem die abgeleitete von diesem Ausdrucke nach §. 36 $=\frac{(m+1)lx^m}{m+1}=lx^m$ ist): so zeigt §60, daß die algebraische Summe aller dieser Glieder, wenn wir noch eine von x ganz unabhängige, übrigens aber noch durchaus unbestimmte Constante C beyfügen, die allgemeine Form darstellen muß, der die zu findende ursprüngliche Function der gegebenen $a+bx+cx^2+dx^3+\cdots+lx^m$ d. h. die Function

$$\int [a+bx+cx^2+\cdots+lx^m]\,dx$$

gewiß unterstehe. Diese Form ist demnach

$$C+ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3}+\frac{dx^4}{4}+\cdots+\frac{lx^{m+1}}{m+1}.$$

Und da dieß die Form einer ganzen rationalen Function ist, die nur um einen Grad höher als die gegebene steigt; so ist die Wahrheit dessen, was unser Lehrsatz aussagt, erwiesen.

Beyspiel. Sollen wir $1+4x-13x^2+8x^3$ als eine abgeleitete Function betrachten, deren ursprüngliche d. i. $\int[1+4x-13x^2+8x^3]dx$ gesucht wird: so werden wir erwidern, daß diese letztere unter der Form $C+x+2x^2-3x^3+2x^4$ enthalten seyn müsse. Eben so fände sich zu der gegebenen Function $7-x+14x^2-3x^3+21x^4$ die Form der ursprünglichen Function

$$\int[7-x+14x^2-3x^3+21x^4]dx=C+7x-\frac{x^2}{2}+\frac{14x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{21x^5}{5}.$$

U. s. w.

§. 72. Lehrsatz. Jede Function, deren n-te abgeleitete für jeden innerhalb gewisser Grenzen a und b gelegenen Werth ihrer Veränderlichen $=0$ ist, ist innerhalb eben dieser Grenzen eine bloß rationale und ganze Function vom Grade $(n-1)$.

Beweis. Wenn die n-te abgeleitete $=0$ ist: so muß die $(n-1)$-te abgeleitete, welche in Hinsicht auf jene eine ursprüngliche derselben ist, eine von der Veränderlichen x ganz unabhängige Constante a seyn. Die $(n-2)$-te abgeleitete, welche in Hinsicht auf die $(n-1)$-te eine ursprüngliche ist, muß der Form $ax+b$ unterstehen, sofern wir durch b eine von x ganz unabhängige willkürliche Constante bezeichnen. Die $(n-3)$-te abgeleitete muß die Form $\frac{ax^2}{2}+bx+c$, die $(n-4)$-te die Form $\frac{ax^3}{2.3}+\frac{bx^2}{2}+cx+d$ haben u. s. w. Hieraus erhellet nun schon von selbst, daß die erste abgeleitete von der Form

$$\frac{ax^{n-2}}{2.3\ldots(n-2)}+\frac{bx^{n-3}}{2.3\ldots(n-3)}+\frac{cx^{n-4}}{2.3\ldots(n-4)}+\cdots+px+q$$

d. h. eine ganze rationale Function vom Grade $(n-2)$ seyn müsse.

§. 73. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen fortwährend wächst, und dabey auch fortwährend eine abgeleitete $F'x$ hat: so muß diese fortwährend positiv seyn, und kann höchstens für gewisse vereinzelt stehende Werthe, (deren Menge übrigens auch selbst unendlich seyn kann) in Null übergehen. Wenn aber die

Function fortwährend abnimmt; so ist ihre abgeleitete fortwährend negativ, und kann höchstens für gewisse einzelne Werthe Null seyn. Wenn im entgegengesetzten Falle die Function Fx eine abgeleitete $F'x$ hat, welche für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x fortwährend positiv und höchstens für einzelne Werthe $=0$ ist; so wächst diese Function von a bis b fortwährend, sofern sie anders veränderlich ist. Und wenn die abgeleitete fortwährend negativ oder Null ist, so nimmt die Function Fx fortwährend ab.

Beweis. Es wird genug seyn, den Satz nur für den Fall des Wachsens zu beweisen.

1. Wenn nun Fx innerhalb a und b fortwährend wächst; so muß, wenn Δx positiv ist, und x und $x+\Delta x$ beyde innerhalb a und b genommen werden, nach der Erklärung des §. 50 $F(x+\Delta x) > Fx$ seyn. Weil aber Fx eine abgeleitete hat; so muß

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} = F'x + \Omega$$

seyn, wenn wir Δx in das Unendliche abnehmen lassen. Da nun der Zähler sowohl als auch der Nenner des Bruches

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}$$

stets positiv verbleiben: so erhellet, daß jene Gleichung unmöglich bestehen könnte, wenn $F'x$ negativ wäre. Es muß also entweder positiv oder Null seyn. Der letztere Fall aber kann höchstens für gewisse vereinzelt stehende Werthe eintreten. Denn wären im Gegentheil ein Paar innerhalb a und b gelegene Zahlen α und β von der Art angeblich, daß wir für alle Werthe von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ $F'x=0$ hätten; so müßte nach §. 59 für eben diese innerhalb α und β gelegenen Werthe von x, Fx eine von x ganz unabhängige Constante C seyn; und somit wäre es nicht wahr, daß unsere Function innerhalb a und b fortwährend wächst.

2. Wenn umgekehrt bekannt ist, daß die abgeleitete $F'x$ für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x positiv, oder höchstens für gewisse isolirt stehende Werthe Null ist; so ist, wenn wir durch x und $x+i$ ein Paar beliebige innerhalb a und b gelegene Werthe bezeichnen, nach §. 28

$$F(x+i)-Fx=$$
$$=\frac{i\left[F'x+F'\left(x+\frac{i}{n}\right)+F'\left(x+\frac{2i}{n}\right)+\cdots+F'\left(x+\frac{n-1}{n}i\right)\right]}{n}+\Omega$$

und der in den Klammern enthaltene Ausdruck bestehet aus lauter Gliedern, welche entweder positiv oder Null sind. Das letztere aber kann wenigstens nicht bey allen Gliedern der Fall seyn, aus welchen dieser Ausdruck zusammengesetzt wird, wenn wir bey einerley x und i die Zahl n in das Unendliche vermehren. Denn weil Ω mit der unendlichen Vermehrung von n in das Unendliche abnimmt: so müßte $F(x+i)-Fx=0$, also (nach §.) Fx selbst für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x constant seyn. Wissen wir also nur, daß Fx in der That veränderlich ist: so fließt aus der obigen Gleichung, daß der Werth $F(x+i)-Fx$ jederzeit positiv seyn müsse, und dieß heißt nach der Erklärung des §. 50, daß Fx innerhalb a und b fortwährend wachse.

§. 74. Zusatz. In der Bedingung dieses Lehrsatzes wurde vorausgesetzt, daß die in Rede stehende Function für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen eine abgeleitete hat. Begreiflicher Weise ist aber ein fortwährendes Wachsen (und eben so ein fortwährendes Abnehmen) selbst bey Functionen möglich, die keine abgeleitete haben, sondern nicht einmal stetig sind. Nahmentlich hindert nichts, daß eine Function, welche fortwährend wächst (oder abnimmt) für gewisse vereinzelt stehende Werthe ihrer Veränderlichen einen Sprung machen: nur wird zum fortwährenden Wachsthume erfordert werden, daß die Größe dieses Sprunges positiv, und zur fortwährenden Abnahme, daß diese Größe negativ sey. Auch kann die Function, welche fortwährend wächst (oder abnimmt), der Stetigkeit gehorchen, ohne doch eine abgeleitete zu haben, und dieß zwar nahmentlich dadurch, daß sie für gewisse vereinzelt stehende Werthe ihrer Veränderlichen eine (wie man zu sagen pflegt) unendlich große abgeleitete hat, d. h. daß der Quotient

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}$$

mit der Verminderung von Δx in das Unendliche wächst. Nur wird zu einem ununterbrochenen Wachsthum erforderlich seyn, daß dieser Quotient positiv, zu einer ununterbrochenen Abnahme, daß er negativ sey. Der Grund ergibt sich aus der Art, wie wir den Beweis des ersten Theils unseres Lehrsatzes geführt, von selbst. Damit nämlich Fx fortwährend wachse, wird erfordert, daß $F(x+\Delta x)$ immer $>Fx$ sey: und dieß verträgt sich recht wohl mit der Bedingung, daß

$$\frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x}$$

in das Unendliche wachse, wenn Δx in das Unendliche abnimmt. Endlich ist auch leicht zu erachten, daß ein fortwährendes Wachsen sowohl als Abnehmen möglich sey, wenn die abgeleitete $F'x$ innerhalb der gegebenen Grenzen a und b der Veränderlichen nicht etwa bloß ein oder etliche Mahle, sondern selbst unendliche Mahle theils Null, theils wieder unendlich groß wird, wenn nur ein jeder solcher Werth einen, der ihm der Nächste ist, hat. (§. 73.)

§. 75. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle Werthe ihrer Veränderlichen von a bis b einschließlich eine abgeleitete hat, die beständig positiv oder höchstens für gewisse vereinzelt stehende Werthe $=0$ ist: so ist Fa ihr kleinster, Fb ihr größter Werth, in dem Sinne, daß alle übrigen größer als Fa und kleiner als Fb sind. Wenn umgekehrt ihre abgeleitete fortwährend negativ oder mitunter zuweilen auch Null ist; so ist Fa der größte, Fb der kleinste Werth.

Beweis. Unter dieser Voraussetzung wächst Fx im ersten Falle von a bis b einschließlich, und nimmt im zweyten ab woraus sich das Uibrige nach §. 73 ergibt.

§. 76. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen $x=c$ eine abgeleitete hat, hinsichtlich auf einen positiven sowohl als negativen Zuwachs, diese abgeleitete aber hat beiderseits einen von Null verschiedenen Werth, entweder denselben für einen positiven sowohl als negativen Zuwachs, oder zwar einen verschiedenen (ungleichen) aber doch mit demselben Vorzeichen behafteten; so ist der Werth Fc gewiß kein Aeußerster in der Bedeutung des §. 62. (I. Abschn.)

Beweis. Ein Aeußerster in der Bedeutung des §. 62 (I. Abschn.) d. h. ein größter oder kleinster Werth ist nur vorhanden, wo es ein ω klein genug gibt, das für dasselbe und alle kleineren Werthe entweder das Verhältniß

$$F(c-\omega) < Fc > F(c+\omega)$$

oder das Verhältniß

$$F(c-\omega) > Fc < F(c+\omega)$$

Statt hat. Wenn aber die Function Fx für den Werth $x=c$ eine abgeleitete hat, und dieß zwar hinsichtlich eines positiven sowohl als negativen Zuwachses; so haben wir

$$\frac{F(c+\omega)-Fc}{\omega}=M+\Omega_1$$

und

$$\frac{F(c-\omega)-Fc}{-\omega}=\frac{Fc-F(c-\omega)}{\omega}=N+\Omega_2.$$

Sind nun M und N beyde von Null verschieden und einander entweder gleich oder zwar von verschiedenem Werthe, doch beyde mit demselben Vorzeichen behaftet, d. h. entweder beyde positiv oder beyde negativ: so ist im ersten Falle offenbar

$$F(c-\omega)<Fc<F(c+\omega),$$

im zweyten aber

$$F(c-\omega)>Fc>F(c+\omega).$$

Also in keinem von beyden Fällen das Verhältniß, welches bey einem äußersten Werthe Statt finden muß.

§. 77. Zusatz. Wenn also umgekehrt der Werth Fc einer Function Fx ein Aeußerster seyn soll; so muß

a) entweder die Function Fx für $x=c$ keine abgeleitete haben, entweder keine nur hinsichtlich auf einen positiven oder negativen Zuwachs, oder in beyden Hinsichten keine; oder

b) die abgeleitete muß in einer von diesen Hinsichten oder in beyden gleich Null seyn; oder

c) ihr Werth ist in keiner von diesen beyden Hinsichten Null, aber er hat ein anderes Vorzeichen in der einen, ein anderes in der anderen Hinsicht. Denn noch ein anderer Fall ist nicht gedenkbar.

§. 78. Lehrsatz. In jedem der eben aufgezählten Fälle ist es möglich, aber in keinem derselben, es sey denn in dem letzten nothwendig, daß der Werth Fc ein äußerster sey.

Beweis. 1. Wenn die Function Fx für $x=c$ keine abgeleitete hat, entweder keine hinsichtlich auf einen positiven, oder keine hinsichtlich auf einen negativen Zuwachs; oder in beyden Hinsichten keine: so kann, aber ist nicht nothwendig, Fc ein *Maximum* oder *Minimum* seyn. Denn setzen wir, es wäre für alle Werthe von $x=0$ bis $x=c$ einschließlich $Fx=ax^2$, für alle größeren Werthe von x aber $Fx=ax^2-b$: so hat Fx eine abgeleitete für den Werth $x=c$ nur hinsichtlich auf einen negativen Zuwachs, hinsichtlich auf einen positiven Zuwachs aber ist keine abgeleitete vorhanden. Denn

$$\frac{F(c-\omega)-Fc}{-\omega}=\frac{a(c-\omega)^2-ac^2}{-\omega}=+2ac-a\omega,$$

also $2ac$ die abgeleitete für ein negatives ω. Dagegen

$$\frac{F(c+\omega)-Fc}{\omega}=\frac{a(c+\omega)^2-b-ac^2}{\omega}=\frac{-b+2ac\omega+a\omega^2}{\omega},$$

ein Ausdruck, der mit der unendlichen Abnahme von ω in das Unendliche zunimmt. Wenn nun a und b positiv sind; so ist $Fc=ac^2$ offenbar größer als $F(c-\omega)$ und $F(c+\omega)$; denn

$$F(c-\omega)=ac^2-2a\omega+a\omega^2$$

und

$$F(c+\omega)=ac^2-b+2ac\omega+a\omega^2.$$

Also ist Fc ein wirkliches *Maximum.* Ist aber b negativ; $F(c-\omega)$ ist noch immer $< Fc$, aber $F(c+\omega) > Fc$. Also ist hier weder ein *Maximum* noch *Minimum* vorhanden. Man erachtet leicht, wie sich durch Abänderung des Vorzeichens von a auch noch die übrigen Fälle, deren wir oben erwähnten, hervorbringen lassen.

2. Auch wenn die Abgeleitete $F'c$ entweder nur hinsichtlich eines positiven oder nur eines negativen Zuwachses, oder auch in beyden Hinsichten $=0$ ist, kann, aber muß nicht nothwendig, Fc ein Aeußerstes seyn. Denn setzen wir $Fx=2cx-x^2$; so findet sich für jedes positive sowohl als negative Δx, $F'x=2c-2x$. Für $x=c$ ist also die abgeleitete $F'c=0$. Der Werth von Fc aber $=c^2$ ist ein *Maximum.* Denn $F(c-\omega)$ und $F(c+\omega)$ finden sich beyde $=c^2-\omega^2$, also kleiner als c^2. Hätten wir $Fx=x^2-2cx$ gesetzt; so hätte sich

$$F'x=2x-2c,\ F'c=0,\ Fc=-c^2,\ F(c-\omega)=F(c+\omega)=\omega^2-c^2>-c^2$$

ergeben, also wäre Fc ein *Minimum.* Betrachten wir dagegen die Function $Fx=(c-x)^3$, deren abgeleitete $F'x=-3(c-x)^2$ für $x=c$ gleichfalls zu Null wird; so findet sich für diesen Werth von x, $Fc=0$ und $F(c-\omega)=+\omega^3$, $F(c+\omega)=-\omega^3$, das eine also größer, das andere kleiner als Fc. Daher ist Fc weder ein *Maximum* noch ein *Minimum.* Leicht ist es nach dem vorhergehenden Beyspiele zu erdenken, wo die abgeleitete $F'x$ nur hinsichtlich auf einen positiven oder negativen Zuwachs zu Null wird, und bald der Fall eines Aeußersten eintritt, bald wieder nicht.

3. Wenn endlich die abgeleitete $F'c$, je nach dem wir sie einmahl in Hinsicht auf einen positiven, einmahl in Hinsicht auf einen negativen Zuwachs betrachten, zwey von der Null

verschiedene und mit einem verschiedenen Vorzeichen behaftete Werthe hat; so ist der Werth Fc gewiß ein Aeußerster. Bezeichnen wir nämlich den Werth von $F'c$ für einen positiven Zuwachs durch M für einen negativen durch N; so soll

$$\frac{F(c+\omega)-Fc}{\omega}=M+\Omega_1$$

und

$$\frac{F(c-\omega)-Fc}{-\omega}=\frac{Fc-F(c-\omega)}{\omega}=N+\Omega_2$$

seyn; und weil M und N ein Paar von Null verschiedene Zahlen bezeichnen, so läßt sich ω so klein nehmen, daß die absoluten Werthe von Ω_1 und Ω_2 kleiner ausfallen als die absoluten Werthe von M und N. Für diese und für alle kleineren Werthe von ω ist das Vorzeichen von $M+\Omega_1$ mit dem von M, und das von $N+\Omega_2$ mit dem von N dasselbe; also das eine $+$, das andere $-$; woraus von selbst erhellet, daß man entweder

$$F(c-\omega)<Fc>F(c+\omega)$$

oder

$$F(c-\omega)>Fc<F(c+\omega)$$

habe; also auf jeden Fall Fc ein Aeußerstes. Wäre z. B. die Function Fx für alle Werthe von $x\overline{\gtrless}c$ von der Form ax^2, für alle größeren aber von der Form $2ac^2-ax^2$; so wäre

$$\frac{F(c+\omega)-Fc}{\omega}=\frac{[2ac^2-a(c+\omega)^2]-ac^2}{\omega}=-2ac-a\omega$$

und

$$\frac{F(c-\omega)-Fc}{-\omega}=\frac{a(c-\omega)^2-ac^2}{-\omega}=2ac-a\omega;$$

also der Werth von $F'c$ für einen positiven Zuwachs $=-2ac$, für einen negativen aber $=+2ac$. Haben also a und c beyde einerley Vorzeichen, d. h. ist ac positiv, so hat man

$$F(c-\omega)<Fc>F(c+\omega),$$

d. h. Fc ein *Maximum* und im entgegengesetzten Falle

$$F(c-\omega)>Fc<F(c+\omega)$$

d. h. Fc ein *Minimum.*

§. 79. Anmerkung. Die kleinen Abweichungen von der gewöhnlichen Lehre, die ich in dieser Darstellung mir erlaube, rühren nur daher, daß man die Fälle, wo eine Function entweder selbst, oder nur ihre abgeleitete unstetig wird, gewöhnlich nicht beachtet. Hrn. *Cauchy's* Darstellung, der auf den ersten dieser Fälle sehr aufmerksam ist, stimmt eben darum mit der hier gegebenen schon viel genauer überein.

§. 80. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb der Grenzen a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen nicht nur eine erste, sondern auch eine zweyte, dritte, und überhaupt alle folgenden abgeleiteten bis zu der n-ten einschließlich hat; und auch diese letztere ist noch (falls sie veränderlich ist) stetig, und es zeigt sich ferner, daß für einen gewissen innerhalb a und b gelegenen Werth von x, die erwähnten abgeleiteten alle bis auf die n-te $= 0$ sind; so ist der Werth Fc kein äußerster, so oft n eine ungerade Zahl; ist aber n gerade, so ist Fc ein *Maximum*, wenn $F^n c$ negativ, ein *Minimum*, wenn $F^n c$ positiv ist.

Beweis. Weil die gegebene Function Fx innerhalb a und b fortwährend eine abgeleitete $F'x$ hat, die noch selbst eine abgeleitete hat, also auch stetig ist; so haben wir. weil c ein innerhalb a und b gelegener Werth von x ist, und also, wenn wir ω klein genug nehmen, auch $c + \omega$ einen solchen vorstellen muß, nach §. 29

$$F(c + \omega) = Fc + \omega F'(c + \omega_1),$$

sofern wir durch ω_1 eine gewisse Zahl bezeichnen, welche auf keinen Fall außerhalb 0 und ω liegt. Weil aber auch die Function $F'x$ noch eine abgeleitete hat, welche selbst abermahls nur dem Gesetze der Stetigkeit gehorcht: so haben wir, weil auch $c + \omega_1$ innerhalb a und b liegt, nach demselben §. auch

$$F'(c + \omega_1) = F'c + \omega_1 F''(c + \omega_2),$$

worin ω_2 eine gewisse nicht außerhalb 0 und ω_1 liegende Zahl bedeutet. Wenn nun $n > 2$, so hat auch noch die Function $F''x$ eine abgeleitete. welche selbst stetig ist; und wir erhalten sonach

$$F''(c + \omega_2) = F''c + \omega_2 F'''(c + \omega_3),$$

wo ω_3 eine nicht außerhalb 0 und ω_2 gelegene Zahl bezeichnet. Man sieht von selbst ein, wie diese Schlüsse fortgesetzt werden können. so daß wir zuletzt noch die Gleichung

$$F^{n-1}(c + \omega_{n-1}) = F^{n-1} c + \omega_{n-1} F^n(c + \omega_n)$$

erhalten. Da aber die Zahlen $F'c, F''c, \cdots F^{n-1}c$ insgesammt Nullen sind, so gibt die Verbindung dieser Gleichungen

$$F(c + \omega) = Fc + \omega . \omega_1 . \omega_2 \cdots \omega_{n-1} . F^n(c + \omega_n).$$

Lassen wir nun ω, also um so gewisser auch $\omega_1 . \omega_2 \cdots \omega_{n-1}$ in das Unendliche abnehmen: so folgt aus dem Gesetze der Stetigkeit, welches die Function $F^n x$ beobachtet, daß

$$F^n(c+\omega_n) = F^n c + \Omega_1$$

seyn müsse. Also ist

$$F(c+\omega) = Fc + \omega . \omega_1 . \omega_2 \cdots \omega_{n-1} (F^n c + \Omega_1).$$

Weil nun $F^n c$ nicht $=0$ ist: so läßt sich jederzeit ω so betrachten, daß nach dem absoluten Werthe beyder Zahlen $\Omega_1 < F^n c$ ist, und dann wird $[F^n c + \Omega_1]$ positiv oder negativ, jenachdem es $F^n c$ ist.

1. Nach dieser Vorausschickung ist nun leicht zu erweisen, daß der Werth Fc, wenn die Zahl n ungerade ist, weder ein *Maximum* noch *Minimum* darbiete. Denn Alles, was wir bisher von der Formel

$$F(c+\omega) = Fc + \omega . \omega_1 . \omega_2 \cdots \omega_{n-1} [F^n c + \Omega_1]$$

sagten, gilt für ein positives sowohl als negatives ω, sofern nur beyde klein genug angenommen werden. Ist aber ω positiv: so sind auch die sämmtlichen Zahlen $\omega_1 . \omega_2 \cdots \omega_{n-1}$ positiv: und umgekehrt, wenn ω negativ ist, sind diese alle negativ. Wenn also n ungerade ist, so ist die Anzahl der Factoren in dem Producte $\omega . \omega_1 . \omega_2 \cdots \omega_{n-1}$ ungerade, also dasselbe positiv oder negativ, je nach dem es ω ist. Demnach ändert hier das Glied $\omega . \omega_1 . \omega_2 \cdots \omega_{n-1} [F^n c + \Omega_1]$ sein Vorzeichen mit ω. Also ist entweder

$$F(c+\omega) > Fc > F(c-\omega)$$

oder

$$F(c+\omega) < Fc < F(c-\omega):$$

d. h. in keinem Falle ist hier der Werth Fc ein Aeußerster.

2. Wenn aber n gerade ist: so ist die Anzahl der Factoren in dem Producte $\omega . \omega_1 . \omega_2 \cdots \omega_{n-1}$ gleichfalls gerade, daher verbleibt das Vorzeichen dasselbe, und somit auch das Vorzeichen des Ausdrucks $\omega . \omega_1 . \omega_2 . \omega_{n-1} [F^n c + \Omega]$ dasselbe, ω mag positiv oder negativ genommen werden. Wenn demnach $F^n c$ selbst positiv ist: so ist $F(c+\omega)$ sowohl als $F(c-\omega) > Fc$, somit Fc ein *Minimum*. Ist aber $F^n c$ negativ: so ist $F(c+\omega)$ sowohl als $F(c-\omega) < Fc$, somit Fc ein *Maximum*.

Beyspiel. *1.* Die Function $Fx = a^4 + b^3 x - c^2 x^2$ hat für jeden Werth von x eine abgeleitete $F'x = b^3 - 2c^2 x$, welche für den Werth $x = \frac{b^3}{2c^2}$ zu Null wird. Die zweyte abgeleitete dieser Function aber $F''x$ ist $= -2c^2$, also für jeden Werth von x negativ.

Hieraus ergibt sich dann, daß der Werth von $x=\frac{b^3}{2c^2}$ die Function $a^4+b^3x-c^2x^2$ zu einem *Maximum* erhebe.

2. Die Function $Fx=\frac{x^2-2ax+a^2}{x}$ gibt die abgeleitete $F'x=$ $=1-\frac{a^2}{x^2}$, welche zu Null wird für $x=+a$ sowohl als auch für $x=-a$. Die zweyte abgeleitete $F''x$ ist $\frac{2a^2}{x^3}$, wird also für $x=+a$ positiv $=\frac{2}{a}$, für $x=-a$, negativ $=-\frac{2}{a}$. Also gibt $x=+a$ ein *Minimum*, nämlich $Fa=0$. $x=-a$ aber ein *Maximum*, nämlich $F(-a)=-4a$. Um sich zu überzeugen, daß diese Werthe in der That der eine ein *Minimum*, der andere ein *Maximum* in der Bedeutung des §. 62 (I. Abschn.) sind, braucht man nur $a\pm\omega$ und $-a\pm\omega$ an die Stelle von x zu setzen, wodurch man beziehungsweise $=\frac{\omega^2}{a\pm\omega}$ und $-4a-\frac{\omega^2}{a\mp\omega}$ erhält.

3. Die Function $(a+x)^4$ hat zu ihrer ersten abgeleiteten $4(a+x)^3$ zu ihrer zweyten $12(a+x)^2$. zu ihrer dritten $24(a+x)$ und zu ihrer vierten die constante Zahl 24. Setzen wir also $x=-a$, so werden alle diese abgeleiteten, bis auf die letzte, $=0$. Also hat diese Function für $x=-a$ ein *Minimum*, weil 4 gerade und 24 positiv ist.

4. Dagegen die Function $(a+x)^5$ hat die erste abgeleitete $5(a+x)^4$, die zweite $20(a+x)^3$, die dritte $60(a+x)^2$, die vierte $120(a+x)$ und die fünfte $=120$. Da nun alle diese abgeleiten bis auf die letzte für $x=-a$ verschwinden; $x=5$ aber ungerade ist, so hat diese Function für den Werth $x=-a$ weder ein *Maximum* noch ein *Minimum*.

§. 81. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen das Gesetz der Stetigkeit befolgt, auch eine abgeleitete hat, die höchstens für gewisse vereinzelt stehende Werthe, deren jeder einen ihm nächsten hat, unendlich groß wird, übrigens aber das Gesetz der Stetigkeit abermahls höchstens mit Ausnahme gewisser vereinzelt stehender Werthe, deren jeder einen ihm nächsten hat, beobachtet: so kann es wohl vielleicht eine unendliche Menge innerhalb a und b gelegener Werthe von x geben, für welche der Werth der Function ein Aeußerstes wird: aber zu jedem solchen Werthe von x gibt es auch einen nächsten; und von je zwey Aeußersten Werthen der Function, welche zu zwey einander zunächst stehenden Werthen von x gehören, ist immer das eine ein *Maximum*, das andere ein *Minimum*; es wäre denn, daß die Function gewisse innerhalb a und b liegende Grenzen hat, innerhalb deren sie ihre Werthe gar nicht verändert; wo, wenn sie von $x=\alpha$ ausschließlich bis $x=\beta$ einschließlich einerley Werth behält, $F\alpha$ und $F\beta$ ein Paar einseitige Aeußerste sind, die Beyde sowohl *Maxima* als auch *Minima* seyn können.

Beweis. *1.* Daß eine Function, wie sie der Lehrsatz beschreibt, eine unendliche Menge innerhalb a und b liegender Werthe ihrer Veränderlichen besitzen könne, für welche ihr eigener Werth zu einem Aeußersten wird, lehrt uns schon manches bisher betrachtete Beyspiel, nahmentlich das des §. 70 (I. Abchn.), worin für jeden Werth von $x=\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}$ bis $x=\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}}$ die Function

$$Fx = x-\frac{2^{2n}-1}{3\,.\,2^{2n-1}},$$

und für jeden Werth von $x=\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}}$ bis $x=\frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n+2}}$,

$$Fx=\frac{2^{2n+2}-1}{3\,.\,2^{2n}}-x$$

festgesetzt wurde: wo dann für alle Werthe von x, die der Form $\frac{2^n-1}{2^n}$ unterstehen, dergleichen Aeußerste zum Vorschein kommen.

2. Daß aber bey einer Function dieser Art zu jedem Werthe der x, der ein solches Aeußerstes hat, ein zweyter angeblich seyn müsse, der ihm der nächste stehet, und zwar sowohl auf Seite der positiven als negativen Zuwächse von x, erhellet so. Ein äußerster Werth kann eine Function, die stetig ist, und höchstens mit Ausnahme gewisser vereinzelt stehender Werthe eine abgeleitete hat, nach §. 73. nur für solche Werthe ihrer Veränderlichen erhalten, für welche ihre abgeleitete unendlich groß oder $=0$ ist, oder ihr Vorzeichen für ihre beyden Richtungen ändert. Die Werthe von x nun, welche $F'x$ unendlich groß machen, sollen nach der ausdrücklichen Voraussetzung nur isolirt vorkommen und jeder seinen ihm nächsten haben. Was aber diejenigen Werthe von x betrifft, welche $F'x$ zu Null machen; so folgt aus der vorausgesetzten Stetigkeit der $F'x$ nach §. 17 (I. Abschn.), falls es gewisse nicht außerhalb a und

b gelegenen Grenzen α und β gäbe, innerhalb deren $F'x$ so oft zu Null wird, daß zwischen je zwey Werthen von x, die $F'x = 0$ macht, noch ein dritter angeblich wäre, der eben dieß thut, daß dann die Function Fx selbst innerhalb zweyer Grenzen constant seyn müßte; wo es dann eben deßhalb höchstens bey α und β ein einseitiges *Maximum* oder *Minimum* gäbe. Was endlich die Werthe der x belangt, in welchem $F'x$ sein Vorzeichen ändert; so muß es zwar wegen der Stetigkeit, mit der sich $F'x$ ändern soll, zwischen je zwey solchen Werthen einen dritten geben, für welchen $F'x = 0$ wird. Also ist dargethan, daß auch diese und somit alle Werthe, für welche Fx einen äußersten Werth annehmen kann, nur vereinzelt und so erscheinen können, daß es zu jedem einen ihm nächsten gibt.

3. Das Übrige in diesem Lehrsatze fließet unmittelbar aus I. §. 78.

§. 82. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und $a+h$ gelegenen Werthe der x nicht nur eine erste, sondern auch eine zweyte, dritte, und jede folgende abgeleitete bis zu der n-ten einschließlich und in beyden Richtungen hat; wenn auch noch diese letzte das Gesetz der Stetigkeit innerhalb der genannten Werthe befolgt; wenn endlich die Function Fx auch für die beyden Werthe $x = a$ und $x = a + h$ Stetigkeit hat für den ersten wenigstens in demselben Sinne mit h, für den zweyten wenigstens in der entgegengesetzten Richtung: so bestehet jedesmahl die Gleichung

$$F(a+h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F''a + \frac{h^3}{2.3}F'''a + \cdots + \frac{h^n}{2.3\ldots n}F^n(a+\mu h),$$

worin μ eine gewisse nicht außerhalb 0 und 1 liegende Zahl bedeutet.

Beweis. *1.* Wir wollen diesen Lehrsatz erst für den Fall beweisen, wenn eine erste, zweyte, und n-te abgeleitete nicht bloß für alle innerhalb a und $a+h$ gelegenen Werthe, sondern auch für den Werth $x=a$ und $x=a+h$ selbst noch vorhanden ist, und ihre Stetigkeit sich gleichfalls von a bis auf $a+h$ einschließlich erstrecket. Ist n noch überdieß $= 1$, so sagt der Satz bloß aus, daß $F(a+h) = Fa + hF'(a+\mu h)$ sey, was schon §. 29 erwiesen wurde.

2. Für $n = 2$ wird behauptet, daß

$$F(a+h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F'(a+\mu h)$$

sey. Bezeichnen wir nun eine beliebige nicht außerhalb 0 und h gelegene veränderliche Zahl durch y; und bewirken wir, daß, wenn $F'x$ als eine ursprüngliche Function betrachtet wird, die $F''x$ ihre erste abgeleitete vorstelle: so berechtigen die bereits angegebenen Bedingungen, nach dem eben erwähnten Satze, die Gleichung aufzustellen

$$F'(a+y)=F'a+yF''(a+\mu y):$$

wo μy eine gewisse nicht außerhalb 0 und y gelegene Zahl bedeutet. Weil aber die Function $F''x$ von $x=a$ bis $x=a=h$ einschließig stetig seyn soll: so gibt es [nach §. 24 (I. Abschn.)] unter den sämmtlichen Werthen derselben von $x=a$ bis $x=a+h$ einen kleinsten sowohl als einen größten in der Bedeutung, daß jener keinen kleineren unter sich und dieser keinen größeren über sich hat. Bezeichnen wir den kleinsten durch $F''p$, den größten durch $F''q$: so sind p und q ein Paar nicht außerhalb a und $a+h$ liegende Zahlen, welche ganz unabhängig von y bey einerley a und h constant sind. Dabey bestehen für jeden der Werthe von y innerhalb 0 und h die Verhältnisse

$$F'(a+y)-F'a \geqq yF''p \quad \text{und} \quad \leqq yF''q.$$

Demnach sind

$$F'(a+y)-F'a-yF''p \quad \text{und} \quad yF''q-F'(a+y)+F'a$$

ein Paar Ausdrücke, welche für alle nicht außerhalb 0 und h gelegenen Werthe der Veränderlichen y fortwährend Null oder positiv verbleiben. Nun läßt sich aber, sofern man a als constant, y aber als veränderlich ansieht, nach §. 47 $F'(a+y)$ als die abgeleitete von $F(a+y)$ betrachten, weil die abgeleitete von $a+y$ gleich 1 ist. Unter eben dieser Voraussetzung ist $F'a$ die abgeleitete von $yF'a$ und $yF''p$ die abgeleitete von $\frac{y^2}{2}F''p$, weil $F'a$ und $F''p$ unter dieser Voraussetzung beständige Zahlen bezeichnen. Somit läßt sich der ganze Ausdruck

$$F'(a+y)-F'a-yF''p$$

als die abgeleitete von einer Function betrachten, welche der Form

$$C+F(a+y)-yF'a-\frac{y^2}{2}F''p$$

unterstehet. Und auf ganz ähnliche Weise läßt sich der Ausdruck

$$yF''q-F'(a+y)+F'a$$

als die abgeleitete von

$$D+\frac{y^2}{2}F''q-F(a+y)+yF'a$$

ansehen, wenn wir durch C und D ein Paar beliebige Constanten bezeichnen. Lasset uns nun diese Constanten auf eine solche Art bestimmen, daß diese Functionen mit $y=0$ zu Null werden. Hiezu ist nur nöthig, $C=-Fa$ und $D=Fa$ zu machen. Also stellen nun

$$-Fa+F(a+y)-yF'a-\frac{y^2}{2}F''p$$

und

$$Fa+\frac{y^2}{z}F''q-F(a+y)+yF'a$$

zwey Functionen von y vor, welche für $y=0$ verschwinden, deren abgeleitete aber

$$F'(a+y)-F'a-yF''p$$

und

$$yF''q-F'(a+y)+F'a$$

für alle Werthe von $y=0$ bis $y=h$ fortwährend positiv oder Null sind. Aus §. 73 wissen wir, daß solche Functionen, wenn h positiv ist, selbst positiv oder Null seyn müssen. Also ist

$$-Fa+F(a+y)-yF'a-\frac{y^2}{2}F''p$$

sowohl als

$$Fa+\frac{y^2}{2}F''q-F(a+y)+yF'a$$

entweder positiv oder Null. Daher ist

$$F(a+y)-Fa-yF'a\geqq\frac{y^2}{2}F''p \quad \text{und} \quad \leqq\frac{y^2}{2}F''q.$$

Also auch, wenn wir $y=h$ nehmen,

$$F(a+h)-Fa-hF'a\geqq\frac{h^2}{2}F''p \quad \text{und} \quad \leqq\frac{h^2}{2}F''q.$$

Da nun $F''x$ stetig zum Wenigsten im ersten Grade seyn soll; so gibt es nach §. 29 (I. Abschn.) einen zwischen p und q, mithin auch zwischen a und $a+h$ gelegenen Werth von x, der sich mithin durch $a+\mu h$ darstellen läßt, von der Art, daß wir die Gleichung

$$F(a+h)-Fa-hF'a=\frac{h^2}{2}F''(a+\mu h)$$

oder

$$F(a+h)=Fa+hF'a+\frac{h^2}{2}F''(a+\mu h)$$

erhalten. Auf eine ganz ähnliche Art ergibt sich

$$F(a-h)=Fa-hF'a+\frac{h^2}{2}F''(a-\mu h):$$

woraus zu sehen, daß jene Formel allgemein für einen positiven, sowohl als negativen Werth von h gelte.

3. Für $n=3$ behauptet der Lehrsatz, daß

$$F(a+h)=Fa+hF'a+\frac{h^2}{2}F''a+\frac{h^3}{2.3}F'''(a+\mu h)$$

sey. Es ist aber, wenn wir durch y abermahls eine beliebige nicht außerhalb 0 und h gelegene veränderliche Zahl bezeichnen,

$$F''(a+y)=F''a+yF'''(a+\mu y)$$

und wenn wir durch p und q diejenigen Werthe der x bezeichnen, für welche $F'''x$ den kleinsten und größten Werth unter allen von $x=a$ bis $x=a+h$ annimmt: so muß

$$F''(a+y)-F''a \geqq yF'''p \quad \text{und} \quad \leqq yF'''q$$

seyn. Demnach bezeichnen

$$F''(a+y)-F''a-yF'''p$$

und

$$yF'''q-F''(a+y)+F''a$$

ein Paar Ausdrücke, welche für alle nicht außerhalb 0 und h liegenden Werthe, entweder positiv oder Null sind. Es müssen daher, wenn h positiv ist, auch die ursprünglichen Functionen, von welchen diese als abgeleitete angesehen werden können, nämlich

$$C+F'(a+y)-yF''a-\frac{y^2}{2}F'''p$$

und

$$D+\frac{y^2}{2}F'''q-F'(a+y)+yF''a$$

fortwährend positiv oder Null seyn, d. h. wenn wir C und D so bestimmen, daß sie für $y=0$ verschwinden, d. h. wenn wir $C=-F'a$ und $D=+F'a$ nehmen. Also sind

$$-F'a+F'(a+y)-yF''a-\frac{y^2}{2}F'''p$$

und

$$F'a+\frac{y^2}{2}F'''q-F'(a+y)+yF''a$$

abermahls ein Paar Functionen von y, welche fortwährend positiv oder Null sind. Es läßt sich aber $F'(a+y)$ als die abgeleitete von $C+F(a+y)$, $F'a$ als die abgeleitete von $yF'a$; $yF''a$ als die abgeleitete von $\frac{y^2}{2}F''a$ und $\frac{y^2}{2}F'''p$ als die abgeleitete von $\frac{y^3}{2.3}F'''p$, und eben so $\frac{y^2}{2}F'''q$ als die abgeleitete von $\frac{y^3}{2.3}F'''q$ betrachten. Nach §. 73 sind also

$$C-yF'a+F(a+y)-\frac{y^2}{2}F''a-\frac{y^3}{2.3}F'''p$$

und

$$D+yF'a+\frac{y^3}{2.3}F'''q-F(a+y)+\frac{y^2}{2}F''a$$

zwey ursprüngliche Functionen von y, die fortwährend positiv oder Null verbleiben müssen, wenn wir nur ihre Constanten C und D so bestimmen, daß beyde Functionen für $y=0$ verschwinden, d. h. wenn wir $C=-Fa$ und $D=Fa$ setzen. Wir wissen also, daß die zwey Ausdrücke

$$F(a+y)-Fa-yF'a-\frac{y^2}{2}F''a-\frac{y^3}{2.3}F'''p$$

und

$$-F(a+y)+Fa+yF'a+\frac{y^2}{2}F''a+\frac{y^3}{2.3}F'''q$$

fortwährend positiv oder Null d. h. daß

$$F(a+y)-Fa-yF'a-\frac{y^2}{2}F''a \overline{\gtrless} \frac{y^3}{2.3}F'''p \text{ und } \overline{\lessgtr} \frac{y^3}{2.3}F'''q$$

sey. Daher auch, wenn wir $y=h$ setzen

$$F(a+h)-Fa-hF'a-\frac{h^2}{2}F''a \overline{\gtrless} \frac{h^3}{2.3}F'''p \text{ und } \overline{\lessgtr} \frac{h^3}{2.3}F'''q.$$

