Für μ gilt: $0 < \mu < 1$.

Stolz (Grundzüge I S. 97) hat gezeigt, daß man die Existenz von $F'(a+h)$. $F''(a+h) \ldots F^{(n-1)}(a+h)$ nicht vorauszusetzen braucht. Bolzanos Beweis ist in dieser Richtung nicht befriedigend. (Vergl. § 31).

Im Beispiele wurden einige Rechenfehler verbessert.

Literatur: Encyklop. II A 2, Voß *11*; Hobson 2, Aufl. II S. 198.

§ 87. Es genügt, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a+\mu h) = 0$ ist.

§ 88. Im wesentlichen schon bei Cauchy, Calc. inf. 37e leç.: Calc. dif. 9e leç. Es ist $(n!)^2 = [1.n].[2.(n-1)] \ldots [n.1]$.

Kein Faktor in den Klammern [ ] ist $< n$; es ist nämlich $a(n-a+1) - n = (a-1)(n-a) \geqq 0$ für $a = 1.2 \ldots n$. Es ist daher $(n!)^2 \geqq n^n$, also $n! \geqq n^{\frac{n}{2}}$, $\frac{h^n}{n!} \leqq \left|\frac{h}{\sqrt{n}}\right|^n$ und endlich $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h^n}{n!} = 0$ und auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a+\mu h) = 0$.

Auf Grund dieses Satzes kann man leicht die Entwickelung der Funktionen e^x, $\sin x$, $\cos x$ in Taylorsche Reihen bekommen.

§ 89. Aus $F^{(n+1)}(a) = F^{(n+2)}(a) = \ldots = 0$ folgt nicht

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a).$$

Als Beispiel führen wir die Funktion $C(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$, $C(0) = 0$ an, die schon von Cauchy (Calc. diff. 10e leç.) betrachtet wurde. Hier ist $C^{(n)}(0) = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ Die Funktion $C(x)$ kann auch in der Form $C(x) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\frac{-1}{x^2+\frac{1}{k}}}$ geschrieben werden. S. z. B. Pierpont II, S. 214; Hobson, 2. Aufl., II, S. 211,

§ 93. Der Satz ist richtig, sein Beweis aber nicht vollständig.

Kann $F(x)$ im Intervalle $[a, a+h)$ durch eine Potenzreihe $F(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \ldots$ dargestellt werden, so folgt daraus die Existenz aller Ableitungen von $F(x)$ im Intervalle $[a, a+h)$. Um die Ableitungen zu erhalten, braucht man ja nur die Reihe gliedweise zu differenzieren. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

§ 95. Die Herleitung der Taylorschen Formel für Funktionen von zwei Veränderlichen ist im Anschluß an Lagrange, F. Anal. I. 12. durchgeführt. Die Bedingungen der Giltigkeit sind aber nicht ganz vollständig angegeben. Zu dieser Herleitung vergl. Stolz, Grundzüge I S. 140. (Die übliche in den Lehrbüchern angegebene Herleitung stammt im wesentlichen von Cauchy, Calc. dif. 23e leç. her.)

§ 97. Vergl. die Anm. zu § 89.

LITERATURVERZEICHNIS.

ÄLTERE SCHRIFTEN.*)

Bohnenberger, Anfangsgründe der höheren Analysis, Tübingen 1841 (U.-B.)
Bolzano. Paradoxien des Unendlichen. Herausgegeben nach dem schriftlichen

*) Die mit U.-B. bezeichneten Schriften befinden sich in der Prager Universitätsbibliothek.

Die mit B. B. bezeichneten Schriften befinden sich in Bolzanos Handbibliothek, welche gegenwärtig in der Prager Universitätsbibliothek aufbewahrt wird.

Nachlasse des Verfassers von Dr. F. Přihonsky, Leipzig 1851. Neue Auflage von A. Höfler, mit Anmerkungen versehen von Hans Hahn. (Philos. Bibl. 99, Meiner), Leipzig 1920.

Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Prag 1817 (Abh. d. k. Gesellsch. d. Wissensch.).
Neue Auflage Ostwalds Klassiker 153, Leipzig 1905 von Jourdain, Tschechische Übersetzung von Studnička, Časopis pro pěst. mat. a fys. 11, 1881, S. 1—38.