Es muß also einen nicht außerhalb p und q: mithin auch nicht außerhalb a und $a+h$ liegenden Werth $a+\mu h$ geben, der die Gleichung

$$F(a+h)-Fa-hF'a-\frac{h^2}{2}F''a=\frac{h^3}{2.3}F'''(a+\mu h)$$

oder

$$F(a+h)=Fa+hF'a+\frac{h^2}{2}F''a+\frac{h^3}{2.3}F'''(a+\mu h)$$

erzeugt. Auf ähnliche Art ergibt sich für $-h$ die Gleichung

$$F(a-h)=Fa-hF'a+\frac{h^2}{2}F''a-\frac{h^3}{2.3}F'''(a-\mu h).$$

4. Es ist nun leicht zu erweisen, daß unsere Formel ganz allgemein für jeden Werth von n gelte. Denn setzet, daß sie für einen bestimmten Werth von n noch gilt, so läßt sich alsbald zeigen, daß sie auch für den nächst größeren Werth $n+1$ gelte; vorausgesetzt, daß die gegebene Function eine $(n+1)$-te abgeleitete hat, welche für alle Werthe von $x=a$ bis $x=a+h$ einschließlich stetig ist. Weil nämlich die Formel für den Werth n noch gilt, $F^{n+1}x$ aber nicht die $(n+1)$-te sondern bloß n-te abgeleitete von $F'x$ ist: so erhalten wir

$$F'(a+h)=F'a+hF''a+\frac{h^2}{2}F'''a+\frac{h^3}{2.3}F^{IV}a+\cdots+\frac{h^n}{2.3\cdots n}F^{n+1}(a+\mu h),$$

oder auch für jedes y, welches nicht außerhalb 0 und h liegt,

$$F'(a+y)=F'a+yF''a+\frac{y^2}{2}F'''a+\frac{y^3}{2.3}F^{IV}a+\cdots+\frac{y^n}{2.3\cdots n}F^{n+1}(a+\mu y).$$

Bezeichnen wir also den kleinsten Werth, den die stetige Function $F^{n+1}x$ unter allen Werthen der x von a bis $a+h$ annimmt, durch $F^{n+1}p$, den größten durch $F^{n+1}q$; so muß

$$F'(a+y)-F'a-yF''a-\frac{y^2}{2}F'''a-\frac{y^3}{2.3}F^{IV}a-\cdots \overline{\gtrless} \frac{y^n}{2.3\cdots n}F^{n+1}p$$

und

$$\overline{\lessgtr}\frac{y^n}{2.3\cdots n}F^{n+1}q.$$

Demnach sind

$$F'(a+y)-F'a-yF''a-\frac{y^2}{2}F'''a-\frac{y^3}{2.3}F^{IV}a-\cdots-\frac{y^n}{2.3\cdots n}F^{n+1}p$$

und

$$-F'(a+y)+F'a+yF''a+\frac{y^2}{2}F'''a+\frac{y^3}{2.3}F^{IV}a+\cdots+\frac{y^n}{2.3\cdots n}F^{n+1}q$$

ein Paar Functionen von y, die fortwährend positiv oder Null verbleiben. Es läßt sich aber $F'(a+y)$ als die abgeleitete von $F(a+y)$; $F'a$ als die abgeleitete von $yF'a$; $yF''a$ als die abgeleitete von $\frac{y^2}{2}F''a$; $\frac{y^2}{2}F'''a$ als die abgeleitete von $\frac{y^3}{2.3}F'''a$; $\frac{y^3}{2.3}F^{IV}a$ als die abgeleitete von $\frac{y^4}{2.3.4}F^{IV}a$ u.s.w.; endlich $\frac{y^n}{2.3\cdots n}F^{n+1}p$ als die abgeleitete von $\frac{y^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}p$ und eben so $\frac{y^n}{2.3\cdots n}F^{n+1}q$ als die abgeleitete von $\frac{y^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}q$, daher die ganzen zwey Ausdrücke, der erstere als die abgeleitete von

$$C+F(a+y)-yF'a-\frac{y^2}{2}F''a-\frac{y^3}{2.3}F'''a-\frac{y^4}{2.3.4}F^{IV}a-\cdots-\frac{y^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}p$$

und der zweyte als die abgeleitete von

$$D-F(a+y)+yF'a+\frac{y^2}{2}F''a+\frac{y^3}{2.3}F'''a+\frac{y^4}{2.3.4}F^{IV}a+\cdots+\frac{y^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}q$$

betrachten. Bestimmen wir also die Constanten C und D so, daß beyde Ausdrücke mit $y=0$ verschwinden, d. h. setzen wir $C=-Fa$ und $D=+Fa$, so folgt aus §. 73, daß die zwey Functionen

$$F(a+y)-Fa-yF'a-\frac{y^2}{2}F''a-\frac{y^3}{2.3}F'''a-\frac{y^4}{2.3.4}F^{IV}a-\cdots-\frac{y^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}p,$$

$$-F(a+y)+Fa+yF'a+\frac{y^2}{2}F''a+\frac{y^3}{2.3}F'''a+\frac{y^4}{2.3.4}F^{IV}a+\cdots+\frac{y^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}q$$

stets positiv oder Null sind. Also muß auch, wenn wir $y=h$ annehmen,

$$F(a+h)-Fa-hF'a-\frac{h^2}{2}F''a-\frac{h^3}{2.3}F'''a-\frac{h^4}{2.3.4}F^{IV}a-\cdots$$

$$\cdots-\frac{h^n}{2.3\cdots n}F^na \geqq \frac{h^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}p \text{ und } \leqq \frac{h^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}q$$

seyn. Somit gibt es einen nicht außerhalb p und q, also auch einen nicht außerhalb a und $a+h$ gelegenen Werth $a+\mu h$, für welchen die Gleichung eintritt

$$F(a+h)=Fa+hF'a+\frac{h^2}{2}F''a+\frac{h^3}{2.3}F'''a+\frac{h^4}{2.3.4}F^{IV}a+\cdots$$

$$\cdots+\frac{h^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}(a+\mu h).$$

Und wie dieß soeben für einen positiven Werth von h erwiesen wurde, erweiset es sich auch für einen negativen.

5. Wenn endlich die Function Fx wohl eine erste, zweyte, $\cdots$ und n-te abgeleitete für alle innerhalb a und $a+h$ gelegenen Werthe der x, nicht aber für diese selbst hat; so wird, wenn wir nur α und $\alpha+i$ innerhalb a und $a+h$ nehmen, nach dem bisher Bewiesenen die Gleichung

$$F(\alpha+i)=F\alpha+iF'\alpha+\frac{i^2}{2}F''\alpha+\frac{i^3}{2.3}F'''\alpha+\cdots+\frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(\alpha+\mu i)$$

angesetzt werden dürfen; aus der sich durch ähnliche Schlüsse wie §. 31 die

$$F(a+h)=Fa+hF'a+\frac{h^2}{2}F''a+\frac{h^3}{2.3}F'''a+\cdots+\frac{h^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu h)$$

wird ableiten lassen. Denn lassen wir den Unterschied $\alpha-a$ in das Unendliche abnehmen; so muß, weil Fx für den Werth $x=a$

und hinsichtlich auf einen Zuwachs von demselben Vorzeichen mit h stetig seyn soll, auch der Unterschied $Fa - Fa$ nach seinem absoluten Werthe in das Unendliche abnehmen. Dasselbe muß auch von dem Unterschiede

$$F'a - F'a: \; F''a - F''a: \cdots F^n(a+\mu i) - F^n(a+\mu i)$$

aus gleichem Grunde gelten. Wir dürfen also auch

$$F(a+i) = Fa + iF'a + \frac{i^2}{2}F''a + \frac{i^3}{2.3}F'''a + \cdots + \frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu i) + \Omega$$

schreiben, ingleichen, weil jede Zahl, die sich durch $a+\mu i$ vorstellen läßt, auch durch $a+\mu h$ vorgestellt werden kann, indem $h > i$ ist,

$$F(a+i) = Fa + iF'a + \frac{i^2}{2}F''a + \frac{i^3}{2.3}F'''a + \cdots + \frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu h) + \Omega.$$

Weil aber Fx auch für den Werth $x = a+h$ stetig seyn soll, und zwar hinsichtlich auf einen Zuwachs von entgegengesetztem Vorzeichen mit h: so muß, wenn wir i dem Werthe h in das Unendliche nahe rücken, auch der Unterschied $F(a+h) - F(a+i)$ nach seinem absoluten Werthe in das Unendliche abnehmen. Es muß also auch

$$F(a+h) = Fa + iF'a + \frac{i^2}{2}F''a + \frac{i^3}{2.3}F'''a + \cdots + \frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu h) + \Omega_1$$

seyn. Da endlich bey der unendlichen Annäherung von i an h auch jedes Glied der Reihe

$$iF'a, \; \frac{i^2}{2}F''a, \; \frac{i^3}{2.3}F'''a, \cdots \frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu h)$$

dem gleichnamigen der folgenden

$$hF'a, \; \frac{h^2}{2}F''a, \; \frac{h^3}{2.3}F'''a, \cdots \frac{h^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu h)$$

in das Unendliche nahet, während die Anzahl derselben unverändert bleibt: so dürfen wir (§.) gewiß auch

$$F(a+h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F''a + \frac{h^3}{2.3}F'''a + \cdots + \frac{h^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu h) + \Omega_2$$

schreiben. Bestimmen wir endlich die Zahl μ auf die Art, daß der Werth des Ausdrucks

$$Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F''a + \cdots + \frac{h^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu h)$$

dem Werthe $F(a+h)$ so nahe tritt, als es nur immer möglich ist; so sind die sämtlichen in der nur eben angegebenen Gleichung vorkommenden Ausdrücke bis auf Ω ganz unabhängig von i, und somit muß auch Ω selbst einen von i ganz unabhängigen Werth haben; woraus dann von selbst folgt, das dieser nur der Werth Null seyn könne.

Beyspiel. Auch bey diesem Lehrsatze verstehet sich so wenig, wie bey jenem des §. 29, von dem derselbe nur eine weitere Ausbildung ist, die stillschweigende Bedingung, daß die Function Fx nur eben zur Classe derjenigen gehören müßte, die nach einem für alle Werthe ihrer Veränderlichen gleichlautendem Gesetze bestimmt werden. Wäre z. B. Fx eine Function solcher Art, daß man für alle Werthe von $x \overline{\lessgtr} 1$,

$$Fx = \frac{4x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 4x + 1}{24};$$

für alle höheren aber

$$Fx = \frac{3x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 30x^2 - 5x + 2}{120}$$

hätte: so hätte Fx für alle Werthe von x eine abgeleitete, nicht nur eine erste, sondern auch eine zweyte, dritte und alle folgenden in das Unendliche; es wäre nämlich für

$x \overline{\lessgtr} 1$	$x > 1$
$F'x = \frac{4x^3 - 3x^2 + 6x - 1}{6}$	$= \frac{3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 12x - 1}{24}$
$F''x = 2x^2 - x + 1$	$= \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{2}$
$F'''x = 4x - 1$	$= \frac{3x^2 + 2x + 1}{2}$
$F^{IV}x = 4$	$= 3x + 1$
$F^{V}x = 0$	$= 3.$

Und da diese Formeln für $x = 1$ denselben Werth geben bis auf $F^{IV}x$; so ändert sich die vierte abgeleitete noch stetig. Es muß sich also die Formel

$$F(a+h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F''a + \frac{h^3}{2.3}F'''a + \frac{h^4}{2.3.4}F^{IV}(a+\mu h)$$

auf jeden Werth von a und h anwenden lassen. Setzen wir in der That $a = 0$, $h = 10$; so findet sich

$$F(10) = \frac{90.738}{30} = \frac{1}{24} - \frac{10}{6} + \frac{100}{2} - \frac{1000}{6} + \frac{10.000}{24} F^{IV}(10\mu).$$

Also $F^{IV}(10\mu)=\frac{377.147}{50.000}$. Wäre nun $\mu \overline{\gtrless} \frac{1}{10}$, so wäre $F^{IV}(10\mu)=4$; welches ein unrichtiges Resultat gibt. Nehmen wir aber $\mu>\frac{1}{10}$; so ist $F^{IV}(10\mu)$ von der Form $3x+1=30\mu+1$; und es findet sich $\mu=\frac{327.147}{1,500.000}$: also allerdings zwischen $\frac{1}{10}$ und 1. Würden wir aber $a=1$, $h=9$ annehmen; so fände sich

$$\frac{90.738}{30}=\frac{3}{8}+9+\frac{9^2}{2}2+\frac{9^3.3}{2.3}+\frac{9^4}{2.3.4}F^{IV}(1+9\mu).$$

Für $\mu=0$ wäre nun $F^{IV}(1+9\mu)=4$ also abermahls ein unrichtiges Resultat. Also muß $\mu>0<1$ seyn, und es findet sich $\mu=\frac{177.147}{885.735}$. U. s. w.

§. 83. Zusatz. *1.* Vermittelst dieses wichtigen Satzes, den man von seinem Erfinder gewöhnlich den Taylorschen nennet, läßt sich der Werth des Zuwachses $F(a+h)-Fa$, den eine Function erfährt, wenn ihre Veränderliche aus einem bestimmten Werthe $x=a$ in einen beliebigen anderen durch $a+h$ angedeuteten, übergehet, berechnen, sofern uns die Werthe der abgeleiteten Functionen $F'x$, $F''x$, $F'''x$, $\cdots$ bis zu der n-ten $F^n x$ für den Werth $x=a$ bekannt sind, und wir ferner wissen, daß diese n-te abgeleitete für alle Werthe von $x=a$ bis $x=a+h$ stetig ist, und endlich noch ein Mittel kennen den Werth des letzten Gliedes

$$\frac{h^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu h)$$

zu bestimmen.

§. 84. Zusatz 2. Wenn Fx ganze rationale Function vom m-ten Grade ist, so ist die m-te abgeleitete derselben constant, die $(m+1)$-te und alle folgenden sind für jeden Werth von x gleich 0 (§. 44). Also findet die Bedingung, welche zur Anwendung des Taylorschen Lehrsatzes erforderlich ist, bey jeder solchen Function und für alle Werthe von a und h statt, und weil das Glied

$$\frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(a+\mu h)$$

und alle folgenden verschwinden, sobald $n \overline{\gtrless} m+1$ ist: so kann man den Zuwachs, den eine solche Function erfährt, wenn ihre Veränderliche aus dem Werthe a in den beliebigen $a+h$ übergeht, durch eine Reihe steigender Potenzen des Zuwachses h

darstellen. Wäre z. B. $Fx = 4x^2 - x^3$; so wäre $F'x = 8x - 3x^2$. $F''x = 8 - 6x$, $F'''x = -6$ und alle fongenden abgeleiteten für jeden Werth von x gleich 0. Also hätten wir

$$4(a+h)^2 - (a+h)^3 = 4a^2 - a^3 + h(8a - 3a^2) + \frac{h^2}{2}(8 - 6a) + \frac{h^3}{2.3}(-6).$$

wie sich auch durch die Entwicklung beyder Glieder der Gleichung bestättigt.

§. 83. Zusatz 3. Als ein Beyspiel von ganz besonderer Merkwürdigkeit lasset uns hier die Formel für den Zuwachs einer Potenz. deren Wurzel veränderlich ist, nämlich x^n betrachten. Wir kennen bereits die sämmtlichen abgeleiteten, die eine solche Potenz hat; sie sind nämlich anzufangen von der ersten nx^{n-1}, $n(n-1)x^{n-2}$, $n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, $\cdots$ so daß die $(n-1)$-te $= n(n-1)(n-2)\cdots 2x$, die n-te $= n(n-1)(n-2)\cdots 2.1$ constant ist, die $(n+1)$-te und alle folgenden $= 0$ sind. Daher ist

$$(a+h)^n = a^n + na^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}h^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{1.2.3\cdots(m+1)}a^{n-m-1}h^{m+1} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1.2.3\cdots n}h^n,$$

eine Formel, die man gewöhnlich die Binomialformel nennt; so wie die in den einzelnen Gliedern derselben vorkommenden Coefficienten

$$1.\ n,\ \frac{n(n-1)}{1.2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\ \ldots\ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{1.2.3\cdots(m+1)},\ \ldots$$

die Binomialcoefficienten heißen.

Beyspiel. Nach dieser Formel findet sich

$$(a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3,$$
$$(a+h)^4 = a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4.$$

U. s. w. Setzen wir $a = 1$ und $h = 1$, so ist für jeden ganzzähligen Werth von n

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \cdots + 1.$$

Setzen wir aber $a = 1$ und $h = -1$; so muß weil $1 - 1 = 0$ und $0^n = 0$ ist, für jeden ganzzähligen Werth von n

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \cdots \pm 1 = 0$$

seyn. U. s. w.

§. 86. Zusatz 4. Wie wesentlich auch in diesem Lehrsatze die Bedingung sey, daß selbst die letzte abgeleitete $F^n x$ für alle innerhalb a und $a+h$ liegenden Werthe von x dem Gesetze der Stetigkeit gehorche (von den übrigen versteht es sich dann von selbst), mag uns das Beyspiel der Function $\frac{1}{4-x}$ beweisen. Die Menge der abgeleiteten gehet hier in das Unendliche: sie sind der Reihe nach

$$\frac{1}{(4-x)^2},\ \frac{2}{(4-x)^3},\ \frac{2.3}{(4-x)^4},\ \frac{2.3.4}{(4-x)^5},\ \cdots \frac{2.3\cdots n}{(4-x)^{n+1}},$$

u. s. w. Für den Werth $x=4$ aber werden diese abgeleiteten insgesammt unstetig. Nehmen wir also a z. B. $=3$, h aber $=2$ an: so läßt sich von der Function $F^n x$, wie man auch n bestimme, nie behaupten, daß sie für alle Werthe von $x=a$ bis $x=a+h$ (d. h. von 3 bis 5) stetig verbleibe. Da sich nun

$$F(a+h)=\frac{1}{4-5}=-1,\ Fa=1,\ F'a=1,\ F''a=2,$$
$$F'''a=2.3,\ F^{IV}a=2.3.4,\ \cdots$$

und überhaupt $F^r a=2.3.4\cdots r$ findet; so sollte, wenn die Formel des Lehrsatzes auch noch für diesen Fall gälte,

$$-1=1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+\frac{2^n}{(1-2\mu)^{n+1}}$$

seyn. Nun gibt es aber für jeden geraden Werth von n, der also ein ungerades $n+1$ macht, wirklich einen Werth für μ, der dieser Gleichung genug thut; nämlich der größte den μ annehmen kann, $=1$ gibt $\frac{2^n}{(1-2\mu)^{n+1}}=-2^n$, und es ist ganz gewiß, daß

$$-1=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-2^n$$

oder

$$2^n-1=1+2+2^2+2^3+\cdots 2^{n-1}$$

(§.) sey. Allein bey einem ungeraden n gibt es gar keinen Werth für μ, der jene Gleichung wahr mache, weil $\frac{2^n}{(1-2\mu)^{n+1}}$ fortwährend positiv verbleibt, wenn n ungerade, und somit $n+1$ gerade ist.

§. 87. Zusatz. Wenn sich erweisen läßt, daß die Reihe

$$\frac{h^n}{2.3\cdots n}F^n a+\frac{h^{n+1}}{2.3\cdots n+1}F^{n+1}a+\cdots+\frac{h^{n+r}}{2.3\cdots(n+r)}F^{n+r}(a+\mu h)$$

für jeden Werth, den μ annehmen kann, durch bloße Vermehrung von n kleiner als jeder gegebene Bruch $\frac{1}{N}$ werde und verbleibe, so groß man hinterher auch r macht; so wird (aus §.) auch folgen, daß wir

$$F(a+h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F''a + \frac{h^3}{2.3}F'''a + \cdots \mathit{in\ inf.}$$

setzen dürfen. So ist zum Beyspiel die r-te abgeleitete von $\frac{1}{1+x}$ gleich $\pm\frac{2.3\cdots r}{(1+x)^{r+1}}$. Setzen wir also $Fx = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$, $h > 0$ und < 1; so ist $\frac{h^r}{2.3\cdots r}F^r(a+\mu h)$ auf jeden Fall $\gtreqless h^r$ und die Reihe

$$\frac{h^n}{2.3\cdots n}F^n a + \frac{h^{n+1}}{2.3\cdots n+1}F^{n+1}a + \cdots + \frac{h^{n+r}}{2.3\cdots(n+r)}F^{n+r}(a+\mu h)$$

nimmt ins Unendliche ab, wenn wir n ins Unendliche vermehren; weil sie $\leqq h^n + h^{n+1} + h^{n+2} + \cdots + h^{n+r}$ ist. Also dürfen wir $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 - h^5 + \cdots$ *in inf.* schreiben.

§. 88. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx so beschaffen ist, daß ihre abgeleiteten Functionen, nicht nur die ersten n (wie im vorigen Lehrsatze angenommen wurde) sondern auch alle folgenden in das Unendliche hin, für alle innerhalb a und $a+h$ liegenden Werthe der x meßbare Zahlen sind; für den bestimmten Werth $x = a$ aber Werthe von solcher Art annehmen, daß $F^r x$ für jedes innerhalb a und $a+h$ gelegene x nach seinem absoluten Werthe, fortwährend kleiner verbleibt als eine gegebene Zahl M, r mag so groß werden als man nur will; so haben wir immer die Gleichung

$$F(a+h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F''a + \frac{h^3}{2.3}F'''a + \frac{h^4}{2.3.4}F^{IV}x + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^r}{2.3\cdots r}F^r a + \Omega$$

oder auch

$$F(a+h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F''a + \frac{h^3}{2.3}F'''a + \frac{h^4}{2.3.4}F^{IV}a + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^r}{2.3\cdots r}F^r a + \cdots \mathit{in\ inf.}$$

Beweis. Vermöge des vorigen Lehrsatzes haben wir bey der Voraussetzung des gegenwärtigen, daß $F^r x$ für jeden Werth von r eine meßbare Zahl vorstelle: sofern wir nur x innerhalb a und $a+h$ annehmen, die Gleichung

$$F(a+h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F''a + \frac{h^3}{2.3}F'''a + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^r}{2.3\cdots r}F^r a + \frac{h^{r+1}}{2.3\cdots(r+1)}F^{r+1}(a+\mu h).$$

und wenn wir r und um s vermehren

$$F(a+h) = Fa + hF'a + \frac{h^2}{2}F''a + \frac{h^3}{2.3}F'''a + \cdots + \frac{h^r}{2.3\cdots r}F^r a +$$
$$+ \frac{h^{r+1}}{2.3\cdots(r+1)}F^{r+1}a + \cdots + \frac{h^{r+s+1}}{2.3\cdots(r+s+1)}F^{r+s+1}(a+\mu h).$$

worin das Zeichen μ eine gewisse (nicht eben in beyden Ausdrücken dieselbe) Zahl bedeutet, welche nie außerhalb der Grenzen 0 und 1 liegen wird. Gibt es nun eine Zahl M groß genug, um behaupten zu können, daß $F^r x$ nach seinem absoluten Werthe fortwährend $< M$ verbleibt, so groß man auch r werden lasse, nimmt man nur x stets innerhalb a und $a+h$: so ist ein jedes Glied der Reihe

$$\frac{h^{r+1}}{2.3\cdots(r+1)}F^{r+1}a + \frac{h^{r+2}}{2.3\cdots(r+2)}F^{r+2}a + \cdots$$
$$\cdots + \frac{h^{r+s+1}}{2.3\cdots(r+s+1)}F^{r+s+1}(a+\mu h).$$

die in der zweyten Gleichung statt des Gliedes

$$\frac{h^{r+1}}{2.3\cdots(r+1)}F^{r+1}(a+\mu h)$$

der ersten erscheint, nach seinem absoluten Werthe kleiner als das gleichnamige der Reihe

$$\frac{h^{r+1}}{2.3\cdots(r+1)}M + \frac{h^{r+2}}{2.3\cdots(r+2)}M + \cdots + \frac{h^{r+s+1}}{2.3\cdots(r+s+1)}M.$$

Folglich ist auch der Werth jener ersten Reihe auf jeden Fall kleiner als es der Werth der letzteren selbst in dem Falle ist, wenn wir allen Gliedern ein und dasselbe Vorzeichen zugestehen, d. h. h positiv annehmen. Es läßt sich aber erweisen, daß der Werth dieser letzteren Reihe kleiner als jede gegebene Zahl gemacht werden könne, wenn wir nur r groß genug nehmen, s wachse dann hinterher noch in das Unendliche fort. Denn diese Reihe ist

$$\frac{h^{r+1}M}{2.3\cdots(r+1)}\left[1+\frac{h}{r+2}+\frac{h^2}{(r+2)(r+3)}+\cdots+\frac{h^s}{(r+2)(r+3)\cdots(r+s+1)}\right].$$

nimmt also stärker ab als die nachfolgende

$$\frac{h^{r+1}M}{2.3\cdots(r+1)}\left[1+\frac{h}{r+2}+\left(\frac{h}{r+2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{h}{r+2}\right)^s\right].$$

Nehmen wir also r erst so groß, daß $r+2$ größer als z. B. $2h$ ist: so verbleibt

$$1+\frac{h}{r+2}+\left(\frac{h}{r+2}\right)^2+\cdots \text{ in inf.}$$

(nach §.) < 2. Also ist die nun eben angeführte Reihe für diesen und jeden größeren Werth von r jedesmahl $< \frac{h^{r+1}M}{3.4\cdots(r+1)}$. Der Werth dieses letzteren Ausdruckes aber wird offenbar immer kleiner, je größer wir r nehmen und läßt sich ins Unendliche vermindern. Denn so oft wir r nur um Eins vermehren, multipliciren wir diesen Ausdruck mit einem neuen Factor von der Form $\frac{h}{r+2}$ der somit $< \frac{1}{2}$ ist. Aus §. wissen wir aber, daß durch eine beliebige Anzahl von Wiederholungen eines solchen Verfahrens d. h. durch fortgesetzte Multiplicirung mit Brüchen, die $< \frac{1}{2}$ sind, jede gegebene meßbare Zahl in das Unendliche vermindert werden könne. Um so gewisser also läßt sich die Reihe

$$\frac{h^{r+1}F^{r+1}a}{2.3\cdots(r+1)}+\frac{h^{r+2}}{2.3\cdots(r+2)}F^{r+2}a+\cdots$$
$$\cdots+\frac{h^{r+s+1}}{2.3\cdots(r+s+1)}F^{r+s+1}(a+\mu h)$$

durch bloße Vermehrung von r in das Unendliche vermindern. Daraus aber folgt (nach §.)

$$F(a+h)=Fa+hF'a+\frac{h^2}{2}F''a+\frac{h^3}{2.3}F'''a+\cdots+\frac{h^r}{2.3\cdots r}F^r a+\Omega$$

und

$$F(a+h)=Fa+hF'a+\frac{h^2}{2}F''a+\frac{h^3}{2.3}F'''a+\cdots+\frac{h^r}{2.3\cdots r}F^r a+\cdots \text{ in inf.}$$

§. 89. Zusatz. Ergibt es sich für einen besonderen Werth von a oder auch überhaupt für jeden Werth von x, daß die $(n+1)$-te abgeleitete $F^{n+1}a$ und alle ihr folgenden bloße Nullen sind: so hat man

$$F(a+h)=Fa+hF'a+\frac{h^2}{2}F''a+\cdots+\frac{h^n}{2.3\cdots n}F^n a.$$

Aus §. 84 wissen wir, daß dieser Fall für jeden Werth von a eintritt, so oft die Function Fx eine bloß rationale und ganze Function ist; für einzelne Werthe von a aber diese Erscheinungen auch bey manchen Functionen von einer anderen Art eintreten.

§. 90. Zusatz. Setzen wir $h=z-a$ und somit $a+h=z$, welches erlaubt seyn wird, wenn alle abgeleiteten unserer Function für alle Werthe der Veränderlichen innerhalb a und z meßbare Zahlen sind; und wenn überdieß irgend eine beständige Zahl M groß genug angeblich ist, um behaupten zu können, daß die Werthe aller dieser abgeleiteten, innerhalb der soeben erwähnten Grenzen ihrer Veränderlichen fortwährend $< M$ verbleiben: so erhalten wir

$$Fz = Fa + (z-a)F'a + \frac{(z-a)^2}{2}F''a + \frac{(z-a)^3}{2.3}F'''a + \frac{(z-a)^4}{2.3.4}F^{IV}a + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(z-a)^r}{2.3.4\cdots r}F^r a + \Omega$$

oder

$$Fz = Fa + (z-a)F'a + \frac{(z-a)^2}{2}F''a + \frac{(z-a)^3}{2.3}F'''a + \cdots \textit{ in inf.},$$

welche Formel, zumahl für den besonderen Fall, daß $a=0$ ist, die Maclaurinsche Formel genannt wird.

§. 91. Anmerkung. Ohne mich hier in eine umständliche Prüfung der verschiedenartigen Beweise einzulassen, die für den Taylorschen und Maclaurinschen Satz bisher geführt worden sind: erinnere ich nur, daß sich die Fehlerhaftigkeit der meisten schon durch den Umstand offenbare, daß sie (wie man zu sagen pflegt) zu viel beweisen; d. h. daß man sich Schlüsse erlaubt, aus denen sich, wenn sie zulässig wären, ergeben müßte, daß diese Formel auch in gewissen Fällen gelte, in denen sie doch entschiedener Maßen nicht gilt. Für einen der strengsten Beweise sieht man denjenigen an, den Lagrange (in der *Théorie des fonctions analytiques* und in den *Leçons sur le calcul des fonctions*) gegeben, den auch so viele Andere z. B. Kästner, Tempelhof, Pfaff, Bohnenberger, Mayer, Prasse, Pasquich, Eytelwein, Brosius, Ohm, Young, (*Elements of the differential Calculus. London.* 1831) im wesentlichen noch immer beybehalten haben. Die Schwäche dieses Beweises bestehet (wie auch Hr. Grunert in der Fortsetzung des Klügelschen Wörterbuches B. 5. S. 8. bemerkt) in der Voraussetzung, daß sich $F(x+i)-Fx$ in der Form $Ai^\alpha + Bi^\beta + \ldots$ darstellen lasse, welches, da $F(x+i)-Fx$ jede beliebige Function von i bezeichnen kann, im Grunde nichts anderes als die Voraussetzung ist, daß eine jede Function einer Veränderlichen x unter der Form $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots$ enthalten seyn müsse. Diese Voraussetzung ist aber in solcher Allgemeinheit nicht nur noch unerwiesen, sondern entschieden falsch. So weiß man z. B. recht wohl, daß sich die Function $log\ x$ bey keiner als Basis angenommenen reellen Zahl durch eine solche Reihe darstellen lasse. Man gesteht dieß auch ein; sagt aber, daß der Fall, wo eine solche Entwiklung nicht angeht, nur ausnahmsweise, nur für gewisse Werthe der Veränderlichen eintrete. So lange man also (heißt es) x noch in seiner völligen Allgemeinheit läßt, sey die Annahme $F(x+i) - Fx = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots$ verstattet. Ich will hier nicht die sehr uneigentliche Redensart rügen, daß man x in seiner völligen Allgemeinheit nehme, wenn man es so nimmt, daß es nicht jede beliebige Zahl vorstellen kann. Gerade dieß heißt ja, einen Ausdruck nicht in seiner völligen Allgemeinheit nehmen. Man sollte also vielmehr sich äußern, daß die Gleichung $F(x+i) - Fx = Ai^{\alpha} + Bi^{\beta} + \ldots$ zwar nicht für jeden Werth von x, auch nicht für jeden von i, aber doch immer für gewisse, ja (wenn mann will) unendlich viele Werthe gelte. Aber es handelt sich um den Beweis dieser Behauptung. Diejenige Mathematiker, welche wie Lagrange selbst, oder wie neuerlich auf das Bestimmteste Hr. Ohm (in s. System der Math. Thl. 3. S. 58.) unter einer Function nichts anderes verstehen als einen Ausdruck, in welchem einander mehrere eine Veränderliche Zahl bedeutenden Buchstaben, und allenfalls auch gewisse Ziffernausdrücke vermittelst eines oder mehrerer Operationszeichen verbunden sind, behaupten hier freylich etwas, daß sich nach ihrem Begriffe vollkommen rechtfertigen läßt: wie denn auch Einige von ihnen, nahmentlich Hr. Ohm Beweise für ihre Behauptung geliefert haben, denen im wesentlichen nichts auszusetzen ist. Allein wir dürfen nicht vergessen, daß der Satz, den sie auf solche Weise unter dem Namen des Taylorischen Lehrsatzes darthun, eine Wahrheit von sehr beschränktem Umfange und Gebrauche sey, mit deren Aufstellung wir uns auf dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft nicht wohl befriedigen können. Bey jenem Begriffe von einer Function wäre nämlich der Satz lediglich nur auf solche veränderlichen und von anderen abhängigen Zahlen und Größen anwendbar, von denen wir schon im Voraus wissen, daß ihr Verhältniß der Abhängigkeit sich durch eines oder mehrere Operationszeichen darstellen läßt. Es gibt aber eine viel allgemeinere Wahrheit, die nämlich, daß eine jede Zahl, welche von einer andern nach einem solchen Gesetze abhängt, daß eine abgeleitete angeblich ist, auch der im §. 82 gelieferten Taylorschen Formel gehorchen müsse. Daß dieses eine viel allgemeinere Behauptung sey, sieht Jeder ein; oder wie ließe sich, es wäre denn eben nur durch Benützung des Taylorischen Satzes erwiesen, daß eine jede Zahl, welche von einer andern nach dem soeben erwähnten Gesetze abhängig ist, darstellbar seyn müsse durch einen Ausdruck, der keine andern als jene Operationen in sich faßt, da doch oft nöthig ist, daß wir derselben eine unendliche Menge anwenden, und auch noch hier für einzelne Werthe Ausnahmen Statt finden?

§. 92. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen nicht nur eine erste, sondern auch eine zweyte, dritte,... und n-te abgeleitete hat; und wenn auch diese letzte noch für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x wenigstens stetig ist; so gibt es für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth von x ein sowohl positives als negatives i so klein, daß wir nicht nur die Gleichung

$$F(x \pm i) = Fx \pm iF'x + \frac{i^2}{2}F''x \pm \frac{i^3}{2.3}F'''x + \cdots \pm \frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(x \pm \mu i)$$

ansetzen dürfen, sondern daß überdieß auch jedes Glied in der rechtsliegenden Reihe, welches nur nicht schon für sich selbst $=0$ ist, nach seinem absoluten Werthe größer ist als die algebraische Summe aller nachfolgenden.

Beweis. 1. Wenn x ein innerhalb a und b gelegener Werth ist, und wir nehmen i nur klein genug, damit es sowohl $< x-a$ als auch $< b-x$ sey: so liegt auch $x+i$ sowohl als $x-i$ innerhalb a und b. Die Function Fx hat sonach für alle Werthe ihrer Veränderlichen von $x-i$ bis $x+i$ die n ersten abgeleiteten, und noch die letzte derselben ist stetig; also ergibt sich aus §. 82, daß wir die Gleichung haben:

$$F(x \pm i) = Fx \pm iF'x + \frac{i^2}{2}F''x \pm \frac{i^3}{2.3}F'''x + \cdots \pm \frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(x \pm \mu i).$$

wobey μ eine gewisse nicht außerhalb 0 und 1 liegende Zahl bedeutet. Wenn aber diese Gleichung erst für einen bestimmten Werth von i bestehet: so bestehet sie für jeden noch kleineren um so gewisser.

2. Wenn nun verlangt wird, einen Werth für i zu finden, dabey das vorletzte Glied in der Reihe, nämlich

$$\frac{i^{n-1}}{2.3\cdots(n-1)}F^{n-1}x$$

nach seinem absoluten Werthe größer als das letzte

$$\frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(x+\mu i)$$

wird: so ist es ein Leichtes, diese Forderung zu erfüllen, wenn nur $F^{n-1}x$ für den gegebenen Werth von x nicht eben $=0$ ist, was wir im Lehrsatze uns schon bedungen haben. Weil nämlich $F^n x$ für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x stetig ist; so gibt es unter den sämmtlichen Werthen desselben einen größten in der Bedeutung des §. 24 (I. Abschn.). Bezeichnen wir diesen durch $F^n q$ oder sonst eine andere beliebige größere Zahl durch Q; so ist kein Zweifel, daß $F^n(x+\mu i)$ nach seinem absoluten Werthe $\overline{\overline{<}}\, Q$ ist. Nehmen wir also ein i so klein, daß nebst den beyden Bedingungen $i<x-a$ und $i<b-x$ auch noch die dritte

$$i<\frac{n\,F^{n-1}x}{Q}$$

erfüllt wird: so bestehet gewiß auch noch das Verhältniß

$$i<\frac{n\,F^{n-1}x}{F^n(x+\mu i)}$$

und folglich auch, wenn wir beyderseits durch $\frac{i^{n-1}}{2.3\cdots n}$ multipliciren

$$\frac{i^{n-1}\,i}{2.3\cdots n}<\frac{i^{n-1}\,n\,F^{n-1}x}{2.3\cdots n\,F^n(x+\mu i)}$$

d. i.

$$\frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(x+\mu i)<\frac{i^{n-1}\,F^{n-1}x}{2.3\cdots(n-1)}.$$

3. Wenn es nicht eben das vorletzte, sondern irgend ein früheres Glied ist, von dem man verlangt, daß es nach seinem absoluten Werthe größer als die algebraische Summe aller nachfolgenden Werthe; so können wir diese Aufgabe alsbald auf die nur eben betrachtete zurückführen; indem wir die Reihe rechterhand immer so abkürzen können, daß das uns angegebene Glied darin das vorletzte werde. Denn wenn die n-te abgeleitete $F^n x$ die Beschaffenheit hat, stetig zu seyn; so haben auch alle früheren diese Beschaffenheit, weil sie ja selbst eine

abgeleitete haben. Ist es also z. B. das dritte Glied oder $\frac{i^2}{2}F''x$, daß wir größer als die algebraische Summe aller folgenden machen sollen: so nehmen wir nur ein μ von der Art, daß

$$F(x+i) = Fx + iF'x + \frac{i^2}{2}F''x + \frac{i^3}{2.3}F'''(x+\mu i)$$

sey; wo denn das Glied $\frac{i^3}{3.3}F'''(x+\mu i) =$ der Summe aller auf $\frac{i^2}{2}F''x$ folgenden, oder

$$= \frac{i^3}{2.3}F'''x + \frac{i^4}{2.3.4}F^{IV}x + \cdots + \frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(x+\mu i)$$

ist. Wählen wir nun i so klein, daß nebst den beyden Verhältnissen $i < x - a$ und $i < b - x$ auch noch das dritte Verhältniß

$$i < \frac{3F''x}{F'''(x+\mu i)}$$

eintrit, welches, wenn $F''x$ nicht $= 0$, immer möglich ist: so wird

$$\frac{i^2}{2}F''x > \frac{i^3}{2.3}F'''(x+\mu i),$$

also auch

$$> \frac{i^3}{2.3}F'''x + \frac{i^4}{2.3.4}F^{IV}x \cdots + \frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n(x+\mu i)$$

seyn. Sollte gleich das erste Glied Fx größer als alle folgenden werden: so haben wir nur, wenn

$$F(x+i) = Fx + iF'(x+\mu i)$$

ist, nöthig

$$i < \frac{Fx}{F'(x+\mu i)}$$

zu nehmen.

Beyspiel. So hat die Function $\frac{1}{x}$ für alle innerhalb 0 und jeder anderen Zahl gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen alle abgeleiteten; es gilt also immer die Gleichung

$$\frac{1}{x+i} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x^3} - \frac{i^3}{x^4} + \frac{i^4}{x^5} - \cdots \pm \frac{i^{n-1}}{(x+\mu i)^n}.$$

Setzen wir hier z. B. $x = \frac{1}{2}$: so wird

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+i} = 2 - 4i + 8i^2 - 16i^3 + 32i^4 - \cdots \pm \frac{i^{n-1}}{(\frac{1}{2}+\mu i)^n}.$$

Wollten wir nun einen Werth für i erfahren, bey welchem das $(n-1)$-te Glied dieser Reihe d. i. $\frac{i^{n-2}}{x^{n-1}}$ nach seinem absoluten Werthe größer als das n-te wird: so brauchen wir für μ nur denjenigen nicht außerhalb 0 und 1 gelegenen Werth zu wählen, für den

$$F^n(x+\mu i)=\frac{1}{(\frac{1}{2}+\mu i)^n}$$

am größten wird. Dieß geschieht offenbar für $\mu=0$, wo dieses Glied in 2^n übergehet. Um also

$$i<\frac{nF^{n-1}x}{F^nq}$$

zu erhalten, müssen wir

$$i<\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}$$

wählen. Und in der That genügt schon der Werth $i=\frac{1}{2}$ zu unserem Zwecke; denn das Glied $\frac{i^{n-2}}{x^{n-1}}$ wird bey diesem Werthe $=2$, während das letzte Glied $\frac{i^{n-1}}{(\frac{1}{2}+\mu i)^n}=1$ wird. Auch findet sich für diesen Werth ganz richtig

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1=2-2+2-2+2-2+\cdots\pm 2\mp 1.$$

§. 93. Lehrsatz. Wenn eine Function von x für alle Werthe ihrer Veränderlichen x von a einschließlich bis $a+h$ folgende Gleichung erlaubt:

$$Fx=A+B(x-a)+C(x-a)^2+D(x-a)^3+\cdots+R(x-a)^r+\Omega,$$

worin die Zeichen $A, B, C, D, \cdots R$ gewisse meßbare und von x unabhängige Zahlen bedeuten, Ω aber durch bloße Vermehrung von r in das Unendliche abnimmt; wenn überdieß bekannt ist, daß die Function Fx mindestens für den Werth a und für einen Zuwachs, der von demselben Vorzeichen mit h ist, nicht nur eine erste, sondern auch eine zweyte, dritte und alle folgenden abgeleiteten in das Unendliche fort hat: so muß

$$A=Fa,\ B=F'a,\ C=\frac{F''a}{2},\ D=\frac{F'''a}{2.3},\ \cdots\ R=\frac{F^ra}{2.3\cdots r}$$

seyn.

Beweis. Daß $A=Fa$ seyn müsse, ergibt sich schon daraus, weil die gegebene Gleichung für den Werth $x=a$ bestehen soll, und hier in $Fa=A$ übergehet (§.). Da ferner nicht nur das Glied linker Hand d. i. Fa, sondern auch alle auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vorkommenden Glieder A, $B(x-a)$, $C(x-a)^2$,

$D(x-a)^3$, $\cdots R(x-a)^r$ bis etwa auf Ω, eine erste, zweyte, dritte, und alle folgenden abgeleiteten haben, weil diese Glieder insgesammt bloße rationale Functionen von x sind: so ist, wenn wir zu beyden Seiten der Gleichung die erste abgeleitete nehmen, nach dem vorigen §.

$$F'x = B + 2C(x-a) + 3D(x-a)^2 + \cdots + rR(x-a)^{r-1} + \Omega_1 \quad (1)$$

und diese Gleichung muß für dieselben Werthe, wie die gegebene, bestehen. Es ist also, wenn wir $x=a$ nehmen, $F'a = B + \Omega_1$; woraus (nach §.) $B = F'a$ folgt. Eben so findet sich, wenn wir von der Gleichung (1) abermahls zu beyden Seiten die abgeleitete nehmen,

$$F''x = 2C + 2.3D(x-a) + \cdots + (r-1)rR(x-a)^{r-2} + \Omega_2, \quad (2)$$

woraus sich für

$$x=a,\ F''a = 2C + \Omega_2 \ \text{ und } \ C = \frac{F''a}{2}$$

ergibt. Auf gleiche Weise findet sich

$$F'''x = 2.3D + \cdots + (r-2)(r-1)rR(x-a)^{r-3} + \Omega_3 \quad (3)$$

und daraus für $x=a$,

$$F'''a = 2.3D + \Omega_3 \ \text{ oder } \ D = \frac{F'''a}{2.3}.$$

Man sieht von selbst, wie diese Schlüsse stets fortgesetzt werden können, und allgemein $R = \frac{F^r a}{2.3\cdots r}$ geben.

§. 94. Lehrsatz. Wenn ein Paar Functionen Fx und Φx für einen gewissen innerhalb a und b liegenden Werth von x einander im Werthe gleichkommen, und eben dieß gilt auch von ihren ersten, zweyten, bis zu der n-ten abgeleiteten, so daß sich erst die Werthe der $(n+1)$-ten abgeleiteten $F^{n+1}x$ und $\Phi^{n+1}x$ für den bestimmten Werth von x unterscheiden; wenn überdieß jene abgeleiteten auch stetig sind: so behaupte ich, daß der Unterschied $F(x+i)-\Phi(x+i)$ nach seinem absoluten Werthe durch bloße Verminderung von i kleiner gemacht werden könne, als der Unterschied zwischen irgend einer von diesen Functionen und einer dritten fx, bey der nicht eben so wie zwischen Fx und Φx, alle die nachstehenden $(n+1)$ Gleichungen $Fx = fx$, $F'x = f'x$, $F''x = f''x$, $\cdots F^n x = f^n x$ Statt finden.

Beweis. Weil die zwey Functionen Fx und Φx, wenigstens $(n+1)$ abgeleitete haben, und auch noch diese stetig sind; so gelten die beyden Gleichungen

$$F(x+i)=Fx+iF'x+\frac{i^2}{2}F''x+\cdots$$
$$\cdots+\frac{i^n}{2.3\cdots n}F^n x+\frac{i^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}F^{n+1}(x+\mu i)$$
$$\Phi(x+i)=\Phi x+i\Phi' x+\frac{i^2}{2}\Phi'' x+\cdots$$
$$\cdots+\frac{i^n}{2.3\cdots n}\Phi^n x+\frac{i^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}\Phi^{n+1}(x+\nu i),$$

wo μ und ν ein Paar nicht außerhalb 0 und 1 liegende Zahlen bedeuten. Weil ferner für den bestimmten Werth von x

$$Fx=\Phi x.\ F'x=\Phi' x.\ F''x=\Phi'' x.\ \cdots\ F^n x=\Phi^n x$$

seyn soll: so erhalten wir

$$F(x+i)-\Phi(x+i)=\frac{i^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}[F^{n+1}(x+\mu i)-\Phi^{n+1}(x+\nu i)].$$

Der Unterschied $F^{n+1}(x+\mu i)-\Phi^{n+1}(x+\nu i)$ verändert sich mit i, er kann aber, wenn wir i. anzufangen von einem gewissen Werthe j, in das Unendliche abnehmen lassen, nie größer werden, als er dann wird, wenn wir für $F^{n+1}(x+\mu i)$ den größten, für $\Phi^{n+1}(x+\nu i)$ den kleinsten Werth setzen, welchen die beyden Functionen $F^{n+1}(x+i)$ und $\Phi^{n+1}(x+i)$ innerhalb x und $x+j$ annehmen: und solche größte und kleinste Werthe derselben muß es vermöge der vorausgesetzten Stetigkeit derselben geben. Bezeichnen wir nun diesen größten Unterschied durch Q: so ist nach seinem absoluten Werthe

$$F(x+i)-\Phi(x+i)\overline{\overline{<}}\frac{i^{n+1}Q}{2.3\cdots(n+1)}.$$

Wenn nun in dem Verhältniße zwischen den beyden Functionen Fx und fx nicht einmahl die erste im Lehrsatze angeführte Gleichung nämlich $Fx=fx$ bestehet: so nimmt der Unterschied $F(x+i)-f(x+i)$, so sehr er sich auch mit i vermindern mag, sicher doch nicht in das Unendliche ab, weil sonst aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Functionen Fx und fx folgen müßte, daß $Fx=fx$ sey. Es gibt also eine Zahl P, die klein genug ist, um immer kleiner zu bleiben als dieser Unterschied nach seinem absoluten Werthe. Also ist $P<F(x+i)-f(x+i)$. Nehmen wir demnach i so klein, daß $i^{n+1}<2.3\cdots(n+1)\frac{P}{Q}$: so wird auch $\frac{i^{n+1}Q}{2.3\cdots(n+1)}<P$ und um so gewisser $<F(x+i)-f(x+i)$ nach seinem absoluten Werthe. Wenn aber $Fx=fx$, und vielmahl auch

etliche der Gleichungen $F'x = f'x$, $F''x = f''x$, $\cdots$ bestehen: so seyen $F^m x = f^m x$ die höchst abgeleiteten, welche einander noch gleichen, und m hiebey $< n$. Es ist aber

$$F(x+i) = Fx + iF'x + \frac{i^2}{2}F''x + \cdots$$
$$\cdots + \frac{i^m}{2.3\cdots m}F^m x + \frac{i^{m+1}}{2.3\cdots(m+1)}F^{m+1}(x+\mu i)$$
$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \cdots$$
$$\cdots + \frac{i^m}{2.3\cdots m}f^m x + \frac{i^{m+1}}{2.3\cdots(m+1)}f^{m+1}(x+\nu i).$$

wo μ und ν nicht dieselben, sondern nur ähnliche Bedeutungen, wie im vorhergehenden, haben. Mithin ist

$$F(x+i) - f(x+i) = \frac{i^{m+1}}{2.3\cdots(m+1)}[F^{m+1}(x+\mu i) - f^{m+1}(x+\nu i)].$$

Weil aber $F^{m+1}x$ nicht $= f^{m+1}x$: so nähern sich auch $F^{m+1}(x+\mu i)$ und $f^{m+1}(x+\nu i)$ bey der unendlichen Abnahme von i nicht ins Unendliche. Bezeichnen wir also durch P eine Zahl so klein, daß der Unterschied $[F^{m+1}(x+\mu i) - f^{m+1}(x+\nu i)]$ nach seinem absoluten Werthe fortwährend größer verbleibt, als sie: so haben wir $F(x+i) - f(x+i) > \frac{i^{m+1}}{2.3\cdots(m+1)}P$. Wenn wir somit einen Werth für i klein genug wählen, damit $i^{n-m} < (m+2)(m+3)\cdots(n+1)\frac{P}{Q}$ ausfalle: so ist auch $\frac{i^{n+1}}{2.3\cdots(n+1)}Q < \frac{i^{m+1}}{2.3\cdots(m+1)}P$. Um so gewisser $F(x+i) - \Phi(x+i) < F(x+i) - f(x+i)$.

Beyspiel. Sey

$$Fx = \frac{3x^4 - 2x^3 + 6x + 3}{12};\quad \Phi x = x^3 - 2x^2 + 2x;\quad fx = x^3 + 2x^2 - 6x + 4;$$

so ist

$$\begin{array}{lll}
F'x = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{2}; & \Phi'x = 3x^2 - 4x + 2; & f'x = 3x^2 + 4x - 6; \\
F''x = 3x^2 - x; & \Phi''x = 6x - 4; & f''x = 6x + 4; \\
F'''x = 6x - 1; & \Phi'''x = 6; & f'''x = 6; \\
F^{IV}x = 6; & \Phi^{IV}x = 0; & f^{IV}x = 0.
\end{array}$$

Nehmen wir nun für x den besonderen Werth 1 an: so findet sich

$$\begin{array}{ll}
Fx = \Phi x = fx = 1; & \\
F'x = \Phi'x = f'x = 1; & \\
F''x = \Phi''x = 2; & \text{aber } f''x = 10; \\
F'''x = 5; & \Phi'''x = f'''x = 6; \\
F^{IV}x = 6; & \Phi^{IV}x = f^{IV}x = 0.
\end{array}$$

Nach unserem Lehrsatze werden somit die beyden Functionen $F(x+i)$ und $\Phi(x+i)$ für den kleinsten Werth von i einander näher kommen als $F(x+i)$ und $f(x+i)$ oder $\Phi(x+i)$ und $f(x+i)$. In der That findet sich aber für den Werth $x=1$

$$F(1+i)=1+i+i^2+\frac{5i^3}{6}+\frac{i^4}{4}$$
$$\Phi(1+i)=1+i+i^2+i^3$$
$$f(1+i)=1+i+5i^2+i^3.$$

Also der Unterschied

$$F(1+i)-\Phi(1+i)=-\frac{i^3}{6}+\frac{i^4}{4}$$
$$F(1+i)-f(1+i)=-4i^2-\frac{i^3}{6}+\frac{i^4}{4},$$

wo denn der zweyte nach seinem absoluten Werthe offenbar größer ist als der erste, wenn wir z. B. nur $i=1$ setzen.

§. 93. Lehrsatz. Wenn eine Function $F(x,y)$ zweyer von einander unabhängiger Veränderlichen x,y für jeden innerhalb x und $x+\Delta x$ gelegenen Werth der x, und für jeden innerhalb y und $y+\Delta y$ gelegenen Werth der y, eine erste, zweyte, $\cdots$ und m-te abgeleitete in Hinsicht auf x hat: wenn ferner auch $\frac{dF(x,y)}{dx}$ noch eine erste, zweyte, $\cdots$ p-te: $\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}$ noch eine erste, zweyte, $\cdots$ q-te u. s. w.; $\frac{d^mF(x,y)}{dx^m}$ noch eine erste, zweyte, $\cdots$ t-te abgeleitete in Hinsicht auf y hat; wenn endlich diese letzte abgeleitete innerhalb der Grenzen x und $x+\Delta x$ und y und $y+\Delta y$ stetig sind; die Function $F(x,y)$ selbst aber stetig auch noch für die Werthe x und $x+\Delta x$, y und $y+\Delta y$ ist: so läßt sich jederzeit die Gleichung ansetzen

$$\begin{aligned}
&F(x+\Delta x.y+\Delta y)= \\
&=F(x.y)+\Delta x\frac{dF(x,y)}{dx}+\frac{\Delta x^2}{2}\cdot\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}+\cdots \\
&\qquad\cdots+\frac{\Delta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{d^mF(x+\mu\Delta x.y)}{dx^m}+ \\
&+\Delta y\frac{dF(x.y)}{dy}+\frac{\Delta y^2}{2}\cdot\frac{d^2F(x.y)}{dy^2}+\cdots+\frac{\Delta y^n}{2.3\cdots n}\cdot\frac{d^nF(x,y+\nu\Delta y)}{dy^n}+ \\
&+\Delta x\Delta y\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy}+\Delta x\frac{\Delta y^2}{2}\cdot\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy^2}+\cdots \\
&\qquad\cdots+\Delta x\frac{\Delta y^p}{2.3\cdots p}\cdot\frac{d^{p+1}F(x,y+\pi\Delta y)}{dx\,dy^p}+
\end{aligned}$$

$$+\frac{\Delta x^2}{2}\Delta y\frac{d^3F(x,y)}{dx^2\,dy}+\frac{\Delta x^2}{2}\cdot\frac{\Delta y^2}{2}\cdot\frac{d^4F(x,y)}{dx^2\,dy^2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\Delta x^2}{2}\cdot\frac{\Delta y^q}{2.3\cdots q}\cdot\frac{d^{q+2}F(x,y+\varkappa\Delta y)}{dx^2\,dy^q}+$$
$$+\cdots+$$
$$+\frac{\Delta x^m}{2.3\cdots m}\Delta y\frac{d^{m+1}F(x+\mu\Delta x,y)}{dx^m\,dy}+\frac{\Delta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{\Delta y^2}{2}\cdot\frac{d^{m+2}F(x+\mu\Delta x,y)}{dx^m\,dy^2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\Delta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{\Delta y^t}{2.3\cdots t}\cdot\frac{d^{m+t}(x+\mu\Delta x,y+\tau\Delta y)}{dx^m\,dy^t}.$$

B e w e i s. Aus den vorausgesetzten Bedingungen ergibt sich, wenn wir nur x um Δx wachsen lassen nach §. 82

$$F(x+\Delta x,y)=F(x,y)+\Delta x\frac{dF(x,y)}{dx}+\frac{\Delta x^2}{2},\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\Delta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{d^mF(x+\mu\Delta x,y)}{dx^m}. \qquad (1)$$

Wächst aber auch y um Δy: so muß

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y)=F(x.y+\Delta y)+\Delta x\frac{dF(x,y+\Delta y)}{dx}+$$
$$+\frac{\Delta x^2}{2}\cdot\frac{d^2F(x,y+\Delta y)}{dx^2}+\cdots+\frac{\Delta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{d^mF(x+\mu\Delta x,y+\Delta y)}{dx^m} \qquad (2)$$

seyn. Allein das Glied $F(x.y+\Delta y)$ läßt sich abermahls auf folgende Weise entwickeln:

$$F(x.y+\Delta y)=F(x.y)+\Delta y\frac{dF(x.y)}{dy}+\frac{\Delta y^2}{2}\cdot\frac{d^2F(x,y)}{dy^2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\Delta y^n}{2.3\cdots n}\cdot\frac{d^nF(x,y+\nu\Delta y)}{dy^n}. \qquad (3)$$

Ferner läßt sich auch das Glied $\Delta x\frac{dF(x,y+\Delta y)}{dx}$ entwickeln, wenn wir $\frac{dF(x,y)}{dx}$ als eine ursprüngliche Function betrachten, deren erste, zweyte, $\cdots p$-te abgeleitete in Hinsicht auf y durch $\frac{d^2F(x.y)}{dx\,dy}$, $\frac{d^3F(x.y)}{dx\,dy^2}$, $\cdots$ $\frac{d^{p+1}F(x.y)}{dx\,dy^p}$ vorgestellt werden können. Wir erhalten also

$$\Delta x\frac{dF(x,y+\Delta y)}{dx}=\Delta x\frac{dF(x.y)}{dx}+\Delta x\Delta y\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy}+$$
$$+\Delta x\frac{\Delta y^2}{2}\cdot\frac{d^3F(x.y)}{dx\,dy^2}+\cdots+\Delta x\frac{\Delta y^p}{2.3\cdots p}\cdot\frac{d^{p+1}F(x,y+\pi\Delta y)}{dx\,dy^p}. \qquad (4)$$

Eben so läßt sich das Glied $\frac{\Delta x^2}{2}\cdot\frac{d^2F(x.y+\Delta y)}{dx^2}$ noch weiter entwickeln, wenn wir $\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}$ als eine ursprüngliche Function betrachten, deren erste, zweyte, $\cdots$ q-te abgeleitete in Hinsicht auf y durch $\frac{d^3F(x,y)}{dx^2\,dy}$, $\frac{d^4F(x,y)}{dx^2\,dy^2}$, $\cdots$ $\frac{d^{q+2}F(x,y)}{dx^2\,dy^q}$ vorgestellt werden können. Daher

$$\frac{\varDelta x^2}{2}\cdot\frac{d^2F(x,y+\varDelta y)}{dx^2}=\frac{\varDelta x^2}{2}\cdot\frac{d^2F(x,y)}{dx^2}+\frac{\varDelta x^2}{2}\varDelta y\frac{d^3F(x,y)}{dx^2\,dy}+$$
$$+\frac{\varDelta x^2}{2}\cdot\frac{\varDelta y^2}{2}\cdot\frac{d^4F(x,y)}{dx^2\,dy^2}+\cdots+\frac{\varDelta x^2}{2}\cdot\frac{\varDelta y^q}{2.3\cdots q}\cdot\frac{d^{q+2}F(x,y+\varkappa\varDelta y)}{dx^2\,dy^q}. \quad (5)$$

U. s. w. Endlich kann mann auch das Glied

$$\frac{\varDelta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{d^mF(x+\mu\varDelta x,y+\varDelta y)}{dx^m}$$

entwickeln, wenn wir $\frac{d^mF(x+\mu\varDelta x,y)}{dx^m}$ als eine ursprüngliche Function betrachten, deren erste, zweyte, $\cdots$ t-te abgeleitete in Hinsicht auf y durch

$$\frac{d^{m+1}F(x+\mu\varDelta x,y)}{dx^m\,dy},\ \frac{d^{m+2}F(x+\mu\varDelta x,y)}{dx^m\,dy^2},\ \cdots\ \frac{d^{m+t}F(x+\mu\varDelta x,y)}{dx^m\,dy^t}$$

vorgestellt werden können. Wir erhalten also

$$\frac{\varDelta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{d^mF(x+\mu\varDelta x,y+\varDelta y)}{dx^m}=$$
$$=\frac{\varDelta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{d^mF(x+\mu\varDelta x,y)}{dx^m}+\frac{\varDelta x^m}{2.3\cdots m}\varDelta y\frac{d^{m+1}F(x+\mu\varDelta x,y)}{dx^m\,dy}+$$
$$+\frac{\varDelta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{\varDelta y^2}{2}\cdot\frac{d^{m+2}F(x+\mu\varDelta x,y)}{dx^m\,dy^2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\varDelta x^m}{2.3\cdots m}\cdot\frac{\varDelta y^t}{2.3\cdots t}\cdot\frac{d^{m+t}F(x+\mu\varDelta x,y+\tau\varDelta y)}{dx^m\,dy^t}. \quad (6)$$

Die Substituirung der Werthe (3), (4), (5), (6) in (2) gibt die Gleichung des Lehrsatzes.

§. 96. Zusatz. Ist $F(x,y,z\cdots)$ eine ganze rationale Function der mehreren frey Veränderlichen x, y, z, $\cdots$, so treten alle Bedingungen, welche zur Anwendbarkeit der Formel des vorigen Lehrsatzes erforderlich sind, für jeden Werth von x, y, z, $\cdots$ und $\varDelta x, \varDelta y, \varDelta z, \cdots$ ein; so zwar, daß, wenn die Function vom m-ten Grade ist, alle abgeleiteten, die durch eine mehr als m hohe Ableitung genommen werden, $=0$ sind. Die Veränderung die eine solche Function erfährt, wenn ihre Veränderlichen um beliebige Stücke $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots$ wachsen, d. h.

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \cdots) - F(x, y, z, \cdots)$$

läßt sich also jederzeit durch eine Reihe steigender Potenzen dieser Zuwächse selbst darstellen. So wäre z. B., wenn wir

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y - 2xy^2 + y^3$$

hätten:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = 3x^2 + 4xy - 2y^2; \quad \frac{d^2F(x,y)}{dx^2} = 6x + 4y; \quad \frac{d^3F(x,y)}{dx^3} = 6;$$

$$\frac{dF(x,y)}{dy} = 2x^2 - 4xy + 3y^2; \quad \frac{d^2F(x,y)}{dy^2} = -4x + 6y; \quad \frac{d^3F(x,y)}{dy^3} = 6;$$

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy} = 4x - 4y; \quad \frac{d^3F(x,y)}{dx\,dy^2} = -4; \quad \frac{d^3F(x,y)}{dx^2\,dy} = 4$$

und alle folgenden $=0$. Also fände sich

$$(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - 2(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 + (y+\Delta y)^3 =$$
$$= x^3 + 2x^2y - 2xy^2 + y^3 + (3x^2 + 4xy - 2y^2)\Delta x + (6x + 4y)\frac{\Delta x^2}{2} +$$
$$+ \frac{6\Delta x^3}{2.3} + (2x^2 - 4xy + 3y^2)\Delta y + (-4x + 6y)\frac{\Delta y^2}{2} + 6\frac{\Delta y^3}{2.3} +$$
$$+ (4x - 4y)\Delta x\Delta y - 4\Delta x\frac{\Delta y^2}{2} + 4\frac{\Delta x^2}{2}\Delta y,$$

wie sich auch durch die Entwicklung beyder Glieder der Gleichung bestättigt.

§. 97. Zusatz. Wenn nicht nur die m oder n ersten, sondern auch alle folgenden abgeleiteten von $F(x,y)$ hinsichtlich jeder Veränderlichen $x, y, \cdots$ meßbare Zahlen sind (wohin auch der Fall gehört, wo diese abgeleiteten anzufangen von einer gewissen zu Null werden); so kann die Reihe, aus welcher das rechte Glied der Gleichung zusammengesetzt ist, so weit als man will fortgesetzt werden; und wenn es sich zeigt, daß sie convergire; so kann sie (nach §.) auch als fortschreitend in das Unendliche angesehen werden.

§. 98. Zusatz. Dieß Letztere ist nahmentlich jederzeit, wenn alle abgeleiteten von $F(x,y)$ fortwährend kleiner als eine gewisse beständige Zahl M verbleiben; was sich auf ähnliche Art wie §. 88 erweiset.

§. 99. Zusatz. Und auf eine ähnliche Art wie §. 92 läßt sich auch darthun, daß es in allen Fällen, wo sich die Formel des

Lehrsatzes anwenden läßt, auch möglich sey, wenn man die Zuwächse $\Delta x, \Delta y$ einander alle gleich setzt, und die Reihe dann nach den Potenzen von Δx ordnet, dieß Δx so klein zu nehmen, daß jedes Glied, welches in einer und derselben Potenz von Δx multiplicirt ist, sofern sein Coefficient nicht $=0$ ist, größer als die Summe aller folgenden Glieder ausfällt.