Brosius, Anfangsgründe der Differential und Integralrechnung, 2. Ausg., Cöln 1830 (B. B.).

Busse, Neue Methode des Größten und Kleinsten, Freyberg 1808 (U.-B.).

Cauchy, Cours d'Analyse, Paris 1821 (Oeuvres, 2. sér., 3. vol).
Deutsche Übersetzung Huzler, Königsberg 1828 (B. B.), Itzigsohn, Berlin 1885.

Cauchy, Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le Calcul Infinitésimal, Paris 1823 (Oeuvres 2. sér., 4. vol.).

Cauchy, Leçons sur le Calcul différentiel, Paris 1829 (Oeuvres 2. sér., 4. vol.).

Eytelwein, Grundlehren der höheren Analysis (2 Bde), Berlin 1824 (B. B.).

Fries, Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet, Heidelberg 1822 (B. B.).

Kästner, Mathematische Anfangsgründe (4 T., 10 Bde), Göttingen 1792—97 (B. B.).

Klügel, Mathematisches Worterbuch, Leipzig 1803—1831 (5 T., 6 Bde) (B. B.); Supplemente (Grunert), Leipzig (2 Bde) 1833, 36 (B. B.).

Lacroix, Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, 2e éd., Paris 1806: Deutsche Übersetzung, Berlin 1817 (B. B.).

Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, 1ère éd, Paris 1797: Deutsche Übersetzung von Grüson, Berlin 1798, 99 (B. B.): 2e éd. Paris 1813.

Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions, Paris 1806 (B. B.).
Beide Werke: Oeuvres éd. p. Serret, 9, 10: Deutsche Übersetzung von Crelle I, II, Berlin 1823, 24.

Mayer, Vollständiger Lehrbegriff der höheren Analysis (2 Bde), Göttingen 1818 (B. B.).

Ohm, Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik (9 T.), Berlin-Nürnberg 1828—32 (1—3 T. B. B.).

Pasquich, Anfangsgründe der gesammten theoretischen Mathematik (2 Bde), Wien 1812 (B. B.).

Pfaff, Disquisitiones analyticae, Helmstadt 1797 (B. B.).

Prasse, Institutiones analyticae, Leipzig 1813 (B. B.).

Tempelhof, Analysis des Unendlichen, Berlin 1770 (B. B.).

Young, The Elements of the differential calcul, London 1831 (B. B.).

NEUERE SCHRIFTEN.

Dini (Lüroth, Schepp), Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe, Leipzig 1892.

Fouët, Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques, I., 2e éd., Paris 1907.

Genocchi-Peano (Bohlmann. Schepp). Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung. Leipzig 1899.
Hahn. Theorie der reellen Funktionen I.. Berlin 1921.
Hausdorf. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.
Hobson. The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Cambridge 1907, 2. ed. I. 1921. II. 1926.
Lebesgue. Leçons sur l'intégration. Paris 1904.
Pascal. Esercizi critici di calcolo differenziale e integrale. 3 ed.. Milano 1921.
Perron. Irrationalzahlen. Berlin u. Leipzig. 1921.
Petr. Počet differenciální. Praha 1923.
Pierpont. Lectures on the theory of functions of real variables. Boston I. 1905. II. 1912.
Rothe. Vorlesungen über höhere Mathematik, Wien 1921.
Stolz. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. 18. 1881. 255—279.
Stolz. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung I.. Leipzig 1893.
de la Vallée Poussin. Cours d'analyse infinitesimale, I. 4e éd., Louvain-Paris 1921.

ENCYKLOPÄDIE-ARTIKEL.

I A 3 Schönflies. Mengenlehre.
II A 1 Pringsheim. Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre .
II A 2 Voss. Differential und Integralrechnung.
II C 1 Pringsheim-Faber. Algebraische Analysis.
II C 4 Bieberbach. Neuere Untersuchungen über Funktionen komplexer Variablen.
II C 9 Rosenthal (Borel. Zoretti. Montel. Fréchet). Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen.