ERSTER ABSCHNITT.

STETIGE UND UNSTETIGE FUNCTIONEN.

§. 1. Uibergang. Aus §. 27, §. 29 und §. 34 der Einleitung ersehen wir, es gebe Fuctionen, deren Differenz in das Unendliche abnimmt, so fern die Differenz ihrer Veränderlichen selbst in das Unendliche abnimmt. Und zwar tritt dieser Fall bey den erwähnten Functionen für jeden beliebigen wenn nur doch meßbaren Werth ihrer Veränderlichen ein. Die Function des §. 36 (Einl.) aber macht eine Ausnahme von dieser Regel in dem besonderen Falle, wenn der Nenner $y=0$ wird. Denn dann ist

$$\varDelta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\varDelta\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}=\frac{x+\varDelta x}{0+\varDelta y}-\frac{x}{0},$$

ein Ausdruck, der eine negative unendlich große Zahl anzeigt. Da es ferner erlaubt ist, uns das Gesetz der Abhängigkeit einer Zahl von einer anderen zu denken, wie wir wollen; so versteht sich von selbst, daß wir uns auch eine Zahl W denken können, deren Werth durch die Werthe einer anderen auf eine solche Weise bestimmt würde, wobei die Differenz $\varDelta W$ nicht nur für einige, sondern für alle Werthe der x die Eigenschaft, in das Unendliche abzunehmen, wenn $\varDelta x$ in das Unendliche abnimmt, ermangelte, entweder weil es unter den Werthen, die $\varDelta x$ annimmt, indem es in das Unendliche abnimmt, einige gibt, für welche $\varDelta W$ gar keinen meßbaren Werth hat, oder weil dieses $\varDelta W$ nicht ins Unendliche abnimmt. Ein solcher Fall wäre z. B. vorhanden, wenn wir festsetzten, daß eine gewisse Zahl W für jeden Werth der x, der unter der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ enthalten ist, $=ax$, für jeden anderen Werth aber $=ax+b$ seyn soll. Da es nämlich zu jedem Werthe von x, welcher der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ nicht unterstehet, andere darunter enthaltene gibt, die jenem so nahe treten, daß der Unterschied Δx kleiner als jedes gegebene $\frac{1}{N}$ werden kann: so übersieht man leicht. daß es für jedes x und für jedes auch noch so klein angenommene Δx ein noch kleineres Δx gäbe. dabei das zugehörige $\Delta W = a\,\Delta x + b$ oder $= a\,\Delta x - b$ ausfiele: also gewiß nicht in das Unendliche abnehmen könnte. Diese Verschiedenheit in dem Verhalten der Functionen ist gewiß wichtig genug. um die Bezeichnung durch eigene Kunstworte zu verdienen.

§. 2. Erklärung. Wenn eine einförmige Function Fx von einer oder auch mehreren Veränderlichen so beschaffen ist. daß die Veränderung. die sie erfährt. indem eine ihrer Veränderlichen x aus dem bestimmten Werthe x in den veränderten $x + \Delta x$ übergehet. in das Unendliche abnimmt. wenn Δx in das Unendliche abnimmt. wenn also der Werth Fx sowohl als auch der Werth $F(x + \Delta x)$. der letztere wenigstens anzufangen von einem gewissen Werthe der Differenz Δx für alle kleineren abermahls meßbar ist. der Unterschied $F(x + \Delta x) - Fx$ aber seinem absoluten Werthe nach kleiner als jeder gegebene Bruch $\frac{1}{N}$ wird und verbleibt. wenn man nur Δx klein genug nimmt. und so klein man es dann auch noch ferner werden läßt: so sage ich. daß sich die Function Fx für den Werth x stetig verändere. und zwar bey einem positiven Zuwachse oder in positiver Richtung. wenn das nur eben gesagte bey einem positiven Werthe von Δx eintritt: und daß sie dagegen sich stetig verändere bey einem negativen Zuwachse von x oder in negativer Richtung. wenn das Gesagte bey einem negativen Werthe von Δx Statt hat: wenn endlich das Gesagte bey einem positiven sowohl als negativen Zuwachse von x gilt: so sage ich schlechtweg nur. daß Fx stetig sey für den Werth x. oder ich setze. wenn etwa ein Mißverstand zu besorgen ist. zu. daß Fx stetig sey für einen positiven sowohl als negativen Zuwachs. In dem entgegengesetzten Falle sage ich. daß die Function Fx für ein positives oder negatives Δx oder für beyde das Gesetz der Stetigkeit verletze, oder unstetig sey oder sich plötzlich ändere. In dem besonderen Falle. wenn die Verletzung der Stetigkeit für den Werth $x = a$ daher rührt, daß alle Unterschiede. welche durch $F(a + \Delta x) - Fa$ vorgestellt werden können. wenn das entweder positive oder negative Δx in das Unendliche abnimmt. $> \frac{1}{N}$ verbleiben: erlaube ich mir zu sagen, daß die Function Fx bey dem Werthe $x=a$ einen Sprung mache. Rührt aber die erwähnte Verletzung daher, daß unsere Function für den Werth $x=a$ ihrer Veränderlichen gar keinen meßbaren Werth hat: so sage ich, daß sie für diesen Werth ihrer Veränderlichen eine Lücke habe.

§. 3. Anmerkung. Wie ich es hier thue, ward der Begriff der Stetigkeit im Wesentlichen auch schon von Anderen zum Beispiel im Klügels Wörterbuche (Art. stetig), von Cauchy *(Cours d'Algèbre,* Ch. 2. §. 2.). Ohm (Analysis, Bd. 2. §. 456) bestimmt. Und wenn Einige unter ihnen, wie der sonst so genaue Hr. Ohm, den Ausdruck brauchen, daß die Aenderung $F(x+\Delta x)-Fx$ nach ihrem absoluten Werthe kleiner als jede gegebene Größe D werden und um so kleiner werden müsse, je kleiner man Δx nimmt: so dürfte das Letztere nur aus Versehen gesagt worden seyn, indem man eigentlich wohl nur verlangt, daß $F(x+\Delta x)-Fx<D$ werden und verbleiben müsse, wenn Δx noch immer kleiner gemacht wird. Denn daß der Unterschied $F(x+\Delta x)-Fx$ jedesmal kleiner werde, wenn Δx kleiner gemacht wird, findet doch nicht bey jeder Function Statt, der gleichwohl allgemein Stetigkeit beygelegt wird; z. B. bey $x^2 \sin\log x$ für $x=0$, wo die Differenz $F(x+\Delta x)-Fx$ in $(\Delta x)^2 \sin\log \Delta x$ übergehet: und zu jedem auch noch so kleinen Δx ein noch kleineres angeblich ist, bey welchem dieser Unterschied wieder größer wird. Einige sehr angesehene Mathematiker, wie Kästner (Höhere Mechanik, 2. Aufl., 3. Abschn., §. 183 ff) und Hr. Hofr. Fries (Naturphilosophie §. 50) erklären die Stetigkeit einer Function Fx als diejenige Eigenschaft derselben, vermög der sie aus einem gewissen Werthe Fa in einen anderen Fb nicht übergehe, ohne erst alle dazwischen liegenden angenommen zu haben. Allein man wird in der Folge sehen, daß diese Erklärung zu weit ist, wenn anders der Begriff, den man durch sie angeben will, dem obigen gleichgelten soll. Etwas ganz Eigenes hat die Erklärung Eytelweins (Höhere Analysis, Bd. 1. §. 16), daß eine Function stetig zu nennen sey, wenn die sämmtlichen Werthe, welche sie innerhalb gewisser Grenzen ihrer Veränderlichen annimmt, reell und endlich sind; unstetig, wenn einer oder etliche unendlich groß oder unmöglich werden. Nach dieser Erklärung müßten wir gegen allen Sprachgebrauch behaupten, daß die im vorhergehenden §. erwähnte Function, deren Werthe fortwährend entweder $=ax$ oder $=ax+b$ sind, je nach dem x von der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ oder nicht, eine ste-

tige sey. Hr. Eytelwein entlehnte seine Erklärung offenbar nur aus Betrachtungen der gewöhnlichsten Functionen, die sich durch unsere bisher gebräuchlichen algebraischen Zeichen darstellen lassen. Von diesen nämlich gilt allerdings, daß sie innerhalb derselben Grenzen, innerhalb deren sie weder unendlich groß noch imaginär werden (also meßbar verbleiben) auch stetig sind. Allein es ist wohl zu merken, daß dieses bey einigen derselben nahmentlich bey den sogenannten transcendenten Functionen, nur eben dann der Fall sey, wenn wir bey der Bestimmung ihres Begriffes schon (stillschweigend) festsetzen, daß sie nur eben nach dem Gesetze der Stetigkeit veränderlich seyn sollen: wie ich dieß an seinem Orte deutlicher zu zeigen hoffe. — Viel enger hat den Begriff der Stetigkeit Lacroix aufgefaßt, wenn er (in s. *Traité élémentaire de calcul diff. et int.* §. 60) das Wesen der Stetigkeit in die (nach seiner Vorstellung) allgemeine Eigenschaft der Function setzt, in dem Verhältnisse $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ eine Grenze zuzulassen. Diese wichtige Eigenschaft nicht aller, aber doch sehr vieler Functionen, verdient es freylich sehr, mit einem eigenen Worte bezeichnet zu werden. Allein auch die Beschaffenheit, die wir im vorigen §. beschrieben, verdient nicht weniger eine Benennung. Da nun beyde nicht nur an sich selbst unterschieden, sondern auch trennbar sind, in dem die oben beschriebene Stetigkeit vorhanden seyn kann, ohne daß jene des Hrn. Lacroix da zu seyn braucht: so wird es wohl am Besten seyn, bey dem von Lagrange, Cauchy u. A. eingeführten Sprachgebrauche zu verbleiben, unter der Stetigkeit einer Function nur die im vorigen §. beschriebene Eigenschaft zu verstehen; von Functionen aber, bey welchen der Quotient $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ einer gewissen von Δx unabhängigen Grenze in das Unendliche nahet, zu sagen, daß sie eine abgeleitete (*une fonction dérivée*) hätte. Uibrigens muß ich erinnern, daß man den freylich nur selten vorkommenden Umstand, wo eine Function nur in einer Richtung, nämlich nur hinsichtlich auf einen positiven oder nur negativen Zuwachs stetig ist, nicht nur in der Erklärung bisher ganz übergangen, sondern (wie es mir scheint) auch in der Anwendung zu wenig beachtet habe.

§. 4. Lehrsatz. Eine Zahl W, die von der x, welche wir soeben für veränderlich betrachten, ganz unabhängig ist, in dem z. B. x in dem Begriffe von W gar nicht vorkommt, oder darin zwar vorkommt, aber auf eine Weise, daß sich der Werth von W nicht ändert, x mag was immer für einen Werth erhalten. wie z. B. wenn wir $W = \frac{ax - bx}{cx}$ hätten, wo a, b, c beständige und von x unabhängige Zahlen bedeuten, kann gleichfalls als stetig betrachtet werden, und zwar in Hinsicht auf jeden Werth von x und in beyden Richtungen.

Beweis. Bezeichnen wir die zu x und $x + \Delta x$ gehörigen Werthe von W durch Fx und $F(x + \Delta x)$; so müssen wir $Fx = F(x + \Delta x)$ und mithin $F(x + \Delta x) - Fx = 0$ setzen. Also läßt sich immerhin sagen, daß der Unterschied $\Delta Fx < \frac{1}{N}$ werde und verbleibe: denn 0 ist allerdings $< \frac{1}{N}$.

§. 5. Lehrsatz. Jede Function von der Form $a \pm x$, in welcher x eine frey Veränderliche, aber eine von a ganz unabhängige meßbare Zahl bezeichnet, ist stetig für jeden meßbaren Werth der x und hinsichtlich auf einen positiven sowohl als einen negativen Zuwachs. Dasselbe gilt auch von jeder Function von der Form ax oder xa, imgleichen auch von der Function $\frac{x}{a}$, sofern nur a nicht Null ist. Endlich ist auch jede Function von der Form $\frac{a}{x}$ stetig für jeden Werth der x, der nur nicht Null ist.

Beweis. Ergibt sich aus §. 27, §. 29, §. 36 der Einleitung.

§. 6. Lehrsatz. Auch eine jede beliebige Potenz einer frey veränderlichen Zahl x ist für alle meßbaren Werthe dieser Veränderlichen in Hinsicht auf einen positiven sowohl als negativen Zuwachs stetig.

Beweis. Wenn die Potenz vom ersten Grade ist, bedarf der Satz keines Beweises, weil x^1 einerley mit x selbst ist. Wenn aber die Potenz vom zweyten oder einem noch höheren Grade ist; so bedeutet, wenn wir dieselbe durch x^n darstellen, n eine Zahl > 1, und der Unterschied

$$\Delta Fx = \Delta(x^n) = (x + \Delta x)^n - x^n$$

findet sich, (nach §., wenn wir das dortige $a = x + \Delta x$, $b = x$ setzen), nach seinem absoluten Werthe $< n(x + \Delta x)^{n-1} \Delta x$, ein Ausdruck, der mit Δx offenbar in das Unendliche abnimmt, x mag was immer für einen, wenn nur stets meßbaren Werth haben.

§. 7. Lehrsatz. Jede ganze rationale Function einer frey Veränderlichen ist für jeden meßbaren Werth dieser letzteren und hinsichtlich auf einen positiven sowohl als negativen Zuwachs stetig.

Beweis. Wir nennen eine Function von x rational und ganz, wenn sie für alle Werthe von x gleichgeltend ist mit einem Ausdrucke von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + lx^m,$$

worin $a, b, c, d \ldots l$ insgesammt meßbare Zahlen, m aber eine beliebige wirkliche Zahl bezeichnet. Ist nun

$$Fx = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + lx^m:$$

so ist

$$\Delta Fx = F(x + \Delta x) - Fx =$$
$$= [a + b(x + \Delta x) + c(x + \Delta x)^2 + d(x + \Delta x)^3 + \cdots + l(x + \Delta x)^m] -$$
$$- [a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + lx^m] =$$
$$= b\Delta x + c[(x + \Delta x)^2 - x^2] + d[(x + \Delta x)^3 - x^3] + \cdots +$$
$$+ l[(x + \Delta x)^m - x^m].$$

Aus dem vorigen §. wissen wir aber, daß jede der in den Klammern von der Form [ ] eingeschloßene Zahl mit dem unendlichen Abnehmen von Δx gleichfalls in das Unendliche abnehme, und somit durch $\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_m$ vorgestellt werden könne: daher ist der ganze Ausdruck

$$\Delta Fx = b\Delta x + c\Omega_1 + d\Omega_2 + \cdots + l\Omega_m.$$

Ein jedes dieser Glieder nimmt (nach §.) in das Unendliche ab, und somit (weil ihre Anzahl unveränderlich ist) auch ihre algebraische Summe: daher der Werth von ΔFx selbst.

§. 8. Lehrsatz. Auch eine jede gebrochene rationale Function einer frey Veränderlichen ist stetig für jeden meßbaren Werth dieser letzteren, der nur den Nenner nicht zu Null macht, und hinsichtlich auf einen positiven sowohl als negativen Zuwachs.

Beweis. Wir nennen eine Function Fx rational und gebrochen, wenn sie für alle Werthe von x gleichgeltend ist mit einer Function von der Form

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + lx^m}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots + \lambda x^n}.$$

Bezeichnen wir nun zur Abkürzung den Zähler dieses letzteren

Ausdrucks durch fx, den Nenner durch φx, so sind fx und φx ein Paar rationale und ganze Functionen, und somit stetig für jeden Werth von x und in beyden Richtungen. Es ist aber

$$\Delta Fx = F(x+\Delta x) - Fx = \frac{f(x+\Delta x)}{\varphi(x+\Delta x)} - \frac{fx}{\varphi x} = \frac{fx+\Delta fx}{\varphi x+\Delta\varphi x} - \frac{fx}{\varphi x},$$

welches, wenn weder φx noch $\varphi(x+\Delta x) = \varphi x + \Delta\varphi x = 0$ ist,

$$= \frac{\varphi x \,.\, fx + \varphi x \,.\, \Delta fx - fx \,.\, \varphi x - fx \,.\, \Delta\varphi x}{\varphi x(\varphi x + \Delta\varphi x)} = \frac{\varphi x \,.\, \Delta fx - fx \,.\, \Delta\varphi x}{\varphi x \,.\, (\varphi x + \Delta\varphi x)}$$

gesetzt werden kann. Nun ist, wenn φx d. i. der Nenner der gegebenen gebrochenen Function nicht $=0$ ist, gewiß auch $\varphi x + \Delta\varphi x$ wenigstens anzufangen von einem gewissen Werthe der Differenz $\Delta\varphi x$, nämlich von einer solchen, die ihrem absoluten Werthe nach $< \varphi x$ ist, nicht $=0$. Also vermag ΔFx in das Unendliche abzunehmen, wenn nur der Zähler in dem letzteren Ausdrucke d. i. $\varphi x \,.\, \Delta fx - fx \,.\, \Delta\varphi x$ in das Unendliche abnimmt. Dieß geschieht aber für jeden Werth von x, wenn Δx in das Unendliche abnimmt, weil Δfx und $\Delta\varphi x$ in das Unendliche abnehmen.

§. 9. Lehrsatz. Wenn es wahr seyn soll, daß eine Function Fx für einen bestimmten Werth ihrer Veränderlichen x und hinsichtlich auf einen entweder positiven oder negativen Zuwachs derselben unstetig werde: so muß einer von folgenden drey Fällen eintreten: erstens entweder der Ausdruck Fx oder der Ausdruck $F(x+\Delta x)$ bezeichnet keine Zahl, die meßbar ist und meßbar verbleibt, wenn wir dem Δx in der letzteren anzufangen von einem gewissen jeden beliebigen kleineren Werth ertheilen; oder zweytens der Unterschied $F(x+\Delta x) - Fx$ verbleibt seinem absoluten Werthe nach fortwährend größer als eine gewisse Zahl, so klein man auch Δx werden lasse; oder drittens dieser Unterschied wird zwar für gewisse Werthe von Δx kleiner als der gegebene Bruch $\frac{1}{N}$, verbleibt es aber nicht, sondern es gibt zu jeder Zahl irgend ein noch kleineres Δx, bey welchem der Unterschied $F(x+\Delta x) - Fx$ abermals $\geqq \frac{1}{N}$ wird.

Beweis. Daß außer diesen drey Fällen kein anderer Statt finden könne, leuchtet von selbst ein; daß aber jeder derselben unter gewissen Umständen zum Vorschein kommen könne, mögen uns folgende Beyspiele zeigen.

1. Die Function $Fx = \frac{1}{1-x}$ ist für den Werth $x = 1$ unstetig, weil schon der Werth Fx selbst, in welchen sie für $x = 1$ übergehet, unmeßbar, nämlich unendlich groß ist.

2. Wenn die Zahl y auf eine solche Art von der x abhängt, daß wir fortwährend die Gleichung $y^2 = 1 - x^2$ haben: so ist für den Werth $x = 1$ und für ein positives Δx. y unstetig, weil der Ausdruck $F(x + \Delta x)$ gar keine meßbare Zahl vorstellt. Denn diese Zahl müßte von einer solchen Beschaffenheit seyn, daß ihr Quadrat $= 1 - (1 + \Delta x)^2 = -2\Delta x - \Delta x^2$, d. h. einer negativen Zahl gleich komme. Eine solche aber gibt es bekanntlich nicht.

3. Setzen wir, daß für $x = 1$ und alle kleineren Werthe $Fx = 3x$, für alle größeren aber $Fx = 5x$ seyn soll: so ist Fx für den Werth $x = 1$ und für ein positives Δx unstetig, weil der Unterschied $F(x + \Delta x) - Fx = 5(1 + \Delta x) - 3 = 2 + 5\Delta x$ fortwährend > 2 verbleibet.

4. Setzen wir, daß für jeden Werth von x, welcher der Form $\frac{1}{2^n}$ unterstehet, sofern n jede beliebige wirkliche Zahl vorstellen kann, der Werth von $Fx = 1$ sey, daß aber für alle anderen Werthe von x, $Fx = 2x$ sey: so ist Fx für den Werth $x = 0$ und ein positives Δx unstetig aus dem dritten im Lehrsatze angegebenen Grunde. Hier nämlich ist $Fx = F(0) = 0$, weil der Werth $x = 0$ der Form $\frac{1}{2^n}$ nicht unterstehet. $F(x + \Delta x) = F(\Delta x)$ aber wird für jeden Werth von Δx, der von der Form $\frac{1}{2^n}$ ist, z. B.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \text{ u. s. w.}$$

$= 1$, für jeden anderen aber $= 2\Delta x$. Also ist auch der Unterschied $F(x + \Delta x) - Fx$ bald $= 1$, bald $= 2\Delta x$. Er nimmt also, wenn Δx in das Unendliche abnimmt, wohl gleichfalls ab, doch nicht so, daß es nicht zu jedem Δx irgend ein noch kleineres (nämlich Eines von der Form $\frac{1}{2^n}$) gäbe, für welches dieser Unterschied wieder $= 1$ wird.

§. 10. Lehrsatz. Die Eigenschaft stetig zu seyn, kommt manchen Functionen auch nur für einen gewissen vereinzelt stehenden Werth ihrer Veränderlichen zu.

Beweis. Denken wir uns eine Zahl $W = Fx$, welche von der Veränderlichen x nach einem solchen Gesetze abhangen soll, daß man für alle diejenigen Werthe der x, welche der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ unterstehen, $W=2x$, für alle übrigen aber $W=3x$ habe: so behaupte ich diese Function von x sey für den Werth $x=0$ stetig, für jeden anderen aber unstetig. Daß W für den Werth $x=0$ stetig zu nennen sey, erhellet daraus, weil der Unterschied $F(x+\Delta x)-Fx$ für diesen Werth von x, $=F(\Delta x)-F(0)$, mit Δx in das Unendliche abnimmt. Denn $F(0)$ ist, weil 0 der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ nicht unterstehet $=3.0=0$; $F(\Delta x)$ aber ist entweder $=2\Delta x$ oder $=3\Delta x$, jenachdem Δx der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ unterstehet oder nicht. Nun ist aber offenbar, daß sowohl $2\Delta x$, als $3\Delta x$ mit Δx selbst in das Unendliche abnehme. Also ist unsere Function für $x=0$ stetig. Für jeden anderen Werth aber ist sie unstetig. Der Unterschied $F(x+\Delta x)-Fx$ kann nämlich immer nur einen von folgenden vier Werthen haben, $3\Delta x$, $x+3\Delta x$, $-x+2\Delta x$, $2\Delta x$, jenachdem weder $x+\Delta x$, noch x oder nur x, oder nur $x+\Delta x$, oder sowohl $x+\Delta x$ als auch x der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ unterstehen. Wenn nun x nicht $=0$ ist: so sieht man, daß dieser Unterschied nur im ersten und vierten Falle, keineswegs aber im zweyten und dritten mit Δx selbst in das Unendliche abnehme. Offenbar ist aber kein Δx so klein, daß nicht ein kleineres angeblich wäre, welches der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ unterstehet, da der Bruch $\frac{2m+1}{2^n}$, wenn wir bey einerley m, den Exponenten n in das Unendliche vermehren, kleiner als jede gegebene Zahl zu werden vermag. In jedem Falle also, x mag der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ unterstehen oder nicht, nimmt doch der Unterschied $F(x+\Delta x)-Fx$ mit Δx nicht ins Unendliche ab, sondern es gibt zu jedem Δx ein kleineres, bey welchem dieser Unterschied im ersten Falle $x+3\Delta x$, im zweyten $x+2\Delta x$ beträgt.

§. 11. Lehrsatz. Wie eine Function das Gesetz der Stetigkeit beobachten kann sowohl für einen gewissen vereinzelt stehenden Werth als auch für einen ganzen Inbegriff von Werthen ihrer Veränderlichen, so viele ihrer innerhalb gewisser Grenzen a und b liegen, oder auch durchgängig für alle Werthe ihrer Veränderlichen: so kann auch umgekehrt eine Function das Gesetz der Stetigkeit verletzen sowohl für einen gewissen vereinzelt stehenden Werth und hinsichtlich auf eine einzige oder auf beyde Richtungen, als auch für einen ganzen Inbegriff von Werthen ihrer Veränderlichen, soviele innerhalb gegebener Grenzen a und b liegen, oder auch durchgängig für alle Werthe ihrer Veränderlichen: und dieß zwar Beydes sowohl durch Sprünge als durch Lücken.

Beweis. Was der Lehrsatz von den Fällen, in welchen eine Function das Gesetz der Stetigkeit beobachten kann, aussagt, ist aus dem Vorhergehenden schon klar. Es ist also nur zu erweisen, was er von den Verletzungen dieses Gesetzes aussagt.

1. Wenn wir nun festsetzen, daß die Zahl W für alle Werthe von x, die < 1 sind, den Werth $4x$, für $x = 1$ aber und alle größeren den Werth $5x$ haben: so erhalten wir das Beyspiel einer Function, die das Gesetz der Stetigkeit für einen vereinzelt stehenden Werth, nämlich für $x = 1$, hinsichtlich auf die negative Richtung und zwar durch einen Sprung verletzt. Hätten wir festgesetzt, daß W für alle Werthe von x, die < 1, und für $x = 1$ den Werth $4x$, für alle größere aber den Werth $5x$ habe: so wäre die Function für den Werth $x = 1$ nur bey einem negativen Zuwachse stetig. Setzen wir endlich für alle Werthe von $x < 1$, $W = 4x$; für alle Werthe von $x > 1$, $W = 5x$; für $x = 1$ aber $W = 10$: so ist diese Function für diesen letzgenannten Werth in keiner von beyden Richtungen stetig; für alle übrigen aber stetig in beyden Richtungen.

2. Die Function, die wir im §. 1. betrachteten, verletzt das Gesetz der Stetigkeit für alle Werthe ihrer Veränderlichen, und zwar durch fortwährende Sprünge.

3. Setzen wir fest, das W für alle Werthe der x den Werth $W = ax$ haben sollte, mit Ausnahme aller ganzzahligen Werthe von x, für welche W gar nicht vorhanden oder doch nicht meßbar seyn soll: so haben wir ein Beyspiel einer Function, die für gewisse vereinzelt stehende Werthe ihrer Veränderlichen, hier nämlich für die Werthe 1, 2, 3, 4, . . . *in inf.*, das Gesetz der Stetigkeit durch eine Lücke verletzet.

4. Setzen wir endlich, daß W für alle innerhalb α und β gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen gar nicht vorhanden oder doch nicht meßbar, für alle übrigen Werthe aber $= ax$ seyn solle: so haben wir eine Function, welche für alle Werthe ihrer Veränderlichen von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ (ausschließlich) eine Lücke hat. U. s. w.

§. 12. Lehrsatz. Blos aus dem Umstande, daß eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Wethe ihrer Veränderlichen hinsichtlich eines positiven (oder negativen) Zuwachses stetig ist, folget noch nicht, daß sie auch hinsichtlich eines negativen (oder positiven) Zuwachses stetig sey.

Beweis. Wenn Fx für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth der x stetig ist hinsichtlich auf ein positives Δx: so muß wohl, wenn wir ω positiv nehmen, $F(x+\omega)-Fx=\Omega$ seyn; und wenn wir i so nehmen, daß auch noch $x-i$ innerhalb a und b liegt; so muß auch $F(x-i+\omega)-F(x-i)=\Omega_1$ seyn. Dürften wir nun $i=\omega$ setzen, so gäbe die letztere Gleichung allerdings $Fx-F(x-\omega)=\Omega_1$; d. h. auch der Unterschied $F(x-\omega)-Fx$ könnte nach seinem absoluten Werthe in das Unendliche abnehmen, woraus man versucht seyn könnte zu folgern, daß Fx auch für ein negatives Δx stetig sey. Allein es ist nicht zu vergessen, daß in der Gleichung $F(x-i+\omega)-F(x-i)=\Omega_1$ der Werth von Ω_1 nicht nur von ω, sondern auch von $x-i$, und somit auch von i abhänge. Daher denn nicht sofort geschlossen werden darf, das Ω_1 hier eine Zahl bezeichne, die mit i ins Unendliche abnimmt; denn es könnte ja seyn, daß für den Werth $i=\omega$ der Unterschied $F(x-i)-Fx$ fortwährend größer als eine gewisse meßbare Zahl verbleibt, obgleich der Unterschied $F(x+\omega)-Fx$ in das Unendliche abnimmt, weil die Bedingung der Stetigkeit für den Werth $x-i$ und für einen positiven Zuwachs nur fordert, daß $F(x-i+\omega)-F(x-i)$ bey einerley i durch ein gewisses ω in das Unendliche abnehme. Dieß ω aber kann bey verschiedenen Werthen von i verschieden seyn, und so nahmentlich könnte allemahl erforderlich seyn, daß es kleiner als i werde, um den Unterschied $F(x-i+\omega)-F(x-i)<\frac{1}{N}$ zu machen. Wäre z. B. für alle Werthe von $x<2$, $Fx=x^2$, für $x \gtreqless 2$ aber $Fx=x^3$, so würde sich Fx für jeden positiven Zuwachs allerdings stetig erweisen. Denn auch für den Werth $x=2$ hätten wir

$$F(x+\Delta x)-Fx=(2+\Delta x)^3-2^3=12\Delta x+6\Delta x^2+\Delta x^3.$$

Für einen negativen Zuwachs aber findet sich

$$F(x-\Delta x)-Fx=(2-\Delta x)^2-2^3=-4-4\Delta x+\Delta x^2.$$

Hier also ist die Function unstetig.

§. 13. Lehrsatz. Blos daraus, daß eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen x stetig sey, folgt nicht, daß es für alle innerhalb dieser Grenze gelegenen Werthe von x eine und eben dieselbe Zahl e geben müsse, klein genug, um behaupten zu können, daß man Δx nach seinem absoluten Werthe nie $<e$ zu machen brauche, damit der Unterschied $F(x+\Delta x) - Fx < \frac{1}{N}$ ausfalle.

Beweis. Es ist weder an sich, noch dem gegebenen Begriffe der Stetigkeit widersprechend anzunehmen, daß für jedes andere x irgend ein anderes, z. B. nahmentlich für jedes x, das einer gewissen Grenze c sich nähert, ein kleineres Δx nothwendig sey, um die Bedingung zu erfüllen, daß der Unterschied $F(x+\Delta x) - Fx < \frac{1}{N}$ wird und verbleibt, sofern man Δx noch immer verkleinert. Ein Beyspiel haben wir an der Function $Fx = \frac{1}{1-x}$ für solche Werthe von x, die sich dem Werthe von 1 in das Unendliche nahen. Schreiben wir nämlich zur Abkürzung $x = 1 - i$, so ist $F(x+\Delta x) - Fx = \frac{\Delta x}{i(i-\Delta x)}$: soll dieß $< \frac{1}{N}$ werden: so muß $\Delta x < \frac{i^2}{N+i}$ seyn. Also je kleiner i wird, um desto kleiner muß man auch Δx machen, und wenn i ins Unendliche abnimmt, d. h. wenn x sich der Grenze 1 in das Unendliche nahet, so muß Δx nach und nach kleiner als jede gegebene Zahl werden, bloß damit der Unterschied $\Delta Fx < \frac{1}{N}$ ausfalle.

§. 14. Lehrsatz. Wenn wir von einer Zahl $W = Fx$ wissen, daß sie entweder überhaupt oder doch innerhalb gegebener Grenzen a und b ihrer Veränderlichen x dem Gesetze der Stetigkeit gehorche: und es wird uns überdieß bekannt, daß sie für Werthe von x, die einem bestimmten innerhalb a und b gelegenen m so nahe treten können, als man nur immer will, Werthe annehmen, deren Unterschied von der beständigen meßbaren Zahl M in das Unendliche abnehme: so dürfen wir schließen, daß sie für $x = m$ in den Werth M übergehe oder daß $Fm = M$ sey.

Beweis. Da wegen der Stetigkeit, welche die Function $W = Fx$ auch für den Werth $x = m$ an den Tag legen soll, der Unterschied $F(m+\omega) - Fm = \Omega$ seyn muß, wenn ω und Ω die gewöhnliche Bedeutung haben; und da sich nach der Voraussetzung $F(m+\omega) - M = \Omega_1$ findet: so muß auch durch Abzug $M - Fm = \Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3$ seyn: eine Gleichung, aus welcher, weil M und Fm unveränderlich sind, $M = Fm$ folgt.

§. 15. Zusatz. Auf diese Art sind wir durch die Voraussetzung der Stetigkeit im Stande, den Werth einer Function in manchen Fällen zu bestimmen, in welchen er ohne diese Voraussetzung unbestimmt wäre. Wenn uns z. B. angegeben würde, daß eine gewisse Zahl W in allen denjenigen Fällen, in denen eine andere Veränderliche x einen positiven Werth hat, $=a+x$ seyn müsse: so ist durch diese Angabe allein sicher noch nicht bestimmt, welchen Werth W für den Fall annehmen müsse, da $x=0$ wird. Dürfen wir aber noch überdieß voraussetzen, daß W sich fortwährend, oder doch wenigstens um den Werth $x=0$ herum, nur nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern solle: so ist durch die Vereinigung dieser Umstände uns schon bestimmt, welchen Werth W für $x=0$ annehmen müsse. Es darf dieß nämlich kein anderer als der Werth $W=a$ seyn; weil nur bey diesem der Unterschied

$$\Delta W = F(x+\Delta x) - Fx = (a+x+\Delta x) - (a+x) = \Delta x$$

in das Unendliche abnehmen kann, wenn Δx in das Unendliche abnimmt.

Eben so läßt sich, um ein noch merkwürdigeres Beyspiel zu geben, über den Werth des Unendlichen Zahlenausdruckes $1-1+1-1+\cdots$ *in inf.*, den wir früher (§.) nicht zu bestimmen vermochten, entscheiden, sobald wir bewirken, daß die unendliche Reihe $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$ *in inf.* für den Werth $x=1$ in den unendlichen Zahlenausdruck $1-1+1-1+\cdots$ *in inf.* übergehe; und festsetzen, daß dieser Uibergang nach dem Gesetze der Stetigkeit erfolgen solle. Denn weil die unendliche Reihe $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$ *in inf.*, für jeden Werth von x, der <1 ist, meßbar ist, und den bekannten Werth $\frac{1}{1+x}$ hat: ein Werth, der sich dem Werthe $\frac{1}{2}$ in das Unendliche nahet, wenn x dem Werthe 1 in das Unendliche nahet: so sieht man, daß das Gesetz der Stetigkeit fordere, den Werth der Reihe $1-1+1-1+\cdots$ *in inf.* $=\frac{1}{2}$ anzunehmen.

§. 16. Zusatz. Besonders ereignet es sich bey Ausdrücken, welche die Form eines Bruches haben, nicht selten, daß sie für einen gewissen Werth einer in ihm vorkommenden Veränderlichen x in den Ausdruck $\frac{0}{0}$ übergehen, welcher an sich ganz unbestimmt ist, und jede beliebige Zahl vorstellen kann. So geschieht dieß z. B. gleich mit dem Ausdrucke $\frac{x^3-7x-6}{x^3-2x^2-9x+18}$ für den Werth $x=3$. Dürfen wir aber voraussetzen, daß sich die Zahl, welche ein solcher Ausdruck vorstellt, entweder allgemein, oder doch in der Nähe desjenigen Werthes von x, welcher denselben in $\frac{0}{0}$ verwandelt, stetig verändere: so ist es oft möglich, durch diesen Umstand den Werth, den die in Rede stehende Zahl in diesem Falle annimmt, vollkommen zu bestimmen.

Setzen wir nämlich anstatt des Werthes $x=\alpha$, die den gegebenen Ausdruck in $\frac{0}{0}$ verwandelt, den Werth $x=\alpha+\omega$; und gelingt es uns nach gehöriger Entwicklung desselben eine Zahl A zu finden, welcher der Werth dieses Ausdrucks so nahe tritt, als man nur immer will, sofern wir ω in das Unendliche abnehmen lassen: so dürfen wir schließen, A sey der eigentliche Werth, den unsere Zahl für den Werth $x=\alpha$ annimmt. In dem obigen Beyspiele erhalten wir, wenn wir für x den Werth $3+\omega$ setzen:

$$\frac{(3+\omega)^3-7(3+\omega)-6}{(3+\omega)^3-2(3+\omega)^2-9(3+\omega)+18}=\frac{20\omega+9\omega^2+\omega^3}{6\omega+7\omega^2+\omega^3},$$

oder wenn wir die Zähler und Nenner durch ω dividiren

$$\frac{20+9\omega+\omega^2}{6+7\omega+\omega^2}.$$

An diesem ist es nun sichtbar, daß er sich mit der unendlichen Abnahme von ω dem Werthe $\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$ in das Unendliche nähere. Also ist $\frac{10}{3}$ der Werth, den die gegebene Function

$$\frac{x^3-7x-6}{x^3-2x^2-9x+18}$$

für den Werth $x=3$ annehmen muß, sofern sie dem Gesetze der Stetigkeit entweder durchgängig, oder doch um diesen Werth herum gehorchen soll. Auf ähnliche Weise findet sich, daß $\frac{a^3-x^3}{a-x}$ für den Werth $x=a$, den Werth $3a^2$; $\frac{a^2-2ax+x^2}{a^2-x^2}$ für $x=a$, den Werth 0 annehmen müsse, wenn diese Function für $x=a$ stetig seyn soll.

§. 17. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx, welche für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe der x stetig ist, einen und eben denselben Werth M für so viele Werthe der x annimmt, daß es innerhalb a und b nicht zwey einander so nahe liegende meßbare Zahlen gibt, innerhalb deren nicht ein solcher Werth von x liegt, der Fx abermahls $= M$ macht: so behaupte ich, daß Fx eigentlich innerhalb a und b gar nicht veränderlich sey, sondern fortwährend $= M$ verbleibe.

Beweis. Stellt x einen beliebigen innerhalb a und b gelegenen Werth der x vor; so muß, weil Fx stetig seyn soll, irgend ein i klein genug angeblich seyn, daß für dasselbe und alle kleineren Werthe $F(x+i) - Fx < \frac{1}{N}$ wird und verbleibt. Wenn es nun innerhalb a und b nicht zwey einander auch noch so nahe liegende meßbare Zahlen gibt, innerhalb deren nicht ein solcher Werth von x liegt; so muß auch innerhalb x und $x+i$ ein solcher Werth liegen. Bezeichnen wir diesen durch $x+j$, so ist j eine Zahl von demselben Vorzeichen mit i, und ihrem absoluten Werthe nach $< i$. Also muß auch für $x+j$ das oben angegebene Verhältnis $F(x+j) - Fx < \frac{1}{N}$ bestehen. Allein $F(x+j) = M$. Also mus $M - Fx$ nach seinem absoluten Werthe $< \frac{1}{N}$ seyn. Da nun M und Fx ein Paar von i ganz unabhängige meßbare Zahlen sind, während der Bruch $\frac{1}{N}$ durch die Verminderung von i in das Unendliche abnehmen kann: so erhellet (§. 14), daß $M = Fx$ seyn müsse. Also hat die Function Fx für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth der x einen und eben denselben Werth.

§. 18. Zusatz. Wenn also umgekehrts, Fx eine auch innerhalb der Grenzen a und b stetig veränderliche und von x abhängige Zahl bezeichnet: so kann es wohl seyn, daß Fx innerhalb der Grenzen a und b unendliche Mahle zu einem und eben demselben Werthe M zurückkehrt, doch muß es auf jeden Fall möglich seyn, innerhalb a und b liegende Werthe von x anzugeben, welche einander so nahe stehen, daß kein dritter Werth, der $Fx = M$ macht, zwischen denselben liegt. Mit anderen Worten: Unter den Werthen von x, die $Fx = M$ machen, muß es zu jedem Einen, der ihm der nächste ist, geben d. h. einen anderen ihm so nahe liegenden geben, daß kein dritter noch näher liegt.

§. 19. Lehrsatz. Wenn die unendlich vielen Werthe, die eine einförmige Function Fx annimt, indem ihre Veränderliche x einer gewissen meßbaren Zahl c so nahe rückt, als man nur immer will. — absolut genommen größer als eine jede meßbare Zahl werden: so ist diese Function für den Werth $x = c$ gewiß nicht stetig.

Beweis. Wäre sie es: so müßte der Werth Fc irgend einer meßbaren Zahl C gleichkommen; und der Unterschied $F(c \pm \omega)$ — — Fc müßte blos durch Verminderung von ω in das Unendliche abnehmen. Allein vermög der Voraussetzung wird $F(c \pm \omega)$ blos durch Verminderung von ω, nach seinem absoluten Werthe größer als jede meßbare Zahl. und somit kann $F(c \pm \omega) - Fc = F(c \pm \omega) - C$ gewiß nicht ins Unendliche abnehmen.

Beyspiel. So wird die Function $\frac{a}{c - x}$ größer als jede gegebene Zahl. wenn x dem Werthe c ins Unendliche nahet. Darum ist diese Function für den Werth $x = c$ auch nicht stetig.

§. 20. Lehrsatz. Wenn die unendlich vielen Werthe. die eine Function Fx annimmt. indem ihre Veränderliche x alle von $x = a$ bis $x = b$ einschließlich vorkommenden Werthe erhält, von einer solchen Beschaffenheit sind, daß sich zu jeder meßbaren Zahl irgend einer aus ihnen ausfinden läßt. der diese Zahl übertrifft, so ist diese Function gewiß nicht für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ einschließlich stetig.

Beweis. Wählen wir eine unendliche Reihe meßbarer Zahlen, deren jede folgende größer als die vorhergehende ist, und die jede beliebige Größe erreichen, z. B. die Zahlen 1. 2. 3. 4. . . . *in inf.*. so muß es auch eine Reihe von Werthen der x geben. x_1. x_2. x_3, x_4. . . . *in inf.*, die alle innerhalb a und b liegen. und so beschaffen sind. daß die zugehörigen Werthe der Function Fx_1. Fx_2. Fx_3. Fx_4 . . . absolut genommen ein jeder größer sind, als das gleichvielte Glied in der erst angenommenen Reihe, nämlich $Fx_1 > 1$. $Fx_2 > 2$, $Fx_3 > 3$, $Fx_4 > 4$ usw. Wir wissen nun. (aus §.), daß sich die unendlich vielen Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 . . . entweder alle, oder doch ein so großer Theil derselben, daß ihre Menge schon selbst unendlich ist, in ein Paar Grenzen p und q einschließen lassen, welche einander so nahe rücken können. als wir nur immer wollen, und es ergibt sich (aus §.*)). daß eine dieser Grenzen durch c, die andere durch $c \pm \omega$ vorgestellt werden könne, wenn wir durch c eine gewisse nicht außerhalb a und b liegende beständige Zahl, durch ω aber eine Zahl. die ins Unendliche abnehmen kann, bezeichnen. Einer unendlichen Menge

*) *NB.* Die zwei §§. auf welche sich hier berufen wird, sind in der Lehre von der Meßbarkeit der Zahlen erwiesen.

der Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ entspricht aber auch eine unendliche Menge der Zahlen $Fx_1, Fx_2, Fx_3, Fx_4 \ldots$ und diese letztere muß gewiß Zahlen enthalten, die eine jede gegebene meßbare Zahl überschreiten. Denn weil die erste dieser Zahlen oder $Fx_1 > 1$, die zweyte oder $Fx_2 > 2$, die dritte oder $Fx_3 > 3$ ist usw.: so ist unter n dieser Zahlen, selbst wenn die kleinsten ausgewählt werden, nothwendig wenigstens Eine, die $> n$ ist, enthalten. Hiernächst ergibt sich nun aus dem vorigen Lehrsatze, daß unsere Function, wenn sonst für jeden anderen, für den Werth $x = c$ gewiß nicht stetig seyn könne: weil innerhalb c und $c \pm \omega$ Werthe von Fx vorkommen, die jede gegebene meßbare Zahl überschreiten. Da nun c entweder $= a$ oder $= b$ oder innerhalb a und b liegt, so ist hiemit erwiesen, was unser Lehrsatz aussagt.

§. 21. Zusatz. Wenn also im Gegentheil eine gewisse Function Fx für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ einschließlich stetig ist: so muß auch irgend eine meßbare und beständige Zahl N angeblich seyn, welche größer ist als jeder einzelne Werth, den diese Function von $x = a$ bis $x = b$ einschließlich annimmt, wenn wir ihn absolut betrachten.

§. 22. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx von $x = a$ bis $x = b$ einschließlich stetig ist, und es gibt eine beständige meßbare Zahl C von der Art, daß die unendlich vielen Werthe der Fx, welche zum Vorschein kommen, wenn wir ihrer Veränderlichen x nach und nach eine unendliche Menge innerhalb a und b gelegener Werthe ertheilen, sich der Zahl C in das Unendliche nähern: so gibt es auch unter den Werthen von $x = a$ bis $x = b$ einschließlich wenigstens Einen $= c$, für welchen $Fc = C$ wird.

Beweis. Bezeichnen wir die unendlich vielen Werthe der x, welche die Eigenschaft haben, daß die ihnen zugehörigen Werthe der Fx sich der Zahl C in das Unendliche nähern, durch $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ *in inf.*: so folgt (aus §.), daß sich, wenn auch nicht alle diese Werthe, doch eine unendliche Menge derselben einschließen lassen in ein Paar Grenzen von der Form c und $c \pm \omega$, wenn wie durch c eine nicht außerhalb a und b gelegene Zahl bezeichnen. Hieraus ergibt sich aber (nach §. 14.), daß, weil unsere Function für den Werth $x = c$ stetig seyn soll, $Fx = C$ seyn müsse.

§. 23. Zusatz. Wenn wir die beyden Werthe Fa und Fb nicht mitnehmen dürfen, so ist es keineswegs sicher, daß eine jede beständige Zahl C, der sich die Werthe der Fx in das Unendliche nahen, unter den Werthen derselben auch einen haben muß.

der ihr vollkommen gleich ist. Denn weil wir von der Zahl c, von der wir erwiesen haben, daß $Fc = C$ seyn müsse, nur voraussetzen können, daß sie nicht außerhalb a und b liege, keineswegs aber, daß sie zwischen a und b liegen müsse; so könnte es sich zuweilen auch ergeben, daß eben nur der Werth, in welchen Fx für $x = a$ oder für $x = b$ übergehet, der gegebenen Zahl C gleichkommt. So gibt es z. B. keinen innerhalb 0 und 4 gelegenen Werth der Veränderlichen x, für welchen die Function $7 + 5x$ in den Werth $C = 27$ überginge, obgleich es eine unendliche Menge von solchen Werthen der x gibt, für welche sich Fx diesem Werthe in das Unendliche nähert. Dieß kömmt, weil jener einzige Werth von x, für welchen $7 + 5x$ genau $= 27$ wird, eben nur eine von jenen beiden Grenzen nämlich $x = 4$ ist.

§. 24. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx von $x = a$ bis $x = b$ einschließlich stetig ist: so gibt es unter den sämtlichen Werthen, welche sie annimmt, wenn wir uns vorstellen, daß man der x nach und nach alle Werthe von a bis b einschließlich ertheilt hätte, jederzeit einen größten in der Bedeutung, daß kein anderer größer; und eben so auch einen kleinsten in der Bedeutung, daß kein anderer kleiner ist als er.

Beweis. Der Satz bewährt sich selbst in dem Falle, wenn unsere Function von a bis b einschließlich einen und eben denselben Werth behält; denn dann ist dieser beständige Werth selbst ihr größter sowohl als auch ihr kleinster in der soeben erklärten Bedeutug. Nimmt aber Fx innerhalb der gegebenen Grenzen a und b verschiedene (d. h. ungleiche) Werthe an; dann kann freylich nicht ein und derselbe Werth sowohl ihr größter als auch ihr kleinster heißen. Es wird indessen genug seyn, wenn wir nur darthun, daß unsere Function einen größten Werth haben müsse; denn Jeder wird einsehen, daß sich auf ähnliche Art auch das Vorhandenseyn eines kleinsten Werthes erweisen lasse. Aus §. 21. wissen wir nun bereits, daß eine meßbare und beständige Zahl N angeblich seyn müsse, von der gesagt werden kann, daß alle Zahlen, die $> N$ sind, auch größer als irgend einer von jenen Werthen sind, die unsere Function von $x = a$ bis $x = b$ einschließlich annimmt. Gleichwohl ist einleuchtend, daß nicht von einer jeden auch noch so kleinen Zahl behauptet werden könne, daß alle Zahlen, die größer als sie sind, auch größer als alle Werthe unserer Function sind. Denn nehmen wir eine Zahl D, die $< Fa$ ist: so ist kein Zweifel, von dieser lasse sich keineswegs sagen, daß alle Zahlen, die größer als D

sind, auch größer als alle Werthe der Fx sind: indem gleich Fa eine Zahl ist, die $> D$ und doch nicht größer ist als jeder Werth der Fx; nämlich nicht als der Werth Fa selbst. Es muß (nach §.) also eine beständige meßbare Zahl M geben, welche die kleinste unter denjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle Zahlen, die größer als M sind, auch größer seyn müssen als alle Werthe, die unsere Function von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich annimmt. Von dieser Zahl M nun behaupte ich, sie sey ein Werth, den unsere Function für irgend einen nicht außerhalb a und b gelegenen Werth ihrer Veränderlichen selbst annimmt, und zwar ein solcher, darüber sie keinen größeren annimmt. Gebe es unter den sämmtlichen Werthen der Fx, die sie von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich annimmt, nicht einen einzigen, der $=M$ ist; so könnte es nach dem vorhergehenden Satze auch keine Werthe der Fx geben, die sich der Zahl M in das Unendliche nähern. Es müßte demnach eine Zahl μ klein genug angeblich seyn, um behaupten zu können, daß der Unterschied $M-Fx$ für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich $>\mu$ verbleibt. Daraus ergebe sich aber, daß die Zahl M nicht die kleinste ist, von der behauptet werden kann, daß alle größeren auch die Beschaffenheit haben, größer als alle Werthe der Fx zu seyn. Denn auch $M-\mu$ wäre eine Zahl, und zwar eine kleinere, von der sich eben dasselbe behaupten ließe. Es erübriget also nur zu zugestehen, daß es unter den verschiedenen Werthen, die unsere Function von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich annimmt, wenigstens Einen gebe, der $=M$ ist. Uiber diesen kann aber kein größerer seyn: weil sonst nicht wahr wäre, daß alle Zahlen, die größer als M sind, auch größer als alle Werthe unserer Function von $x=a$ bis $x=b$ sind. Es ist somit entschieden, daß unter diesen Werthen sich wenigstens Einer befinde, der keinen größeren über sich hat.

§. 25. Zusatz. Die Werthe Fa und Fb müssen nothwendig mitgerechnet werden: denn daß sich unter den sämmtlichen Werthen, die eine stetige Function von $x=a$ bis $x=b$ ausschließlich annimmt, immer ein größter und ein kleinster befinden müsse, läßt sich keineswegs behaupten. So gibt es z. B. unter den sämmtlichen Werthen, welche die Function $5x$ von $x=1$ bis $x=10$ ausschließlich annimmt, weder einen größten noch einen kleinsten. Keinen größten: denn zu jedem innerhalb 1 und 10 gelegenen Werthe von x, z. B. 9, für welchen diese Function den Werth 45 annimmt, gibt es auch einen anderen (einen näher an 10 liegenden), z. B. $9\frac{1}{2}$, für welchen $5x$ einen größeren

Werth, nämlich $47\frac{1}{2}$ erhält. Keinen kleinsten: denn zu jedem innerhalb 1 und 10 gelegenen Werth von x, z. B. 2, für welchen diese Function den Werth 10 annimmt, gibt es noch einen anderen (einen näher an 1 liegenden), z. B. $1\frac{1}{2}$, für welchen ihr Werth $= 7\frac{1}{2} < 10$ wird.

§. 26. Zusatz. Wenn es sich also im Gegentheil zeigt, daß unter den sämmtlichen Werthen, die eine gewisse Function Fx annimmt, indem man ihrer Veränderlichen x alle gedenkbaren Werthe $x = a$ bis $x = b$, diese mit eingeschlossen, ertheilet, entweder kein größter oder kein kleinster in dem Sinne ist, daß sich zu jedem noch ein größerer oder ein kleinerer angeben läßt, so muß es wenigstens einen unter den Werthen von $x = a$ bis $x = b$ einschließlich geben, für welchen diese Function das Gesetz der Stetigkeit verletzt. Ein Beyspiel gibt die Function $\frac{a}{c - x}$ für den Werth $x = c$.

§. 27. Lehrsatz. Es gibt Functionen Fx, die sich nach einem solchen Gesetze ändern, daß wir zu jeder meßbaren Zahl M, welche man uns als liegend zwischen zwey voneinander verschiedenen Werthen der Fx, Fa und Fb, die zu den Werthen der Veränderlichen $x = a$ und $x = b$ gehören, angeben mag, auch im Stande sind, nur zwischen den Zahlen a und b liegende meßbare Zahl m aufzufinden, deren zugehöriger Werth für Fx, d. h. Fm, der gegebenen Zahl M gleich kommt.

Beweis. Eine solche Function ist z. B. gleich cx. Denn wenn wir x einmahl a, ein andermahl b setzen: so erhalten wir die Werthe $Fa = ca$ und $Fb = cb$. Bedeutet nun M eine zwischen den Werthen Fa und Fb, daß ist ca und cb, gelegene Zahl: so muß $cb \gtrless M \gtrless ca$ seyn. Daher ist auch, wenn wir beiderseits durch c dividiren $b \gtrless \frac{M}{c} \gtrless a$ sofern c positiv ist, und $a \gtrless \frac{M}{c} \gtrless b$ sofern c negativ ist. In jedem Falle ist aber $\frac{M}{c}$ eine zwischen a und b gelegene Zahl; und wenn wir diese an die Stelle von x in unsere Function setzen, so erhalten wir $c\frac{M}{c} = M$. Also gibt es allerdings einen zwischen a und b gelegenen Werth der Veränderlichen, für welchen die Function cx den zwischen ca und cb gelegenen Werth M annimmt.

§. 28. Erklärung. Wenn eine Function Fx die so eben beschriebene Beschaffenheit hat, d. h. wenn es zu jeder Zahl M, die zwischen zweyen ihrer Veränderlichen Fa und Fb liegt, auch für ihre Veränderliche x einen zwischen den Zahlen a und b liegenden Werth m gibt, für welchen $Fm = M$ ist; so sagen wir kurz, die Function Fx übergehe aus keinem ihrer Werthe Fa in einen anderen Fb, ohne erst jeden dazwischen liegenden M angenommen zu haben. Durch diesen Ausdruck deuten wir zweyerley an: erstlich daß jede zwischen den Zahlen Fa und Fb liegende Zahl, d. h. jede Zahl, die dem Verhältnisse $Fa \gtrless M$ und $M \gtrless Fb$ entspricht, auch einer der Werthe sey, welchen die Fx irgend ein- oder vielleicht auch mehrere Mahle annimmt; und zweytens, daß dieses, wenn nicht öfter, wenigstens einmahl bey einem Werthe $x = m$ geschehe, der zwischen den Werthen a und b liegt. d. h. dem Verhältnisse $a \gtrless m$ und $m \gtrless b$ entspricht.

§. 29. Lehrsatz. Eine Function, welche entweder durchgängig, oder doch innerhalb gegebenen Grenzen stetig ist, übergehet aus keinem ihrer Werthe in einem anderen davon verschiedenen (d. h. ungleichen) Werth ohne erst alle dazwischen liegende wenigstens einmahl angenommen zu haben.

Beweis. Seyen a und b ein Paar innerhalb derjenigen Grenzen, auf welche sich die Stetigkeit der Function Fx erstreckt, gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen, bey welchen die Werthe Fa und Fb selbst einander ungleich sind. Bezeichnen wir nun den kleineren derselben durch Fa: so ist, wenn die Zahl M eine beliebige zwischen Fa und Fb gelegene Zahl vorstellt, $M - Fa$ positiv, und wegen der Stetigkeit der Function für $x = a$ gibt es eine positive sowohl als negative Zahl i. klein genug, daß auch noch $M - F(a+i)$ positiv ausfällt. Dazu bedarf es nämlich nur, i seinem absoluten Werthe nach so klein zu nehmen, daß $F(a+i) - Fa < (M - Fa)$ wird und verbleibt, so sehr man auch i noch ferner abnehmen läßt. Für diese Werthe von i und für alle kleineren gilt von dem Ausdrucke $M - F(a+i)$, daß er fortwährend positiv sey. Nehmen wir nun i mit demselben Vorzeichen, welches der Unterschied $b - a$ hat, und vergrößern dasselbe nach seinem absoluten Werthe allmählich bis es den absoluten Werth $b - a$ erreicht: so wird $a + i = a + (b - a) = b$, und $M - F(a+i) = M - Fb$ gewiß nicht mehr positiv, sondern schon negativ, weil sonst nich gesagt werden könnte, daß M zwischen Fa und Fb liege. Die Eigenschaft, den Ausdruck $M - F(a+i)$ positiv zu machen, kömmt also der veränderlichen Zahl i wohl für alle Werthe zu, die kleiner sind als ein gewisser, aber nicht für alle überhaupt. Ohne Zweifel gibt es also (nach §.0.) eine meßbare Zahl m, die ihrem absoluten Werthe nach die größte derjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle absolut kleineren Werthe von i diese Eigenschaft noch haben. Untersuchen wir nun, von welcher Beschaffenheit dieses m sey und welchen Werth der Ausdruck $M-F(a+i)$ annehme, wenn wir der i den Werth m selbst ertheilen.

1. Zuvörderst ist aus der Art, wie wir m bestimmten, von selbst einleuchtend, daß es dasselbe Vorzeichen wie i d. i. wie $b-a$ habe: hiezu aber füge ich noch die Bemerkung, dieß m sey seinem absoluten Werthe nach $< b-a$. Weil nämlich $M-Fb$, wie wir bereits bemerkten, negativ ist; so muß es wegen der Stetigkeit der Function x für den Werth $x=b$, eine positive sowohl als negative Zahl ω geben klein genug, daß auch noch $M-F(b-\omega)$ negativ ist. Setzen wir also, weil dieß erlaubt ist, fest, daß ω dasselbe Vorzeichen habe wie $b-a$ und somit auch wie i und m. Wäre nun m seinem absoluten Werthe nach nicht $< b-a$: so müßte es entweder $=b-a$ oder $> b-a$ seyn.

A. Im ersten Falle wäre $b=a+m$, und somit $M-F(b-\omega)= = M-F(a+m-\omega)$ negativ: d. h. es gebe einen Werth für $i=m-\omega$, der seinem absoluten Werthe nach $< m$ ist, und den Ausdruck $M-F(a+i)$ gleichwohl schon negativ macht. Es wäre also nicht wahr, daß alle i, die ihrem absoluten Werthe nach $< m$ sind, $M-F(a+i)$ positiv machen.

B. Im zweyten Falle, wenn m seinem absoluten Werthe nach $> b-a$ wäre: würde $b-a$ selbst schon einen Werth für i kleiner als m vorstellen, der den Ausdruck $M-F(a+i)=M-Fb$ negativ macht: im geraden Widerspruche mit der Voraussetzung, daß alle i, die kleiner als m sind, $M-F(a+i)$ positiv machen sollen. Es erübriget also nur zuzugestehen, daß m seinem absoluten Werthe nach $< b-a$ sey. Dann aber ist (nach §.) $a+m$ sicherlich ein Werth, der innerhalb der Grenzen a und b liegt.

2. Der Werth, den der Ausdruck $M-F(a+i)$ für $i=m$ annimmt, d. h. $M-F(a+m)$, kann weder positiv noch negativ seyn. Denn

a) wäre $M-F(a+m)$ positiv, so gäbe es, weil $a+m$ innerhalb a und b liegt, und somit die Function Fx für den Werth $x=a+m$ stetig ist, ein ω klein genug, daß auch noch $M- -F(a+m\pm\omega)$ positiv wäre. Aber einer der Werthe $m+\omega$ oder $m-\omega$ ist gewiß absolut größer als m: somit wäre m nicht der größte Werth, von dem gesagt werden kann, daß alle i, die $< m$ sind, größte $M - F(a+i)$ positiv machen.

b) Eben so wenig kann $M - F(a+m)$ negativ seyn, weil es sonst ein ω klein genug gäbe, daß auch $M - F(a+m \pm \omega)$ negativ wäre. Und da einer der Werthe $m + \omega$ oder $m - \omega$ kleiner als m ist: so wäre es nicht wahr, daß alle i, die $< m$ sind, den Ausdruck $M - F(a+i)$ positiv machen. Da auch M meßbar ist, und aus der Stetigkeit der Function Fx folgt, daß der Werth $F(a+m)$ gleichfalls ein meßbarer sey: so muß auch der Unterschied $M - F(a+m)$ eine meßbare Zahl vorstellen. Da er nun aber weder positiv noch negativ ist; so erübriget nur, daß $M - F(a+m) = 0$ oder $M = F(a+m)$ sey. Es ist sonach erwiesen, daß es einen und zwar innerhalb a und b gelegenen Werth von x gebe, nämlich $a+m$, bey dem die Function $Fx = F(a+m)$ in den verlangten Werth M übergehet.

§. 30. Zusatz. In diesem Lehrsatze ist nun behauptet und dargethan worden, daß es für jeden zwischen Fa und Fb gelegenen Werth M wenigstens einen zwischen a und b gelegenen Werth der x gebe, der $Fx = M$ macht, sofern die Function Fx für alle Werthe der x von a bis b einschließlich stetig ist. Daß es aber nur einen einzigen dergleichen Werth für x gebe, bey welchem Fx in M übergehet, sagen wir keineswegs. In der That gibt es Fälle, wo sich mehr als Ein solcher Werth nachweisen läßt. So nimmt z. B. die Function $x^3 - 9x^2 + 26x + 1$ für $x = 1$ den Werth 19, und für $x = 5$ den Werth 31, den zwischen 19 und 31 gelegenen Werth 25 aber sowohl für $x = 2$, als auch für $x = 3$, als nämlich auch für $x = 4$ an. Und nicht blos mehrere, sondern sogar unendliche viele von einander verschiedene Werthe der Veränderlichen, die alle innerhalb der Grenzen a und b liegen, können zu einem und eben demselben zwischen Fa und Fb liegenden Werthe M führen, ohne daß Fx darum aufhören müßte, eine stetige Function zu seyn. Wenn wir z. B. festsetzen, daß die Function Fx für alle x, die < 5, den Werth $Fx = 4x$, für alle $x \gtreqless 5$ und $\lesseqgtr 10$ aber den unveränderten Werth $Fx = 20$, für alle x endlich, die > 10 sind, den Werth $7x - 50$ habe: so überzeugt man sich leicht, daß die Art, wie sich die Function Fx verändert, dem §. 2. erklärten Gesetze der Stetigkeit gemäß sey; indem der Unterschied $F(x + \Delta x) - Fx$ für jeden Werth von x in das Unendliche abnimmt, wenn Δx in das Unendliche abnimmt. Für alle x nämlich, die < 5, haben wir

$$F(x+\Delta x) - Fx = 4(x+\Delta x) - 4x = 4\Delta x.$$

Für $x = 5$ und ein negatives Δx, haben wir immer noch

$$F(x - \Delta x) - Fx = 4(5 - \Delta x) - 4.5 = -4\Delta x.$$

Für ein positives Δx dagegen, nämlich für alle Werthe von x, die innerhalb 5 und 10 liegen, ist $F(x + \Delta x) - Fx$ unverändert $= 20 - 20 = 0$; welches der Vorderung, daß ΔFx in das Unendliche abnehmen solle, eben nicht widerspricht: weil diese nur den Sinn hat, daß $\Delta Fx < \frac{1}{N}$ werden und verbleiben müsse: was in der That geschieht, weil ja auch $0 < \frac{1}{N}$ ist. Auch für den Werth $x = 10$ und ein negatives Δx haben wir noch immer

$$F(x - \Delta x) - Fx = 20 - 20 = 0.$$

Für ein positives Δx aber ergibt sich

$$F(x + \Delta x) - Fx = 7(10 + \Delta x) - 50 - 20 = 7.\Delta x.$$

Eben so findet sich für jedes x, das > 10,

$$F(x + \Delta x) - Fx = 7(x + \Delta x) - 50 - 7x + 50 = 7.\Delta x.$$

Also ist unsere Function ohne Zweifel stetig für alle Werthe ihrer Veränderlichen. Für den Werth $x = 1$ aber hat sie den Werth 4, für $x = 11$ den Werth 27, und wenn wir fragen, für welchen innerhalb 1 und 21 gelegenen Werth der x sie in den zwischen 4 und 27 liegenden Werth 20 übergehe: so ist die Antwort, daß sie diesen Werth zuvörderst für $x = 5$ erweise, dann aber für eine unendliche Menge von Werthen, nämlich für alle von 5 bis 10 einschließlich, beybehalte, und erst für Werthe von x, die > 10 sind, würde andere Werthe bekommen.

§. 31. Lehrsatz. Wenn eine Function Fy für den bestimmten Werth ihrer Veränderlichen, den wir so eben durch y bezeichnen, stetig ist entweder nur hinsichtlich auf einen positiven oder nur hinsichtlich auf einen negativen Zuwachs von y oder in beyden Hinsichten zugleich, und wir betrachten nun diese Veränderliche y selbst als Function einer anderen frey veränderlichen Zahl x, wobey sich findet, daß diese Function $fx = y$ für den bestimmten Werth von x, der $fx = y$ macht, gleichfalls stetig sey, und dieß zwar wenigstens hinsichtlich auf einen solchen Zuwachs von x, dabey das zugehörige Δy dasselbe Vorzeichen erhält, in Betreff dessen auch Fy Stetigkeit hat: so behaupte ich, daß die Function von x, $F(fx)$, welche zum Vorschein kommt, wenn wir in dem Fy an die Stelle des y die fx setzen, gleichfalls stetig sey und dieß zwar hinsichtlich auf dieselbe positive oder negative Natur des Zuwachses, die schon erwähnt wurde.

Beweis. Weil die Function Fy stetig seyn soll für denjenigen Werth ihrer Veränderlichen, die wir soeben durch y bezeichnen; so muß wenigstens für ein gewisses (positives oder negatives) Vorzeichen von Δy, deren Unterschied $F(y+\Delta y)-Fy$ in das Unendliche abnehmen, sofern nur Δy in das Unendliche abnimmt. Setzen wir aber $y = fx$, so ist $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$, und $\Delta y = f(x+\Delta x)-fx$. Hat nun auch fx Stetigkeit für denjenigen Werth von x, der eben die Gleichung $fx = y$ hervorbringt, und bey demjenigen (positiven oder negativen) Zuwachse Δx, der uns ein Δy mit jenem Vorzeichen, wie es zur Stetigkeit der Fy erforderlich ist, hervorbringt: so kann durch bloße Veränderung von Δx, Δy in das Unendliche vermindert werden. Also wird, wenn wir statt y den Werth fx und statt Δy den Werth

$f(x+\Delta x)-fx$ setzen, $F(y+\Delta y)-Fy = F(f(x+\Delta x))-F(fx)$

gleichfalls in das Unendliche abnehmen können, sofern wir nur Δx in das Unendliche abnehmen lassen.

§. 32. Anmerkung. Die in diesem Lehrsatze gemachte Beschränkung, betreffend die positive oder negative Natur des Zuwachses, für welchen die Fy Stetigkeit hat, ist wohl nicht überflüssig, ob man sie gleich gewöhnlich wegläßt. Wäre z. B. die Function $Fy = \sqrt{1-y}$, so wäre sie für den Werth $y = 1$, nur stetig hinsichtlich auf einen negativen Zuwachs. Setzen wir aber $y = 4x^2 + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$ so ist dieß eine Function, die bey demjenigen Werthe von x, der $fx = y = 1$ macht, nämlich bey $x = \frac{1}{2}$ nur stetig ist hinsichtlich auf ein positives Δx, aus welchem gleichfalls nur ein positives Δy hervorgehet; daher den $F(fx)$ für den angegebenen Werth in der That gar keine Stetigkeit beweiset. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$F(fx) = \sqrt{\left(1-4x^2-\sqrt{\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}\right)},$$

welches für $x = \frac{1}{2}$ zu Null wird, für $x = \frac{1}{2} \mp \Delta x$ aber imaginär ausfällt, wir mögen Δx positiv oder negativ annehmen.

§. 33. Zusatz. Nicht eben so wie von der Stetigkeit der Function Fy für einen gewissen Werth von y, und aus der Stetigkeit der fx für denjenigen Werth von x, der $fx = y$ macht, auf die Stetigkeit der $F(fx)$ geschlossen werden kann, läßt sich auch umgekehrt von der Unstetigkeit der Functionen Fy und fx für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen, sofort auch auf die Unstetigkeit der $F(fx)$ für diese Werthe schließen: sondern ob $F(fx)$ in der That unstetig seyn werde oder nicht, kommt noch auf eigene Umstände an. So ist $Fy = y + \frac{1}{1-y}$ unstetig für den Werth $y = 1$; und wenn wir $y = \frac{1}{x}$ setzen, so ist fx eine Function, die für $x = 0$ unstetig wird. $F(fx)$ aber wird nun unstetig sowohl wenn $x = 0$, als auch wenn x denjenigen Werth $(= 1)$ annimmt, der $fx = y = 1$ d. h. das Fy unstetig macht. Wäre dagegen die Function $Fy = \frac{1}{1-y}$; so würde für $y = fx = \frac{1}{x} \cdot F(x) = \frac{x}{x-1}$ nur für den einzigen Werth $x = 1$, der Fy unstetig macht, unstetig.

§. 34. Lehrsatz. Wenn eine veränderliche Zahl von mehreren freyen Veränderlichen abhängt: so kann sie hinsichtlich der Einen und in Beziehung auf einen gewissen Werth derselben stetig; hinsichtlich einer anderen aber und in Beziehung auf einen anderen Werth unstetig seyn.

Beweis. So ist z. B., wenn $W = x + \frac{1}{10-y}$ ist, diese veränderliche Zahl stetig zu nennen hinsichtlich der x und zwar für jeden Werth derselben (vorausgesetzt, daß nur y eine meßbare und von 10 verschiedene Zahl ist); in Hinsicht auf y ist eben diese Zahl W nur stetig zu nennen, für alle diejenigen Werthe, die $>$ oder $<$ 10 sind.

§. 35. Lehrsatz. Blos aus dem Umstande, daß eine gewisse Function $F(x, y, z \ldots)$ von mehreren Veränderlichen $x, y, z \ldots$ hinsichtlich der Einen x und in Beziehung auf gewisse Werthe derselben stetig — oder auch unstetig — ist, so lange den übrigen Veränderlichen $y, z, \ldots$ die bestimmten Werthe $y, z, \ldots$ beigelegt werden, kann nicht gefolgert werden, daß diese Function jene Stetigkeit oder auch Unstetigkeit beybehaltet, wenn eine einzige der Zahlen $y, z, \ldots$ den angegebenen Werth verändert.

Beweis. Wenn die Zahl $W = F(x, y, z, \ldots)$ eine Function nicht nur der x, sondern auch noch der $y, z, \ldots$ ist; so hängt der jedesmalige Werth dieser Zahl nicht nur von dem Werthe der x, sondern auch von den Werthen der $y, z \ldots$ ab; und das Gesetz dieser Abhängigkeit kann ein solches seyn, daß die Veränderung, welche W erfährt, wenn x in $x \pm \Delta x$ übergehet, bey einem gewissen Werthe der $y, z, \ldots$ mit Δx selbst in das Unendliche abnimmt, wo dann W stetig heißen wird, bey einem andern Werthe der $y, z, \ldots$ aber nimmt die erwähnte Veränderung nicht in das Unendliche ab, und somit wird nun W unstetig seyn, und im Gegentheil. Also werden wir blos aus dem Umstande, weil die Function $W = F(x, y, z, \ldots)$ von einer solchen Beschaffenheit ist, daß sie bey einem gewissen Werthe der $y. z. \ldots$ in Hinsicht auf die Veränderliche x dem Gesetze der Stetigkeit folgt oder im Gegentheile demselben nicht gehorche, noch nicht berechtigt seyn zu schließen, daß sie sich auch bey einem andern Werthe der $y, z, \ldots$ ebenso verhalten müsse. So ist z. B. die Function $x^2 + \frac{1}{3+y}$ stetig in Hinsicht auf x, wenn wir für y einen von -3 verschiedenen Werth annehmen; für den Werth $y = -3$ aber ist diese Function unstetig; weil $\frac{1}{3+y}$ unmeßbar wird. Die Function

$$x^2 + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{2-y} + \frac{1}{3-y} + \frac{1}{4-y} + \ldots \textit{ in inf.}$$

ist stetig für jeden Werth von x, so lange y nur eben keine derjenigen Werthe annimmt, die in der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3. 4. . . . liegen. U. s. w.

§. 36. Lehrsatz. Selbst wenn wir wissen, daß die Veränderliche W nur von den zwey Veränderlichen x und y abhänge, und daß sie sich stetig erweise für alle Werthe der x, die innerhalb a und b liegen, während y einen bestimmten innerhalb c und d gelegenen Werth behauptet, und ebenso stetig sich erweise für alle Werthe der y, die innerhalb c und d liegen, während x einen bestimmten innerhalb a und b liegenden Werth behauptet. — dürfen wir gleichwohl nicht schließen, daß W stetig sey auch nur für einen einzigen Werth von x, während y von jenem vorigen verschiedenen Werth annimmt; und ebenso wenig, daß W stetig sey für einen einzigen Werth von y, während x einen von jenem vorigen verschiedenen Werth empfängt.

Beweis. Denn das Gesetz der Abhängigkeit der W von den beiden Veränderlichen x und y könnte ja auch von einer solchen Beschaffenheit seyn, daß wohl allerdings bey einem bestimmten innerhalb c und d gelegenen Werthe von y, die Aenderung von W mit der von x, und ebenso auch bey einem bestimmten innerhalb a und b gelegenen Werthe von x die Aenderung der W mit der von y in das Unendliche abnimmt, daß aber sobald im ersten Falle y und zugleich x einen anderen Werth annimmt, keines von Beyden mehr Statt hat. Denn was hindert uns z. B. festsetzen, daß W für jeden innerhalb a und b gelegenen Werth von x und während des bestimmten innerhalb c und d liegenden Werthes von $y = c + \gamma$ den meßbaren Werth $W = x^2$ annehme, bey jedem anderen Werthe der y aber unmeßbar sey, daß ferner eben so für jeden innerhalb c und d gelegenen Werth von y, und während x den bestimmten innerhalb a und b liegenden Werth $x = a + \alpha$ erhält, den meßbaren Werth $W = y^2$ annehme, bey jedem anderen Werthe der x aber unmeßbar sey? In diesem Falle nun gäbe es offenbar nicht einen einzigen außerhalb $c + \gamma$ gelegenen Werth von y, und nicht einen einzigen außerhalb $a + \alpha$ gelegenen Werth von x, von der Art, daß bey diesen beyden Werthen W einen meßbaren Werth erhielte. Sollte nun $W = F(x, y)$ sich stetig erweisen für irgend einen Werth von x, während y einen von $c + \gamma$ verschiedenen annimmt: so müßte, wenn wir den Werth von x durch Δx, jenen von y aber durch $c + \gamma + \Delta\gamma$ bezeichnen, der Unterschied

$$F(x + \Delta x,\ c + \gamma + \Delta\gamma) - F(x,\ c + \gamma + \Delta\gamma)$$

mit Δx in das Unendliche abnehmen. Es müßte also auch beyde Ausdrücke

$$F(x,\ c + \gamma + \Delta\gamma) \text{ und } F(x + \Delta x,\ c + \gamma + \Delta\gamma)$$

meßbare Zahlen bezeichnen. Allein nach der Voraussetzung, die wir nur eben gemacht, muß wenigstens Einer von diesen beyden Ausdrücken eine meßbare Zahl vorstellen, weil entweder x oder $x + \Delta x$ einen von $a + \alpha$ verschiedenen Werth hat.

§. 37. Anmerkung. Sachkündige wissen, das es selbst unter derjenigen Classe von Functionen, die nur einem einzigen für alle Werthe ihrer Veränderlichen gleichlautenden Gesetze folgen, sehr einfache Beyspiele geben, die zum Beweise unseres Lehrsatzes angeführt werden können. So ist die Function

$$xy + (1 - x)\left[\sqrt{2 - y} + \sqrt{y - 2}\right]$$

stetig für jeden Werth von x, wenn wir der y den Werth 2 geben, und für jeden Werth von y, wenn wir der x den Werth 1 anweisen; weil in beyden Fällen $(1 - x)\left[\sqrt{2 - y} + \sqrt{y - 2}\right]$ zu Null wird. Nehmen wir aber für y irgend einen von 2, oder für x irgend einen von 1 verschiedenen Werth; so läßt sich im ersten Falle kein einziger Werth für x, im zweyten kein einziger für y auffinden, bey welchem diese Function Stetigkeit hätte.

§. 38. Erklärung. Ich sage, daß die Function mehrerer Veränderlichen $F(x, y, z, \ldots)$ Stetigkeit habe zugleich für den

Werth von x und bey einem positiven oder negativen Zuwachse desselben ingleichen für den Werth y und bey einem positiven oder negativen Zuwachse desselben, wie auch für den Werth z und bey einem positiven oder negativen Zuwachse desselben, wenn folgende Umstände eintreten:

a) wenn diese Function für den Werth x und bey der angegebenen Natur seines Zuwachses Stetigkeit äußert, für jeden Werth der $y, z \ldots$, der nur nicht außerhalb der beziehungsweisen Grenzen y und $y + \Delta y$, z und $z + \Delta z, \ldots$ liegt, wo Δy, $\Delta z, \ldots$ die angegebenen Vorzeichen haben,

b) wenn eben dieß auch von y gilt, d. h. wenn die Function für den Werth y und bey der angegebenen positiven oder negativen Natur seines Zuwachses Stetigkeit äußert, bey jedem Werthe der $x, y, z, \ldots$, der nur nicht außerhalb der beziehungsweisen Grenzen x und $x + \Delta x$, z und $z + \Delta z, \ldots$ liegt, wo Δx, $\Delta z \ldots$ die angegebenen Vorzeichen haben;

c) wenn eben dieß auch von z gilt, u. s. w.

Wenn die Zuwächse der $x, y, z, \ldots$ sowohl positiv als auch negativ seyn können; so sage ich nur schlechtweg, daß $F(x, y, z, \ldots)$ für die Werthe $x, y, z \ldots$ Stetigkeit habe. Und nun erräth man schon von selbst den Sinn der Redensarten, daß $F(x, y, z, \ldots)$ Stetigkeit habe für alle Werthe von x, die innerhalb a und b; von y, die innerhalb c und d; von z, die innerhalb e und f liegen u. s. w. oder für alle Werthe von $x, y, z, \ldots$ mit Ausnahme dieser und jener: u. s. w.

§. 39. Lehrsatz. Wenn eine Function mehrerer Veränderlichen $W = F(x, y, z)$ stetig ist hinsichtlich aller ihrer Veränderlichen für die durch $x, y, z \ldots$ bezeichneten Werthe, und in Bezug auf einen positiven sowohl als negativen Zuwachs derselben; so kann der Unterschied

$$\Delta W = F(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z, \ldots) - F(x, y, z, \ldots),$$

den man erhält, indem sich alle jene Veränderlichen zugleich um gewisse Zuwächse $\Delta x, \Delta y, \ldots$ stetig verändern, nach seinem absoluten Werthe kleiner als jeder gegebene Bruch $\frac{1}{N}$ werden und wird auch kleiner verbleiben, wenn man die Zuwächse $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ nur klein genug annimmt, und so sehr man sie dann auch noch hinterher vermindert.

Beweis. Nach §. 9. (Einl.) ist in der Rede stehende Zuwachs

$$\Delta W = F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ldots) - F(x,y,z,\ldots) =$$
$$= \Delta_x F(x,y,z,\ldots) + \Delta_y F(x+\Delta x, y, z,\ldots) +$$
$$+ \Delta_z F(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots) + \cdots$$

Weil aber die gegebene Function $F(x, y, z\ldots)$ stetig seyn soll für den Werth x bey einem positiven sowohl als negativen Zuwachse desselben, sofern nur $y, z,\ldots$ ihre Werthe behalten: so nimmt

$$\Delta_x F(x,y,z,\ldots) = F(x+\Delta x, y, z,\ldots) - F(x, y, z\ldots)$$

mit Δx in das Unendliche ab. Weil ferner die gegebene Function auch stetig seyn soll für den Werth y, sofern nur x und z ihre Werthe behalten, oder um einen positiven oder negativen Zuwachs verändern, der so klein werden kann, als man nur immer will; so muß auch

$$\Delta_y F(x+\Delta x, y, z,\ldots) = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots) - F(x+\Delta x, y, z\ldots)$$

mit Δy in das Unendliche abnehmen. Weil aber so unsere Function stetig seyn soll für den Werth z, sofern nur $x, y,\ldots$ ihre Werthe behalten, oder um einen positiven oder negativen Zuwachs verändern, der so klein werden kann, als man nur immer will: so muß auch

$$\Delta_z F(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots) = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z,\ldots) -$$
$$- F(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots)$$

mit Δz in das Unendliche abnehmen können. Also ist kein Zweifel, daß auch die algebraische Summe der eben betrachteten drey Ausdrücke d. h. ΔW selbst in das Unendliche abnehmen könne, wenn $\Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots$ in das Unendliche abnehmen können.

§. 40. Lehrsatz. Wenn eine Function mehrerer Veränderlichen $F(y, z\ldots)$ stetig ist für eine jede dieser Veränderlichen wenigstens für den bestimmten Werth derselben, den wir soeben durch $y, z,\ldots$ bezeichnen und hinsichtlich auf einen gewissen positiven oder negativen Zuwachs, und wir betrachten nun diese Veränderlichen selbst als Functionen einer neuen frey veränderlichen Zahl x, $y = fx$, $z = \varphi x,\ldots$ u. s. w., wobey sich ergibt, daß diese Functionen $fx, \varphi x,\ldots$ für einen und eben denselben Werth von x, denjenigen nämlich, der die nun eben angeführten Gleichungen $fx = y$, $\varphi x = z,\ldots$ hervorbringt, und für einen und eben denselben positiven oder negativen Zuwachs Δx Stetigkeit haben, und ebenso diejenigen positiven oder negativen Zuwächse Δy, $\Delta z\ldots$ erhalten, in Betreff deren die Function $F(y, z,\ldots)$ Stetigkeit hat: so behaupte ich, daß die Function von x, $F(fx, \varphi x, \ldots)$, welche zum Vorschein kömmt, wenn wir in $F(y, z, \ldots)$ an die Stelle der $y, z, \ldots$ beziehungsweise $fx, \varphi x, \ldots$ setzen, gleichfalls stetig sey, und dieß zwar hinsichtlich auf den bereits erwähnten Werth von x, der die Gleichungen $fx = y$, $\varphi x = z, \ldots$ gibt, und in Bezug auf den positiven oder negativen Zuwachs, der die erwähnten positiven oder negativen Zuwächse $\Delta y, \Delta z, \ldots$ verlangt.

Beweis. Wenn x in $x + \Delta x$ übergehet, übergehet $fx = y$ in

$$f(x+\Delta x) = y + \Delta y,\ \varphi x = z \text{ in } \varphi(x+\Delta x) = z + \Delta z \text{ u.s.w.}$$

Daher ist die Veränderung, welche $F(y, z, \ldots) = F(fx, \varphi x, \ldots)$ erfahren, wenn x in $x + \Delta x$ übergehet, oder

$$\begin{aligned} &F(f(x+\Delta x), \varphi(x+\Delta x), \ldots) - F(fx, \varphi x \ldots) = \\ &= F(y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - F(y, z, \ldots) = \\ &= F(y+\Delta y, z, \ldots) - F(y, z, \ldots) + F(y+\Delta y. z+\Delta z, \ldots) - \\ &- F(y+\Delta y, z, \ldots) + \cdots \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung aber sind für den festgesetzten Werth von x, und für ein bestimmtes Vorzeichen von Δx. fx und $\varphi x, \ldots$ stetige Functionen, die Unterschiede

$$f(x+\Delta x) - fx = \Delta y,\ \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \Delta z, \ldots$$

nehmen also mit Δx in das Unendliche ab: und da sie überdieß auch ein jeder dasjenige Vorzeichen haben, welches erforderlich ist, wenn sich die Function $F(y, z \ldots)$ stetig erweisen soll; so folgt aus der vorausgesetzten Stetigkeit dieser Function für y, daß $F(y+\Delta y, z, \ldots) - F(y, z, \ldots)$ mit Δy oder Δx in das Unendliche abnehmen könne. Auf ähnliche Weise folgt aber aus der Voraussetzung, daß auch die Function $F(y, z, \ldots)$ für den Werth z und bey einem Werthe von y, der nur nicht außerhalb der Grenzen von y und $y+\Delta y$ liegt, also auch bey dem Werthe $y+\Delta y$ selbst, Stetigkeit äußert, daß auch der Unterschied

$$F(y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - F(y+\Delta y, z \ldots)$$

in das Unendliche abnehmen könne, wenn Δx in das Unendliche abnimmt. U. s. w.

Hieraus ergibt sich denn deutlich, daß auch der ganze Unterschied

$$F(f(x+\Delta x), \varphi(x+\Delta x), \ldots) - F(fx, \varphi x, \ldots) \text{ oder } \Delta F(fx. \varphi x, \ldots)$$

mit Δx in das Unendliche abnehmen könne, d. h. daß $F(fx, \varphi x, \ldots)$ für den bestimmten Werth von x, und das bestimmte Vorzeichen von Δx Stetigkeit habe.

§. 41. Anmerkung. Uiber die Nothwendigkeit der in diesem Lehrsatze angebrachten Beschränkung, betreffend die positive oder negative Natur der Zuwächse $\Delta y, \Delta z, \ldots$ brauche ich nach dem im §. 32. Gesagten wohl nichts mehr zu erinnern.

§. 42. Zusatz. Nur von der Stetigkeit der Functionen $F(y, z, \ldots)$ und $y = fx$. $z = \varphi x, \ldots$ lehrt uns der vorhergehende Satz unter gehöriger Einschränkung auf die Stetigkeit der $F(fx, \varphi x \ldots)$ schließen; nicht aber läßt sich auch umgekehrt von der Unstetigkeit einer der Functionen $F(y, z \ldots)$ $y = fx$. $z = \varphi x \ldots$ für einen gewissen Werth von x, sofort der Schluß auch auf die Unstetigkeit der $F(fx. \varphi x \ldots)$ machen: wie schon aus §. 33. erhellet.

§. 43. Zusatz. Also ist jede Function, die eine algebraische Summe, ingleichen auch die ein Product ist aus einer endlichen Menge anderer Functionen einer und eben derselben frey Veränderlichen x stetig für alle Werthe dieser Veränderlichen, höchstens mit Ausnahme deren, für welche eine oder die andere dieser Functionen selbst unstetig wird. Denn eine Summe, ingleichen auch ein Product von einer endlichen Menge frey Veränderlichen Zahlen, ist stetig für alle ihre Werthe. (§. 5.)

§. 44. Zusatz. Eine Function, welche ein Quotient zweyer andern Functionen von einer und eben derselben frey Veränderlichen x ist, hat Stetigkeit für alle Werthe dieser Veränderlichen, höchstens mit Ausnahme derjenigen, für welche eine oder die andere dieser Functionen selbst unstetig werden, oder diejenige, die der Divisor ist, in den Werth Null übergehet.

§. 45. Lehrsatz. Jede ganze rationale Function einer Veränderlichen x d. h. jede Function, welche sich unter der Form

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + lx + m$$

darstellen läßt, worin $a, b, c, \ldots l, m$ meßbare Zahlen bezeichnen, ist für jeden meßbaren Werth ihrer Veränderlichen stetig.

Beweis. Den jedes einzelne Glied dieser algebraischen Summe wie ax^n, $bx^{n-1}, \ldots$ ist stetig für jeden Werth von x. (§. 6.) Also auch ihre ganze Summe.

§. 46. Lehrsatz. Auch jede gebrochene rationale Function einer Veränderlichen x d. h. jede Function, welche sich darstellen läßt unter der Form

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + lx + p}{\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \gamma x^{m-2} + \cdots + \lambda x + \pi}$$

ist stetig für jeden Werth ihrer Veränderlichen x, der nur den Nenner

$$\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \gamma x^{m-2} + \cdots + \lambda x + \pi$$

nicht zu Null macht.

Beweis. Ergibt sich aus dem vorhergehenden.

§. 47. Uibergang. Da wir aus §. 29. schon wissen, daß alle stetigen Functionen die Eigenschaft haben, aus einem ihrer Werthe in einen anderen nicht zu übergehen, ohne erst alle dazwischen liegenden Werthe wenigstens einmahl berührt zu haben, so leitet dieß auf die Frage, ob diese Eigenschaft den stetigen Functionen nicht vielleicht ausschließlich zukomme, dergestalt, daß jede Function, die diese Beschaffenheit hat, auch stetig seyn muß. Die Beantwortung dieser Frage liefert der folgende

§. 48. Lehrsatz. Blos aus dem Umstande, daß eine gewisse Function aus einem ihrer Werthe in einen anderen übergehet, ohne erst alle dazwischen liegenden ein oder mehrere Mahle angenommen zu haben, folget noch keineswegs, daß ihre Aenderung dem Gesetze der Stetigkeit gehorche.

Beweis. Die Voraussetzung, daß eine gewisse Zahl W von jedem ihrer Werthe in einen anderen nur dadurch übergehet, daß sie erst alle dazwischen liegenden annimmt, verträgt sich mit der Voraussetzung, daß sie für jeden Werth ihrer Veränderlichen x, welche der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ unterstehet $= ax$, für jeden anderen Werth aber einen beliebigen anderen Werth habe. Denn wenn der Werth, den W für diese anderen Werthe von x annehmen soll, nicht festgesetzt ist; so läßt sich, weil es zwischen je zweyen Werthen, die durch die vorige Voraussetzung bestimmt sind, d. h. zwischen je zweyen, welche zu zwey der Form $\frac{2m+1}{2^n}$ unterstehenden Werthen von x gehören, eine unendliche Menge von Werthen der W gibt, jederzeit annehmen, daß sich unter diesen unendlich vielen Werthen auch alle diejenigen befinden, die zwischen den erwähnten beyden liegen. Dann aber erfüllt W die Bedingung des Lehrsatzes, ist aber gleichwohl, wie wir aus §. 1. schon wissen, für keinen Werth ihrer Veränderlichen stetig.

§. 49. Lehrsatz. Es gibt Functionen, bey welchen es entweder allgemein oder doch für alle innerhalb gegebener Grenzen liegende Werthe ihrer Veränderlichen gibt, daß zu jedem größeren Werthe der letzteren auch ein größerer, oder im Gegentheile ein kleinerer Werth der Function gehöret.

Beweis. Bey der Function $Fx = ax$ gehöret, sofern a positiv ist, zu jedem größeren x, ein größerer Werth von W. Ist nämlich $x_2 > x_1$: so ist, wenn a positiv ist, (nach §. 00.) auch $ax_2 > ax_1$ d. h. $Fx_2 > Fx_1$. Ist aber im Gegentheile a negativ, so gehöret zu dem größeren x immer ein kleineres Fx: denn da ist (nach §. 00) $ax_2 < ax_1$ d. h. $Fx_2 < Fx_1$.

§. 50. Erklärung. Wenn eine einförmige Function von x. $= Fx$ von der Beschaffenheit ist, daß es entweder allgemein oder doch für alle innerhalb gegebener Grenzen a und b liegende Werthe ihrer Veränderlichen gibt, daß jedem größeren Werthe dieser Veränderlichen auch ein größerer Werth von ihr selbst zugehöret: so sagen wir, daß diese Function entweder fortwährend oder doch innerhalb der Grenzen a und b wachse oder steige. Wenn aber im Gegentheile zu jedem größeren Werthe der x ein kleinerer der Function zugehöret; so sagen wir, daß sie entweder fortwährend oder doch innerhalb der Grenzen a und b abnehme oder falle.

§. 51. Zusatz. Wenn es also falsch seyn solle, daß eine Function, welche doch lauter meßbare Werthe a und b hat, innerhalb dieser Grenzen fortwährend wachse oder abnehme; so muß es ein Paar innerhalb dieser Grenzen gelegene Werthe von x geben, z. B. μ und ϱ, welche in dem Verhältnisse $\mu < \varrho$ stehen, während die zugehörigen Werthe der Function in dem Verhältnisse $F\mu \geqq F\varrho$ stehen; im zweyten Falle dagegen muß das Verhältniß $F\mu \overline{\gtrless} F\varrho$ Statt finden. Und jederzeit, wenn wir finden, daß $F\mu > F\varrho$ ist, so können wir schließen, daß die Function wenigstens nicht fortwährend wachse, und wenn wir finden, daß $F\mu < F\varrho$, daß sie wenigstens nicht fortwährend abnehme; wenn endlich $F\mu = F\varrho$ ist, daß sie weder fortwährend wachse noch fortwährend abnehme.

§. 52. Zusatz. Wenn eine Function Fx innerhalb a und b beständig wächst oder beständig abnimmt, und es sind x und $x + \Delta x$ ein Paar innerhalb a und b gelegene Werthe; so muß im ersten Falle $(Fx + \Delta x) - Fx$ beständig einerley Vorzeichen mit Δx, im zweyten Falle aber beständig das entgegengesetzte Vorzeichen von Δx haben.

§. 53. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx innerhalb a und b fortwährend wächst oder abnimmt; so nimmt sie jeden ihrer Werthe innerhalb eben dieser Grenzen nur einmahl an.

Beweis. Denn wären μ und ϱ ein Paar innerhalb a und b gelegener Werthe von x, für welche $F\mu = F\varrho$ wird: so würde, da μ und ϱ einander ungleich sind, und also einer derselben, wir wollen annehmen ϱ, eine größere Zahl ist, aus §. 51. folgen, daß unsere Function innerhalb a und b weder fortwährend wachse noch fortwährend abnehme.

§. 54. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx innerhalb a und b fortwährend wächst und es ist $F\varrho > F\mu$, so muß auch $\varrho > \mu$ seyn. Und wenn im Gegentheile die Function fortwährend abnimmt, und es ist $F\mu > F\varrho$, so muß $\mu < \varrho$ seyn.

Beweis. Wir brauchen nur den ersten Theil zu erweisen. Weil $F\varrho > F\mu$, so müssen ϱ und μ ein Paar ungleiche Zahlen seyn; und weil beyde innerhalb a und b gelegen, also meßbar seyn sollen; so muß entweder $\varrho > \mu$ oder $\mu > \varrho$ seyn. Allein die letztere Annahme $\mu > \varrho$ gäbe, weil die Function innerhalb a und b beständig wachsen soll, auch $F\mu > F\varrho$. Da dieses nicht ist, so folgt $\varrho > \mu$.

§. 55. Lehrsatz. Wenn eine einförmige Function Fx innerhalb a und b von keinem ihrer Werthe zu einem anderen übergehet, ohne erst alle dazwischen liegende angenommen zu haben; und wir finden drey aufeinander folgende Werthe ihrer Veränderlichen x: ε, μ, ϱ (d. h. drey solche Werthe, daß $\varepsilon < \mu < \varrho$), deren drey zugehörige meßbare Werthe der Function weder in dem Verhältnisse $F\varepsilon < F\mu < F\varrho$ noch auch in dem $F\varepsilon > F\mu > F\varrho$ stehen: so ist kein Zweifel, daß diese Function wenigstens Einen ihrer Werthe innerhalb a und b zweymahl berührt.

Beweis. Wenn die drey meßbaren Zahlen $F\varepsilon$, $F\mu$, $F\varrho$ weder in dem Verhältnisse $F\varepsilon < F\mu < F\varrho$ noch auch in dem $F\varepsilon > F\mu > F\varrho$ stehen, und wir lassen den Fall, wo ihrer zwey oder gar alle drey gleich angenommen werden, (in welchem Falle die Wahrheit dessen, was unser Lehrsatz aussagt, ganz von selbs einleuchtet) hinweg: so kann nur entweder $F\varepsilon < F\mu > F\varrho$ oder $F\varepsilon > F\mu < F\varrho$ seyn.

1. Ist $F\varepsilon < F\mu > F\varrho$, und es soll nicht $F\varepsilon = F\varrho$ seyn; so erübriget nur entweder $F\varepsilon < F\varrho$ oder $F\varepsilon > F\varrho$. Im ersten Falle ist $F\varepsilon < F\varrho < F\mu$: also kann unsere Function aus dem Werthe $F\varepsilon$ in den Werth $F\mu$ nicht übergehen, ohne erst einen Werth $= F\varrho$ angenommen zu haben, d. h. es muß zwischen ε und μ eine meßbare Zahl λ geben, bey welcher $F\lambda = F\varrho$ wird. Da nun λ als liegend zwischen ε und μ gewiß verschieden ist von ϱ: so gibt es zwey innerhalb a und b gelegene Zahlen λ und ϱ, bey welchen die Function denselben Werth annimmt. Im zweyten Falle, wenn $F\varepsilon > F\varrho$, haben wir $F\varrho < F\varepsilon < F\mu$: also kann unsere Function aus dem Werthe $F\varrho$ in den Werth $F\mu$ nicht übergehen, ohne erst einen Werth $= F\varepsilon$ angenommen zu haben, es muß also zwischen μ und ϱ einen Werth π geben, für welchen $F\pi = F\varepsilon$ wird. Da nun π als liegend zwischen μ und ϱ gewiß verschieden ist von ε: so gibt es zwey innerhalb a und b gelegene Zahlen ε und π, bey welchen unsere Function denselben Werth annimmt.

2. Auf eine ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn das Verhältniß $F\varepsilon > F\mu < F\varrho$ vorausgesetzt wird.

§. 56. Zusatz. Wenn uns also bekannt ist, daß eine Function innerhalb a und b von keinem ihrer Werthe zu einem anderen übergehet, ohne erst alle dazwischen liegende angenommen zu haben und jede nur einmahl berührt: so müssen die zu den drey aufeinander folgenden Werthen ε, μ, ϱ ihrer Veränderlichen zugehörigen Werthe der Function nothwendig nur in einem der beyden Verhältnisse stehen, entweder $F\varepsilon < F\mu < F\varrho$ oder $F\varepsilon > F\mu > F\varrho$.

§. 57. Zusatz. Bezeichnen ε, μ, ϱ, ψ, ... mehr als drey aufeinander folgende Werthe der x, die alle innerhalb a und b liegen, d. h. ist $\varepsilon < \mu < \varrho < \psi \ldots$ so muß entweder $F\varepsilon < F\mu < F\varrho < F\psi \ldots$ oder $F\varepsilon > F\mu > F\varrho > F\psi \ldots$ seyn.

§. 58. Lehrsatz. Wenn eine Function innerhalb a und b aus keinem ihrer Werthe in einen anderen übergehet, ohne erst alle dazwischen liegende angenommen zu haben, und jeden nur einmahl berührt, auch fortwährend meßbar verbleibt: so findet nur Eines von Beyden Statt, entweder sie wächst fortwährend oder nimmt fortwährend ab innerhalb a und b.

Beweis. Es seyen μ und ϱ ein Paar innerhalb a und b gelegene Werthe der Veränderlichen x, und $\mu < \varrho$. Weil nun die Function Fx innerhalb a und b jeden Werth nur einmahl annimmt: so müssen $F\mu$ und $F\varrho$ ungleich: also, weil sie auch beyde meßbar seyn sollen, entweder $F\mu < F\varrho$ oder $F\mu > F\varrho$ seyn. Im ersten Falle, behaupte ich, wachse die Function, im zweyten nehme sie ab. Es wird genügen, das Erste allein zu erweisen. Dieß wird nach §. 49., 50. geschehen, wenn ich zeige, daß für je zwey innerhalb a und b gelegene Werthe der x, z. B. x_1 und x_2, welche in dem Verhältnisse $x_1 < x_2$ stehen, auch das Verhältniß $Fx_1 < Fx_2$ eintrete. Unterscheiden wir aber zuförderst die beyden

Fälle, wenn eine der Zahlen x_1, x_2 mit einer der μ, ϱ einerley ist, und wenn alle vier Zahlen von einander verschieden sind.

A) Die Voraussetzung, daß eine der Zahlen x_1 oder x_2 mit einer der μ oder ϱ einerley sey, umfasset folgende vier Fälle:

1. $x_1 = \mu$; dann muß entweder $(x_1 = \mu) < \varrho < x_2$ oder $(x_1 = \mu) < x_2 < \varrho$ seyn. Im ersten Falle fließt aus dem vorigen Zusatze, daß entweder

$$(Fx_1 = F\mu) < F\varrho < Fx_2$$

oder

$$(Fx_1 = F\mu) > F\varrho > Fx_2$$

seyn müsse. Da das Letztere der Bedingung, daß $F\mu < F\varrho$ sey, widerspricht; so folgt das Erstere, und es ist also $Fx_1 < Fx_2$. Im zweyten Falle muß entweder

$$(Fx_1 = F\mu) < Fx_2 < F\varrho,$$

oder

$$(Fx_1 = F\mu) > Fx_2 > F\varrho \text{ seyn;}$$

und weil das Letztere abermahls der Bedingung $F\mu < F\varrho$ widerspricht; so findet das Erstere Statt, oder es ist $Fx_1 < Fx_2$.

2\. $x_1 = \varrho$. Dann bestehet das Verhältniß $\mu < (\varrho = x_1) < x_2$, woraus sich ergibt, daß nur Eines von Beyden

$$F\mu < (F\varrho = Fx_1) < Fx_2$$

oder

$$F\mu > (F\varrho = Fx_1) > Fx_2$$

seyn könne. Da aber das Letztere der Bedingung $F\mu < F\varrho$ geradezu widerspricht, so folgt das Erstere und es ist also $Fx_1 < Fx_2$.

3\. $x_2 = \mu$. Dann bestehet das Verhältniß $x_1 < (x_2 = \mu) < \varrho$: also muß entweder

$$Fx_1 < (Fx_2 = F\mu) < F\varrho$$

oder

$$Fx_1 > (Fx_2 = F\mu) > F\varrho \text{ seyn.}$$

Das Letztere widerspricht der Bedingung, daß $F\mu < F\varrho$ sey. Also bestehet das Erstere, oder wir haben $Fx_1 < Fx_2$.

4. $x_2 = \varrho$. Dann muß entweder

$$x_1 < \mu < (\varrho = x_2)$$

oder

$$\mu < x_1 < (\varrho = x_2) \text{ seyn.}$$

Aus $x_1 < \mu < (\varrho = x_2)$ folgt Eines von Beyden,

entweder

$$Fx_1 < F\mu < (F\varrho = Fx_2)$$

oder

$$Fx_1 > F\mu > (F\varrho = Fx_2).$$

Da nun das Letztere nicht seyn soll, weil $F\mu < F\varrho$, so folgt das Erstere oder $Fx_1 < Fx_2$. Aus $\mu < x_1 < (\varrho = x_2)$ folgt, daß entweder

$$F\mu < Fx_1 < (F\varrho = Fx_2)$$

oder $$F\mu > Fx_1 > (F\varrho = Fx_2)$$

sey. Und weil das Letztere der Voraussetzung $F\mu < F\varrho$ widerspricht, so muß das Erstere Statt haben, also muß $Fx_1 < Fx_2$ seyn.

B) Wenn alle vier Zahlen x_1, x_2; μ, ϱ verschieden sind: so kann nur Einer von den drey Fällen Statt haben: die Zahlen x_1 und x_2 liegen beyde innerhalb μ und ϱ oder beyde außerhalb, oder nur eine inner- die andere außerhalb.

1. Wenn x_1 und x_2 beyde innerhalb μ und ϱ liegen sollen, so kann nur $\mu < x_1 < x_2 < \varrho$ seyn. Und dann ergibt sich aus §. 37, daß entweder

$$F\mu < Fx_1 < Fx_2 < F\varrho$$

oder $$F\mu > Fx_1 > Fx_2 > F\varrho$$ seyn müsse.

Da nun das Letztere der Voraussetzung $F\mu < F\varrho$ widerspricht; so folgt das Erstere und es ist also abermahls $Fx_1 < Fx_2$.

2. Wenn x_1 und x_2 beyde außerhalb μ und ϱ liegen: so kann nur seyn $x_1 < \mu < \varrho < x_2$ oder $x_1 < x_2 < \mu < \varrho$ oder $\mu < \varrho < x_1 < x_2$ und somit muß entweder

$$Fx_1 < F\mu < F\varrho < Fx_2$$

oder $$Fx_1 > F\mu > F\varrho > Fx_2$$ seyn.

Da nun das Letztere ungereimt, weil $F\mu < F\varrho$: so folgt abermahls das Erstere oder $Fx_1 < Fx_2$.

3. Soll Eine der Zahlen x_1 und x_2 innerhalb μ und ϱ, die andere außerhalb liegen, so kann nur entweder

$$x_1 < \mu < x_2 < \varrho$$

oder $$\mu < x_1 < \varrho < x_2$$

seyn. Das Erstere oder die Annahme $x_1 < \mu < x_2 < \varrho$ läßt nur den Werth

$$Fx_1 < F\mu < Fx_2 < F\varrho$$

oder $$Fx_1 > F\mu > Fx_2 > F\varrho,$$

wo sich dann wegen $F\mu < F\varrho$ ergibt, daß nur das Erstere Statt finden könne, also daß $Fx_1 < Fx_2$ sey. Das Zweyte oder die Annahme $\mu < x_1 < \varrho < x_2$ läßt nur die Werthe zwischen

$$F\mu < Fx_1 < F\varrho < Fx_2$$

oder $$F\mu > Fx_1 > F\varrho > Fx_2:$$

und weil dann $F\mu < F\varrho$ seyn soll, so folgt, daß nur das Erstere oder daß $Fx_1 < Fx_2$ seyn müsse. Somit bestättiget sich in jedem Falle, daß $Fx_1 < Fx_2$ sey: d. h. die Function wächst fortwährend.

§. 59. Lehrsatz. Wenn eine Function innerhalb a und b fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt, und von keinem ihrer Werthe zu einem anderen übergehet, ohne erst alle dazwischen liegenden berührt zu haben: so ist sie innerhalb a und b stetig.

Beweis. Bezeichnet x einen beliebigen innerhalb a und b liegenden Werth der Veränderlichen, so muß auch der zugehörige Werth ihrer Function $= Fx$, und wenn wir Δx so nehmen, daß auch noch $x + \Delta x$ innerhalb a und b liegt, auch $F(x + \Delta x)$, somit auch $F(x + \Delta x) - Fx$ eine meßbare Zahl darstellen. Setzen wir diese $= D$ und bezeichnen durch μ eine absolute Zahl, die < 1 ist: so ist auch μD seinem absoluten Werthe nach $< D$; und somit $Fx + \mu D$ eine Zahl, die innerhalb Fx und $Fx + D = F(x + \Delta x)$ liegt, also einer der Werthe, die unsere Function annehmen muß, bevor sie aus dem Werthe Fx in den Werth $F(x + \Delta x)$ übergehet. Bezeichnen wir nun den Werth der Veränderlichen, für welchen die Function in den Werth $Fx + \mu D$ übergehet, durch $x + \pi \Delta x$; so muß auch $x + \pi \Delta x$ innerhalb x und $x + \Delta x$ liegen, also $0 < \pi < 1$ seyn. Da aber μ in das Unendliche abnehmen kann: so kann auch $\mu \,.\, D$ in das Unendliche abnehmen, und somit auch $< \frac{1}{N}$ werden. Es gibt also zu jedem auch noch so kleinen Bruch $\frac{1}{N}$ eine Differenz von $x. = \pi \,.\, \Delta x$, bey der die Differenz $F(x + \pi \Delta x) - Fx < \frac{1}{N}$ wird. Und wenn wir nun π immer noch kleiner nehmen, so wird, weil unsere Function fortwährend wächst oder abnimmt, auch der Unterschied $F(x + \pi \Delta x) - Fx$ fortwährend kleiner; und verhält sich demnach vollkommen so, wie das Gesetz der Stetigkeit es fordert.

§. 60. Lehrsatz. Wenn a, b, c drey aufeinander folgende Zahlen bedeuten (d. h. wenn $a < b < c$): so ist es möglich, daß eine Function innerhalb a und b fortwährend wachse, innerhalb b und c aber fortwährend abnehme, oder auch umgekehrt innerhalb a und b abnehme, innerhalb b und c aber wachse, und dieß zwar selbst, wenn die Function innerhalb a und c fortwährend stetig ist.

Beweis. Wenn b nicht zwischen a und c läge: sondern wenn entweder $a = c$ wäre oder b kleiner als die kleinere oder größer als die größere der beyden Zahlen a und c wäre: so würde es allerdings ungereimt seyn zu verlangen, daß ein und eben dieselbe Function innerhalb a und b wachse (oder abnehme), innerhalb b und c aber abnehme (oder wachse). Denn im ersten Falle sind ja die Grenzen a. b und c. b gar nicht verschieden: im zweyten aber liegen alle Zahlen, welche die erste (oder die zweyte) einschließt, auch innerhalb der zweyten (oder der ersten). Liegt aber b zwischen a und c: dann liegt kein Werth der x, der innerhalb a und b liegt, auch zugleich innerhalb b und c: und es ist also möglich, daß die Function innerhalb a und b einem ganz anderen Gesetze gehorche, als innerhalb b und c, wie dieß der Fall seyn muß, wenn wir verlangen, daß sie dort wachse, hier aber abnehme oder umgekehrt. Daß es nun Functionen, die dieses leisten, gebe, und dieses selbst, indem sie das Gesetz der Stetigkeit fortwährend von a bis c befolgen, soll uns das Beyspiel der Function $ax-x^2$ beweisen. Von dieser wissen wir aus §. 7., daß sie als eine rationale ganze Function für alle Werthe von x stetig verbleibt. Ist überdieß a positiv: so behaupte ich, daß sie von $x=0$ bis $x=\frac{a}{2}$ fortwährend wachse, von $x=\frac{a}{2}$ bis $x=a$ aber fortwährend abnehme. Sind nämlich x und $x+\Delta x$ ein Paar innerhalb 0 und $\frac{a}{2}$ gelegene Werthe: so ist der Unterschied

$$F(x+\Delta x)-Fx=[a(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^2]-[ax-x^2]=$$
$$=(a-2x-\Delta x)\,\Delta x$$

offenbar positiv, so oft Δx selbst und der Factor $a-2x-\Delta x$ positiv ist, d. h. so oft x positiv und $<\frac{a}{2}$ und auch $x+\Delta x<\frac{a}{2}$ ist. Dann nämlich ist auch die Summe $2x+\Delta x<a$. Also so oft $x+\Delta x$ größer als x ist und beyde innerhalb 0 und $\frac{a}{2}$ liegen, ist auch $F(x+\Delta x)$ größer als Fx, d. h. die Function wächst innerhalb 0 und $\frac{a}{2}$. Wird aber $x>\frac{a}{2}$ und um so mehr auch $x+\Delta x>\frac{a}{2}$, so ist die Summe $2x+\Delta x>a$, also die Differenz $(a-2x-\Delta x)\,\Delta x$ negativ: daher $F(x+\Delta x)<Fx$: d. h. die Function nimmt ab. Ein Beyspiel einer Function, die innerhalb derselben Grenzen das gerade Gegentheil thut, innerhalb 0 und $\frac{a}{2}$ abnimmt, innerhalb $\frac{a}{2}$ und a aber wächst, haben wir an x^2-ax, sofern a positiv ist.

Denn hier ist die Differenz

$$F(x+\Delta x)-Fx=(-a+2x+\Delta x)\,\Delta x,$$

also negativ, solange x und $x+\Delta x$ innerhalb 0 und $\frac{a}{2}$; und dagegen positiv, sobald $x>\frac{a}{2}$ und also auch $x+\Delta x>\frac{a}{2}$ wird. Wer sich das Steigen und Fallen dieser zwey Functionen noch anschaulicher machen will, wähle für a eine bestimmte Zahl z. B. 8, und berechne für verschiedene bestimmte Werthe von x die zugehörigen von $ax-x^2$ und x^2-ax: etwa wie in der nachstehenden Tafel:

x	$8x-x^2$	x^2-8x
0	0	0
+1	+7	−7
+2	+12	−12
+3	+15	−15
+4	+16	−16
+5	+15	−15
+6	+12	−12
+7	+7	−7
+8	0	0

§. 61. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx innerhalb a und b fortwährend wächst und innerhalb b und c fortwährend abnimmt, um den Werth b herum aber stetig veränderlich ist: so ist der Werth Fb größer als alle unter der Form $F(b\pm\omega)$ enthaltenen, wenn wir ω klein genug wählen und ins Unendliche abnehmen lassen. Wenn aber im Gegentheil die Function Fx innerhalb a und b abnimmt, und innerhalb b und c wächst, so ist der Werth Fb kleiner als alle unter der Form $F(b\pm\omega)$ enthaltenen.

Beweis. Wir brauchen nur den ersten Theil zu erweisen. Wenn Fx innerhalb a und b fortwährend wächst: so muß der Werth von $F(b-\omega)$ fortwährend größer werden, indem ω anzufangen von einem gewissen Werthe in das Unendliche abnimmt; weil $b-\omega$ wächst. Wenn ferner Fx innerhalb b und c fortwährend abnimmt: so muß auch der Werth von $F(b+\omega)$ fortwährend größer werden, wenn ω abnimmt, weil dann auch $b+\omega$ selbst abnimmt. Da nun, wenn unsere Function um den Werth b herum stetig seyn soll, $F(b\pm\omega)-Fb$ in das Unendliche abnehmen muß: so folgt, daß der Werth Fb größer seyn muß, als jeder, der unter der Form $F(b\pm\omega)$ enthalten ist. Denn wäre Fb zuvörderst kleiner als $F(b-\omega)$ bey irgend einem Werthe von ω ist: so würde der Unterschied $F(b-\omega)-Fb$, wenn nun ω noch immer kleiner wird, nicht ins Unendliche abnehmen können, weil $F(b-\omega)$ wächst. Wäre Fb kleiner als $F(b+\omega)$ bey irgend einem Werthe von ω ist: so würde ebenso wenig der Unterschied $F(b+\omega)-Fb$ in das Unendliche abnehmen können, wenn nun ω noch immer kleiner gemacht wird: denn dadurch wächst $F(b+\omega)$. Also erübriget nur, daß Fb sowohl $> F(b-\omega)$ als auch $> F(b+\omega)$ sey.

§. 62. Erklärung. Wenn der Werth, den eine (gleichviel ob stetige oder unstetige) Function Fx für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen $x=b$ annimmt, größer oder kleiner als alle diejenigen ist, welche durch $F(b\pm\omega)$ vorgestellt werden können, wenn ω anzufangen von einem gewissen Werthe in das Unendliche abnimmt: so pflegt man im ersten Falle zu sagen, daß der Werth Fb ein größter oder ein Größtes, ein *Maximum*; im zweyten Falle dagegen, daß er ein kleinster, oder ein Kleinstes, ein *Minimum* sey. An einem Worte, das beyde Werthe umfaßt, fehlt es, wenn wir uns nicht etwa des Wortes: Aeußerste (*Extrema*) bedienen wollen, das wenigstens besser als die von Busse vorgeschlagenen: Eminenzien klingt. In dem besonderen Falle, wenn nur für ein positives oder nur für ein negatives ω das Verhältniß $F(b\pm\omega) \lessgtr Fb$ bestehet, das andere aber $F(b\mp\omega) \gtrless Fb$ nicht Statt hat, entweder weil die Function für $b\mp\omega$ überhaupt gar keinen Werth oder doch keine meßbare Werthe hat, oder weil anzufangen von einem gewissen ω für alle kleineren abwärts das Verhältniß $F(b\mp\omega) = Fb$ bestehet: sage ich, daß der Werth Fb ein halb- oder einseitiges *Maximum* oder *Minimum* sey, hinsichtlich auf einen positiven oder negativen Zuwachs von x, je nach dem das Verhältniß $F(b+\omega) \lessgtr Fb$ oder $F(b-\omega) \lessgtr Fb$ Statt finden. Im Gegensatze mit einem solchen, nenne ich ein *Maximum* oder *Minimum* von der vorhin beschriebenen Art zuweilen auch ein vollständiges, ganzes, oder beiderseitiges *Maximum* oder *Minimum* schlechtweg, so verstehe ich nur ein vollständiges.

§. 63. Lehrsatz. Wenn ein gewisser Werth einer Function Fx ein Größter oder Kleinster in der soeben erklärten Bedeutung ist: so muß er zwar eben nicht auch zugleich das seyn, was wir §. 24 den größten oder den kleinsten Werth einer Function unter allen ihren von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich Statt findenden Werthen genannt, selbst wenn vorausgesetzt werden darf, daß die Zahl m ein innerhalb a und b liegender Werth sey. Indessen ist es doch jederzeit möglich, ein Paar einander so nahe liegende und die Zahl m umschließende Grenzen α und β anzugeben, in Betreff deren es gilt, daß Fm der größte oder der kleinste aus allen von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ einschließlich Statt findenden Werthen der Function ist. Wenn im entgegengesetzten Falle Fm der größte oder kleinste von allen Werthen ist, welche die Function Fx von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich annimmt: immer in der §. 24 erklärten Bedeutung, daß nämlich nur kein größerer oder kein kleinerer Werth da sey: so ist eben dieß Fm auch ein Größtes oder ein Kleinstes in der Bedeutung des vorigen §., es müßten denn ein Paar Zahlen α und β, zwischen denen m liegt, geben, daß Fx seinen Werth innerhalb α und β gar nicht verändert.

Beweis. *1.* Daß ein Werth Fm, der ein Größtes oder ein Kleinstes in der nun eben bemerkten Bedeutung ist, nicht eben der größte oder der kleinste für alle seyn müsse, welche die Function Fx von $x=a$ bis $x=b$ annimmt, leuchtet von selbst ein. Denn zu dem Ersteren wird nur erfordert, daß Fm größer oder kleiner sey als jeder unter der Form $F(m\pm\omega)$ enthaltene Werth, wenn wir ω anzufangen von einem gewissen Werthe in das Unendliche abnehmen lassen. Dieß aber kann Statt finden, auch wenn gewisse andere, einem viel größeren oder viel kleineren Werthe von x zugehörige Werthe der Fx im ersten Falle größer, im zweyten kleiner als Fm sind. Wenn wir z. B. festsetzen, daß die Function Fx für $x=a$ den Werth 10, und für $x=b$ den Werth 3 annehme, für alle übrigen Werthe von x aber $=1$ seyn solle: so ist $Fm=3$ ohne Zweifel ein Größtes im Sinne des vorigen §., weil $3>1$, keineswegs aber der größte Werth, den Fm von $x=a$ bis $x=b$ annimmt: denn dieser ist $=10$.

2. Daß es aber doch immer möglich sey, ein Paar einander so nahe liegende und die Zahl m einschließende Grenzen α und β anzugeben, in Betreff deren es gilt, daß Fm der größte oder kleinste Werth von allen sey, welche die Function Fx von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ annimmt: läßt sich leicht einsehen. Denn da es ein ω klein genug geben muß, daß für dasselbe und für alle kleineren Werthe, wenn Fm ein Größtes ist, das Verhältniß

$$F(m-\omega)<Fm>F(m+\omega),$$

wenn aber Fm ein Kleinstes ist, das Verhältniß

$$F(m-\omega)>Fm<F(m+\omega)$$

bestehet: so bilden diejenigen Zahlen $m-\omega$ und $m+\omega$ selbst das verlangte Paar.

3. Wenn Fm der größte oder der kleinste Werth aus allen denjenigen ist, welche die Function Fx von $x=a$ bis $x=b$ annimmt, in der Bedeutung, daß wenigstens kein anderer dieser

Werthe größer oder kleiner ist: so folgt hieraus freylich noch nicht, daß Fm auch ein Größtes oder ein Kleinstes in der Bedeutung des vorigen §. genannt werden dürfe; weil es ja seyn könnte, daß unsere Function für alle innerhalb α und β gelegenen Werthe, zu denen auch m gehört, ihren Werth gar nicht ändert. Dieß widerspricht dem Begriffe eines größten oder auch eines kleinsten Werthes in der Bedeutung des §. 24 gar nicht, wohl aber dem eines Äußersten in der Bedeutung des vorigen §.

4. Ist aber nur nicht eben dieser Fall vorhanden: so ist kein Zweifel, daß ein Werth, der die Benennung des größten oder des kleinsten in der Bedeutung des §. 24 verdient, auch ein äußerster sey. Denn nehmen wir nur ω klein genug, daß auch $m \pm \omega$ noch innerhalb a und b liegt: so muß, wenn Fm der größte Werth unserer Function ist, nothwendig das Verhältniß

$$F(m-\omega) < Fm > F(m+\omega),$$

und wenn Fm der kleinste Werth ist, das Verhältniß

$$F(m-\omega) > Fm < F(m+\omega)$$

Statt finden. Denn dieß nicht zugeben, hieße behaupten: es gebe irgend ein ω, dabey im ersten Falle entweder

$$F(m-\omega) > Fm \text{ oder } F(m+\omega) > Fm,$$

im zweyten aber entweder

$$F(m-\omega) < Fm \text{ oder } F(m+\omega) < Fm \text{ ist.}$$

Dann aber könnte Fm im ersten Falle offenbar nicht der größte, im zweyten offenbar nicht der kleinste aus allen Werthen seyn, die Fx von $x=a$ bis $x=b$ annimmt. Ist aber

$$F(m-\omega) < Fm > F(m+\omega) \text{ oder } F(m-\omega) > Fm < F(m+\omega).$$

und besteht dieses Verhältniß, auch wenn man ω in das Unendliche abnehmen läßt, so ist Fm im ersten Falle ein *Maximum*, im zweyten ein *Minimum* in der Bedeutung des vorigen §.

§. 64. Lehrsatz. Wenn eine Function von a bis einschließlich b stetig ist und fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt: so ist im ersten Falle Fa der kleinste und Fb der größte, im zweyten Falle aber Fa der größte und Fb der kleinste Werth aus allen, welche die Function von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich annimmt.

Beweis. Lasset uns abermahls den ersten Fall betrachten. Bezeichnen wir einen beliebigen innerhalb a und b gelegenen

Werth der Veränderlichen durch x; so soll erwiesen werden, daß $Fa < Fx < Fb$ sey. Weil aber auch $a+\omega$ und $b-\omega$ ein Paar innerhalb a und b gelegene Werthe bezeichnen, sofern wir nur $\omega < (b-a)$ nehmen, so muß, wenn wir ω klein genug nehmen, damit x innerhalb $a+\omega$ und $b-\omega$ liege, wegen des fortwährenden Wachsens der Function auch

$$F(a+\omega) < Fx < F(b-\omega)$$

seyn. Da nun $F(a+\omega)$ und $F(b-\omega)$ bey der unendlichen Abnahme von ω den Werthen Fa und Fb in das Unendliche nahen: so muß auch $Fa < Fx < Fb$ seyn.

§. 65. Lehrsatz. Auch Functionen, welche für alle innerhalb der gegebenen meßbaren Grenzen a und b liegenden Werthe ihrer Veränderlichen x dem Gesetze der Stetigkeit gehorchen, können bloß dadurch, daß ihre Veränderliche nach und nach die unendlich vielen Werthe $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ annimmt, deren jeder folgende größer (oder auch kleiner) als der nächst vorhergehende ist, die aber alle innerhalb a und b liegen, — abwechselnd bald $\overline{\gtrless}$ als eine gewisse beständige Zahl M, bald wieder $\overline{\lessgtr}$ als eine von jener verschiedene beständige Zahl m werden; ingleichen auch abwechselnd einen positiven und dann wieder einen negativen Werth annehmen oder (wie man dieß Letztere ausdrückt) ihr Vorzeichen unendliche Mahle wechseln.

Beweis. *1.* Setzen wir, daß die Zahl W für alle Werthe von $x > 0$ und $\overline{<}\, \frac{1}{2}$ den Werth $W = x$, für alle Werthe von $x > \frac{1}{2}$ und $\overline{<}\, \frac{3}{4}$ aber den Werth $W = \frac{3-4x}{2}$, für alle Werthe von $x > \frac{3}{4}$ und $\overline{<}\, \frac{7}{8}$ den Werth $W = \frac{4x-3}{2}$, für alle Werthe von $x > \frac{7}{8}$ und $\overline{<}\, \frac{15}{16}$ den Werth $W = \frac{15-16x}{2}$; und allgemein für alle Werthe von $x > \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}$ und $\overline{<}\, \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}$ den Werth $W = \frac{2^{2n}-1-2^{2n}.x}{2}$, für alle Werthe von $x > \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}$ und $\overline{<}\, \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}}$ aber den Werth $W = 2^{2n}.x - 2^{2n} + 1$ annehmen solle: so ist leicht einzusehen, daß diese Function für alle innerhalb 0 und 1 liegende Werthe der x dem Gesetze der Stetigkeit folge. Denn daß für diejenigen Werthe von x, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, dann $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$ usw. liegen, stetig sey, folgt schon daraus, weil W für diese Werthe durchgängig von der Form $a + bx$ ist (§. 7), daß aber W auch für diejenigen Werthe von x, die in der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \ldots\ \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}},\ \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}},\ \ldots$$

vorkommen, Stetigkeit habe, zeigt sich, wenn wir die Werthe vergleichen, die je zwey nächst aufeinander folgende Bestimmungsweisen für diese Fälle geben, indem sie einander unendlich nahe rücken, wenn wir den Unterschied des x in das Unendliche abnehmen lassen. So findet sich für $x = \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}$, $W = \frac{1}{2}$ und für $x = \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}} + \omega$, $W = \frac{1}{2} - 2^{2n-1}.\,\omega$; für $x = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}$ findet sich $W = 0$ und für $x = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} + \omega$, $W = 2^{2n}\,\omega$. Hieraus ersehen wir zugleich, daß bey dieser Function diejenigen Werthe von x, die in der Reihe

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \ldots\ \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}},\ \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}},\ \ldots$$

liegen, für W abwechselnd den Werth $\frac{1}{2}$ und 0 hervorbringen. Da nun die angeführten Werthe von x, deren Menge unendlich ist, fortwährend innerhalb der Grenzen 0 und 1 verbleiben: so sieht man, daß die Zahl W in der That leistet, was in dem ersten Theile unseres Lehrsatzes vorausgesetzt wird. Die Zahlen M und m sind nämlich hier $\frac{1}{2}$ und 0; a und b aber 0 und 1.

2. Hiemit ist aber auch schon der zweyte Theil des Satzes erwiesen. Denn stellt W eine Zahl vor, die innerhalb der Grenzen 0 und 1 unendliche Mahle abwechselnd die Werthe $\frac{1}{2}$ und 0 erreicht: so stellt $W - \frac{1}{4}$ eine Zahl vor, die innerhalb eben dieser Grenzen unendliche Mahle abwechselnd $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{4}$ d. h. p o s i t i v und wieder n e g a t i v wird.

§. 66. A n m e r k u n g. Sachkündigen wird von selbst einleuchten, daß auch Functionen, die durch ein einziges von dem besonderen Werthe ihrer Veränderlichen ganz unabhängiges Gesetz bestimmbar sind, die Eigenschaft haben können, die dieser Lehrsatz beschreibt. So nimmt z. B. sin log $(1-x)$ innerhalb $x=0$ und $x=1$ unendliche Mahle die Werthe $+1$ und -1 an.

§. 67. Z u s a t z. Wohl zu bemerken ist, daß wir in unserem Lehrsatze die Stetigkeit der in Rede stehenden Function Fx bloß für alle i n n e r h a l b a und b liegenden Werthe ihrer Veränderlichen vorausgesetzt, über den Umstand aber, ob sie auch für diese Grenzen, welche a und b setzt, stetig seyn müsse oder auch nur könne, noch nichts entschieden haben.

§. 68. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen dem Gesetze der Stetigkeit folgt, und dabey gleichwohl unendliche Mahle abwechselnd bald $\gtreqqless$ als eine beständige Zahl M, bald wieder $\lesseqgtr$ als eine von jener verschiedene beständige Zahl m wird, oder ihr Vorzeichen unendliche Mahle wechselt: so kann dieß doch nur auf eine solche Weise geschehen, daß im ersten Falle jeden beliebigen innerhalb M und m gelegenen Werth, im zweyten den Werth Null unendliche Mahle erreicht, und zwar für Werthe von x, die so beschaffen sind, daß jeder einen ihm nächsten d. h. so nahe liegenden habe, daß kein dritter ihm noch näher liegender angeblich ist.

Beweis. Nach der Voraussetzung, die unser Lehrsatz macht, ist ohne Zweifel eine Reihe von Werthen der x angeblich, deren jeder folgende größer (oder kleiner) als der nächst vorhergehende ist, ob sie gleich sämmtlich innerhalb a und b liegen, die ferner so beschaffen sind, daß die ihnen entsprechenden Werthe der Function Fx im ersten Falle abwechselnd bald $\gtreqqless M$ bald wieder $\lesseqgtr m$, im zweyten aber abwechselnd positiv oder negativ sind. Da nun nach §. 29 eine stetige Function aus einem Werthe M in einen anderen m nicht übergehen kann, ohne erst alle dazwischen liegenden Werthe wenigstens einmahl berührt zu haben: so muß es, wenn C eine beliebige zwischen M und m liegende Zahl bedeutet, im ersten Falle zwischen je zweyen Gliedern der vorhin beschriebenen Reihe der Werthe von x, wenigstens einen Werth von x geben, für welchen Fx in den Werth C übergehet. Gibt es also eine unendliche Menge von Werthen der x, für welche Fx abwechselnd bald $\geqq M$ bald wieder $\leqq m$ wird: so muß es sicherlich auch eine unendliche Menge dazwischen liegender Werthe von x geben, für welche Fx in den Werth C übergehet. Daß aber jeder dieser Werthe einen ihm nächsten haben müsse, ergibt sich aus §. 18. Dasselbe gilt auch von dem zweyten Falle, den unser Lehrsatz annimmt, wenn nämlich Fx sein Vorzeichen unendliche Mahle wechselt; denn zwischen einem Werthe, der positiv, und einem anderen, der negativ ist, bildet die Zahl Null einen mittleren.

§. 69. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx bloß dadurch, daß ihre Veränderliche x gewisse innerhalb der meßbaren Grenzen a und b gelegene Werthe x_1, x_2, x_3 ... von unendlicher Menge annimmt, — abwechselnd bald $\gtreqqless$ als eine gewisse beständige Zahl M, bald wieder $\lesseqgtr$ als eine gewisse von M verschiedene beständige Zahl m wird; und dieser Wechsel kehrt bey der unendlichen Menge der Zahlen x_1, x_2, x_3. . . . unendliche Mahle wieder: so behaupte ich, daß diese Function dem Gesetze der Stetigkeit gewiß nicht einschließlich von a bis b gehorche; sondern entweder für $x = a$ oder für $x = b$ oder für irgend einen innerhalb a und b gelegenen Werth ihrer Veränderlichen, wenn nicht für mehrere dergleichen Werthe, unstetig sey.

Beweis. Weil die unendlich vielen Werthe der x, nämlich die x_1, x_2, x_3. . . . für welche Fx abwechselnd einen Werth $\overline{\overline{>}} M$ und dann wieder einen $\overline{\overline{<}} m$ annimmt, alle innerhalb der meßbaren Grenzen a und b liegen: so folgt (aus §.), daß es möglich seyn müsse, entweder alle diese Werthe, oder doch einen solchen Theil derselben, der selbst schon eine unendliche Menge von ihnen enthält, in ein Paar Grenzen einzuschließen, welche einander so nahe rücken können, als man nur immer will: und diese Grenzen sind entweder a und $a + \omega$, wenn wir durch ω eine absolute Zahl bezeichnen, die ins Unendliche abnehmen kann, oder b und $b - \omega$, oder endlich eine innerhalb a und b gelegene Zahl c einer — und $c + \omega$ oder $c - \omega$ andererseits. Findet das Erste Statt, so behaupte ich, daß unsere Function für den Werth $x = a$, und einen positiven Zuwachs; im zweyten Falle, daß sie für den Werth $x = b$ und einen negativen Zuwachs: im dritten endlich, daß sie für den Werth $x = c$ unstetig sey. Es wird genug seyn, wenn ich nur den ersten Fall beweise. Sind nun die Werthe x_1, x_2, x_3, ... für welche Fx abwechselnd bald $\overline{\overline{>}} M$, bald wieder $\overline{\overline{<}} m$ wird, in der Nähe des Werthes $x = a$ so dicht angehäuft, daß sich eine unendliche Menge derselben von den zwey Grenzen a und $a + \omega$ einschließen lassen, so klein wir auch ω machen mögen: so ist offenbar, daß sich der Unterschied $F(a + \omega) - F\omega$ bey der unendlichen Abnahme von ω nicht so verhalte, wie das Gesetz der Stetigkeit erheischt. Nach diesem sollte nämlich der erwähnte Unterschied nach seinem absoluten Werthe $< \frac{1}{N}$ werden und verbleiben, wenn wir ω nur klein genug nehmen, und so sehr wir es dann auch noch fernerhin vermindern. Hier aber gibt es für jedes auch noch so kleine ω zwey kleinere, für deren Eines $F(a + \omega) \overline{\overline{>}} M$ und für das andere $\overline{\overline{<}} m$ wird. Bezeichnen wir also jenes durch ω_1 und dieses durch ω_2: so haben wir $F(a + \omega_1) \overline{\overline{>}} M$ und $F(a + \omega_2) \overline{\overline{<}} m$: woraus

$$F(a + \omega_1) - F(a + \omega_2) \overline{\overline{>}} (M - m).$$

Nach dem Gesetze der Stetigkeit aber sollte auch

$$F(a+\omega_1)-Fa<\frac{1}{N} \text{ und } F(a+\omega_2)-Fa<\frac{1}{N}$$

seyn; daher der Unterschied $F(a+\omega_1)-F(a+\omega_2)$ jedenfalls $<\frac{2}{N}$ seyn müßte; und somit nicht $\overline{\overline{>}}(M-m)$ ausfallen dürfte.

Also ist Fx für den Werth $x=\omega$ gewiß nicht stetig.

§. 70. Lehrsatz. Auch eine Function, welche für alle Werthe ihrer Veränderlichen x von a einschließlich bis b einschließlich, dem Gesetze der Stetigkeit folgt, kann innerhalb eben dieser Grenzen unendliche Mahle abwechselnd steigen und fallen: doch wird erfordert, daß weder ihre *Maxima* noch ihre *Minima* nach ihren absoluten Werthen in das Unendliche wachsen, ingleichen, daß der Unterschied zwischen den größten und kleinsten Werthen, die sie abwechselnd erreicht, indem x fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt, in das Unendliche abnehme.

Beweis. Es hat keine Schwierigkeit sich eine Function stetig zu denken für einen jeden solchen Werth ihrer Veränderlichen x, zu welchem sich ein i klein genug nachweisen läßt, nur um behaupten zu können, daß die Function innerhalb x und $x+i$ oder x und $x-i$ fortwährend wachse oder fortwährend abnehme. Allein wenn Fx unendliche Mahle abwechselnd steigt und fällt, während x entweder fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt, in beyden Fällen aber stets innerhalb der Grenze a und b verbleibet: so muß es eine unendliche Menge von Werthen $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ der Veränderlichen x geben, deren jeder folgende größer (oder kleiner) als der vorhergehende ist, ob sie gleich insgesammt innerhalb a und b liegen: und von je zwey dieser nächst aufeinander folgenden Werthen muß sich behaupten lassen, daß Fx innerhalb derselben wachse oder abnehme, und von dem folgenden Paare das Gegentheil, so daß die Werthe, die Fx selbst für die Werthe $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ annimmt, abermahls *Maxima* und *Minima* sind. Hieraus ergibt sich aber, wie schon im vorigen §. nachgewiesen wurde, daß sich entweder bey dem Werthe $x=a$ oder bey $x=b$, oder bey einem oder mehreren innerhalb a und b gelegenen Werthen von x so viele $x_1, x_2, x_3, \ldots$ aneinander häufen, daß je zwey Grenzen, die aus einem solchen Werthe und einem anderen veränderlichen gebildet werden können, so nahe sie auch einander rücken, immer doch eine unendliche Menge der $x_1, x_2, x_3 \ldots$ zwischen sich einschließen. Bezeichnen wir also diesen einen oder einen von diesen mehreren Werthen der x durch c (wo dann c entweder $=a$ oder $=b$ oder innerhalb a und b gelegen seyn muß); so gibt es kein i klein genug, um behaupten zu können, daß Fx innerhalb c und $c+i$ oder innerhalb c und $c-i$ fortwährend wachse oder abnehme. Durch diesen Umstand wird nun die Stetigkeit der Function Fx für den Werth $x=c$ allerdings gefährdet; und wenn entweder die *Maxima* oder die *Minima* nach ihrem absoluten Werthe in das Unendliche wachsen: so könnte die Function gewiß nicht stetig seyn, weil sich im Widerspruch mit §. 24 unter den sämmtlichen Werthen derselben von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich entweder kein größter oder kein kleinster in der eben daselbst erklärten Bedeutung vorfände. Also ist nöthig, daß jene *Maxima* sowohl als jene *Minima* einen gewissen meßbaren Werth nicht überschreiten. Allein nach Ausweis der vorigen §. würde die Stetigkeit der Function auch noch dann unmöglich gemacht, wenn jene *Maxima* und *Minima*, die Fx abwechselnd unendliche Mahle erreicht, die ersteren insgesamt $\overline{>}$ als eine gewisse beständige Zahl M, die Letzteren insgesamt $\overline{<}$ als eine andere beständige Zahl m verbleiben. Wenn dagegen, wie in unserem gegenwärtigen Lehrsatze vorausgesetzt wird, der Unterschied zwischen diesen *Maximis* und *Minimis* in das Unendliche abnimmt: so kann unsere Function die Bedingung, welche zur Stetigkeit erforderlich wird, immerhin auch für $x=c$ erfüllen. Denn wenn es gleich für jedes ω noch ein Paar kleinere ω_1 und ω_2 gibt, für welche $F(c\pm\omega_1)$ ein *Maximum* und $F(c\pm\omega_2)$ ein *Minimum*, das Erstere also wieder um etwas größer, das Letztere aber um etwas kleiner als der frühere Werth $F(c\pm\omega)$ wird: so hindert dieß doch nicht, daß der Unterschied $F(c\pm\omega)-Fc<\frac{1}{N}$ werde und verbleibe, so sehr man auch hinterher ω noch vermindert. Haben wir nämlich ω nur erst so klein genommen, das der Unterschied zwischen allen *Maximis* und *Minimis*, die zu noch kleineren Werthen von ω gehören, $<\frac{1}{N}$ verbleibt, so wird, wenn $Fc<F(c\pm\omega)$ ist, der Unterschied $F(c\pm\omega)-Fc$ sicher nicht $>F(c\pm\omega_1)-Fc$, und wenn $Fc>F(c\pm\omega)$ ist, der Unterschied $F(c\pm\omega)-Fc$ sicher nicht $>F(c\pm\omega_2)-Fc$ ausfallen können: so sehr man auch ω hinterher noch vermindert. Also wird $F(c\pm\omega)-Fc$ fortwährend $<\frac{1}{N}$ verbleiben.

Beyspiel. Lasset die Zahl W nach einem solchen Gesetze von x abhängen, daß für alle Werthe von

$$\begin{array}{llll} x = & 0 & \text{bis } \tfrac{1}{2}, & W = x \\ x = & \tfrac{1}{2} & \text{bis } \tfrac{3}{4}, & W = 1 - x \\ x = & \tfrac{3}{4} & \text{bis } \tfrac{7}{8}, & W = x - \tfrac{1}{2} \\ x = & \tfrac{7}{8} & \text{bis } \tfrac{15}{16}, & W = \tfrac{5}{4} - x \\ x = & \tfrac{15}{16} & \text{bis } \tfrac{31}{32}, & W = x - \tfrac{5}{8} \text{ usw.,} \end{array}$$

für alle Werthe der x von der Form

$$\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \text{ bis } \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}}, \quad W = x - \frac{2^{2n}-1}{3\,.\,2^{2n-1}},$$

und für alle Werthe der x von der Form

$$\frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}} \text{ bis } \frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n+2}}, \quad W = \frac{2^{2n+2}-1}{3\,.\,2^{2n}} - x,$$

für $x = 1$ endlich $W = \frac{1}{3}$ sey: so ist einleuchtend, daß diese Function innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ unendliche Mahle steige und falle. So oft nämlich der Werth von W unter der Form $W = x - \frac{2^{2n}-1}{3\,.\,2^{2n-1}}$ enthalten ist, wächst W, wenn x wächst; so oft dagegen der Werth von W durch die Gleichung

$$W = \frac{2^{2n+2}-1}{3\,.\,2^{2n}} - x$$

bestimmt wird, nimmt W ab, wenn x wächst.

Die zu den Werthen der Reihe

$$0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{7}{8},\ \tfrac{15}{16},\ \tfrac{31}{32},\ \tfrac{63}{64} \ldots\ldots \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}},\ \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}} \ldots\ldots$$

gehörigen Werthe von W bilden die Reihe

$$\begin{array}{cccccccccc} 0, & \tfrac{1}{2}, & \tfrac{1}{4}, & \tfrac{3}{8}, & \tfrac{5}{16}, & \tfrac{11}{32}, & \tfrac{21}{64} \ldots\ldots & \dfrac{2^{2n}-1}{3\,.\,2^{2n}}, & \dfrac{2^{2n+1}+1}{3\,.\,2^{2n+1}} \ldots\ldots \\ m. & M. & m. & M. & m. & M. & m. & m. & M. \end{array}$$

welche so abwechselnd, wie sie durch die darunter gesetzten Buchstaben m und M bezeichnet sind, bald *Minima* bald wieder *Maxima* vorstellen. Weil aber der Unterschied zwischen je zwey aufeinander folgenden Werthen $= \frac{2^{2n+1}+1}{3\,.\,2^{2n+1}} - \frac{2^{2n}-1}{3\,.\,2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n+1}}$ bey der Vermehrung von n in das Unendliche abnimmt: so hindert dieser Umstand gar nicht, daß unsere Function von $x = 0$ bis

$x=1$ einschließlich stetig ist. Für $x=0$ und für alle innerhalb 0 und 1 gelegenen Werthe ist diese Stetigkeit für sich selbst einleuchtend. Daß aber diese Function, wenn wir ihr für den Werth $x=1$ den Werth $W=\frac{1}{3}$ einräumen, auch für $x=1$ stetig sey, erhellet daraus, weil der Unterschied $F(1-\omega)-\frac{1}{3}$ in das Unendliche abnimmt. Denn da für jeden innerhalb 0 und 1 gelegenen Werth, also auch für den Werth $1-\omega$ eine der beyden allgemeinen Gleichungen gilt, entweder

$$W=x-\frac{2^{2n}-1}{3\,.\,2^{2n-1}}\cdot \quad \text{oder } W=\frac{2^{2n+2}-1}{3\,.\,2^{2n}}-x:$$

so ist $F(1-\omega)-\frac{1}{3}$ entweder unter der Form

$$1-\omega-\frac{2^{2n}-1}{3\,.\,2^{2n-1}}-\frac{1}{3}$$

oder unter der Form

$$\frac{2^{2n+2}-1}{3\,.\,2^{2n}}-1+\omega-\frac{1}{3}$$

enthalten, wenn wir nur n in das Unendliche vermehren. Unter dieser Bedingung aber nehmen beyde Ausdrücke in das Unendliche ab: denn der erste ist $=+\frac{1}{3\,.\,2^{2n-1}}-\omega$, der zweyte aber $=-\frac{1}{3\,.\,2^{2n}}+\omega$.

§. 71. Anmerkung. Verlangt man ein Beyspiel von einer Function, die sich durch einen ganz einfachen algebraischen Ausdruck darstellen läßt; so führe ich $(1-x)^2 \sin\log(1-x)$ an, welches für alle Werthe von $x=0$ bis $x=1$ einschließlich stetig ist, ob es gleich eine unendliche Menge größter und kleinster Werthe innerhalb dieser Grenzen gibt, die aber nicht wie in §. 66 unveränderlich sind, sondern selbst in das Unendliche abnehmen.

§. 72. Zusatz. Es widerspricht also der Stetigkeit einer Function nicht, daß sie, indem ihre Veränderliche x von a bis b fortschreitet, eine unendliche Reihe von Werthen $Fx_1, Fx_2, Fx_3, \ldots$ durchgehe, welche abwechselnd bald größer bald wieder kleiner werden, ingleichen auch, daß diese Werthe ihr Vorzeichen unendliche Mahle ändern, d. h. bald positiv bald wieder negativ werden, nur wird im ersten Falle erfordert, daß die Unterschiede Fx_2-Fx_1, Fx_3-Fx_2, $Fx_4-Fx_3, \ldots$ nach ihren absoluten Werthen in das Unendliche abnehmen, im zweyten, daß die Werthe Fx_1, Fx_2, $Fx_3 \ldots$ selbst absolut genommen, in das Unendliche abnehmen, weil sonst der Unterschied zwischen dem größten (positiven) und dem kleinsten (negativen) Werthe von Fx nicht ins Unendliche abnehmen könnte, wie unser Lehrsatz fordert.

§. 73. Zusatz. Ob jener Werth, den eine stetige Function, wie sie der Lehrsatz beschreibt, für $x = c$ d. h. für den Werth ihrer Veränderlichen annimmt, in dessen Nähe sich eine unendliche Menge von größten und kleinsten Werthen derselben befindet, selbst ein Größtes oder Kleinstes oder auch keines von Beyden sey, kommt auf besondere Umstände an. In dem Beyspiele, das wir dem Lehrsatze beyfügten, ist $Fc = \frac{1}{3}$ und also weder ein Größtes noch ein Kleinstes, da jedes *Maximum* $\frac{2^{2n+1}+1}{3 \cdot 2^{2n+1}} > \frac{1}{3}$, jedes *Minimum* aber $\frac{2^{2n}-1}{3 \cdot 2^{2n}} < \frac{1}{3}$ ist. Dieß kommt, weil die *Maxima* und *Minima* in dieser Function einander nur dadurch in das Unendliche nähern, daß jene immer kleiner, diese immer größer werden. Begreiflicher Weise aber kann diese unendliche Annäherung beyder auch zu Stande kommen, wenn die aufeinander folgenden *Maxima* und *Minima* beyde fortwährend größer oder fortwährend kleiner werden, und dann wird Fc im ersten Falle ein *Maximum*, im zweyten ein *Minimum* seyn. Denken wir uns z. B. eine Function W, welche von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ von dem Werthe 0 fortwährend steigt bis zu dem Werthe $\frac{1}{2}$; von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = \frac{3}{4}$ aber von dem Werthe $\frac{1}{2}$ wieder fortwährend sinkt bis zu dem Werthe $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$: von dem Werthe $x = \frac{3}{4}$ bis $x = \frac{7}{8}$ abermahls steigt von $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$: von $x = \frac{7}{8}$ bis $x = \frac{15}{16}$ wieder fällt von $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ bis $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$; von $x = \frac{15}{16}$ bis $x = \frac{31}{32}$ wieder steigt von $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ bis $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; von $x = \frac{31}{32}$ bis $x = \frac{63}{64}$ wieder fällt von $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ bis $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$: und nach diesem leicht abzunehmenden Gesetze in das Unendliche fortgehet: so ist einleuchtend, daß diese Function innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ eine unendliche Menge aufeinander folgender *Maxima* und *Minima* hat, die beyde wachsen und sich dem Werthe 1 in das Unendliche nähern. Wenn wir also für den Werth $x = 1$ der Function W den 1 beylegen, so wird sie von $x = 0$ bis $x = 1$ einschließlich stetig seyn, und für $x = 1$ abermahls ein *Maximum* (nämlich das Größte von allen) erreichen.

§. 74. Zusatz. Also kann eine stetige Function (um so gewisser eine, die das Gesetz der Stetigkeit nicht einmahl beobachtet) für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen $x = c$ ein Aeußerstes (ein *Maximum* oder auch *Minimum*) haben, obgleich es keine auch noch so kleine Zahl ω gibt, von der gesagt werden könnte, daß diese Function innerhalb $c-\omega$ und c fortwährend wachse (oder abnehme) und innerhalb c und $c+\omega$ fortwährend abnehme (oder wachse).

§. 75. Lehrsatz. Es ist möglich, daß eine Function Fx das Gesetz der Stetigkeit von $x=a$ bis $x=b$ einschließlich befolge, obgleich sich weder zu a, noch zu b, noch zu irgend einem innerhalb a und b gelegenen Werthe der x ein ω klein genug auffinden läßt, um behaupten zu können, daß Fx innerhalb a und $a+\omega$, oder innerhalb b und $b-\omega$, oder innerhalb x und $x\pm\omega$ nur Eines von Beyden thue, fortwährend wachse oder fortwährend abnehme.

Beweis. *1.* Denken wir uns zuförderst eine Function von x, ich will sie y_1 nennen, die für $x=a$ den Werth A, für $x=b$ den von A verschiedenen allenfalls größeren Werth B annimmt, innerhalb a und b aber sich gleichförmig d. h. so ändert, daß zu gleichen Zuwächsen von x auch gleiche (positive oder negative) Zuwächse von y gehören. Für diese Function muß also fortwährend $y=A+(x-a)\dfrac{B-A}{b-a}$ seyn.

2. Denken wir uns nun eine zweyte stetige Function y_2, die einen von dem vorigen etwas verschiedenen Gang befolge, indem sie nicht fortwährend wachst (oder abnimmt), sondern eine gewisse, allenfalls eine endliche Menge von Abwechslungen des Steigens und Fallens an den Tag legt. Setzen wir z. B., daß y_2 für die zwey äußersten Werthe von x, a und b, und für den mittleren $\frac{1}{2}(a+b)$ einerley Werthe mit y_1, beziehungsweise nämlich die Werthe A, B und $\frac{1}{2}(A+B)$ gebe: innerhalb a und $\frac{1}{2}(a+b)$ aber, und eben so innerhalb $\frac{1}{2}(a+b)$ und b erst steige, dann falle. Mag dieß nahmentlich auf eine solche Weise geschehen, daß der größte Werth, den y_2 innerhalb a und $\frac{1}{2}(a+b)$ erreicht, für $x=$ $=a+\frac{3}{8}(b-a)$ Statt finde und $=A+\frac{5}{8}(B-A)=\frac{3}{8}A+\frac{5}{8}B$ also noch nicht so groß wie B sey. Der größeren Einfachheit wegen lasset uns annehmen, daß Beydes das Wachsen sowohl als das Fallen immer gleichförmig geschehe; daß somit für alle Werthe von

$$x=a \text{ bis } x=a+\tfrac{3}{8}(b-a),\ y_2=A+\tfrac{5}{3}(x-a)\frac{B-A}{b-a}$$

und für alle Werthe von

$$x=a+\tfrac{3}{8}(b-a) \text{ bis } x=\tfrac{1}{2}(a+b),\ y_2=\tfrac{1}{2}(A+B)+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\frac{B-A}{b-a}$$

sey. Von $x=\frac{1}{2}(a+b)$ bis $x=a+\frac{7}{8}(b-a)$ mag eben so y_2 wieder steigen und $=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{5}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\frac{B-A}{b-a}$ seyn;

von $x=a+\frac{7}{8}(b-a)$ bis zu b aber soll y_2 fallen und

$$=B+(b-x)\frac{B-A}{b-a}$$

seyn. Sonach wird der größte Werth, den y_2 annimmt, der zu $x=a+\frac{7}{8}(b-a)$ gehörige, nämlich $B+\frac{1}{8}(B-A)$ seyn. Wäre im Gegentheil $B<A$: so würde alles bisher Gesagte gelten, sobald wir nur die Worte Wachsen und Fallen, größter und kleinster Werth vertauschen.

3. Auf eine ähnliche Art, wie wir die Function y_2 soeben aus der y_1 hergeleitet, können wir aus der y_2 abermahls eine dritte Function y_3 herleiten, indem wir mit jedem der vier Stücke, in welche der Abstand $b-a$ nach dem vorigen Verfahren zerlegt worden ist, das vornehmen, was wir vorhin mit dem ganzen Abstande thaten, d. h. auch jedes dieser Stücke in vier andere zerlegen, innerhalb deren die y_3 das eine Mahl steigt, das nächste Mahl wieder fällt. Wie von der Function y_2 gesagt werden konnte, daß der größte Abstand, zwischen den Werthen von x, innerhalb dessen sie nur Eines von Beyden thut, entweder nur fortwährend steigt, oder nur fortwährend fällt, nicht größer sey als $\frac{3}{8}(b-a)$; so läßt sich von der Function y_3 behaupten, daß dieser größte Abstand nicht größer als $(\frac{3}{8})^2(b-a)$ sey.

4. Verfahren wir eben so wie mit der y_2 auch mit der Function y_3, so erhalten wir eine vierte stetige Function y_3, bey welcher der größte Abstand, innerhalb dessen sie bloß steigt oder fällt, $(\frac{3}{8})^3(b-a)$ ist. Usw.

5. Da diese Schlüsse in das Unendliche fortgesetzt werden können: und die Zahl $(\frac{3}{8})^n(b-a)$ durch die Vermehrung von n in das Unendliche abnimmt: so sehen wir, daß sich zu jeder auch noch so kleinen Zahl ω eine Function y_n auffinden läßt, bey welcher der größte Unterschied zwischen den Werthen von x, innerhalb deren die Function fortwährend wachst oder abnimmt, $<\omega$ ist, obgleich sie dem Gesetze der Stetigkeit ununterbrochen folgt. Allein wir sollen darthun, daß nicht in verschiedenen Functionen, sondern in einer und eben derselben eine so vielfältige Abwechslung des Steigens und Fallens vorkommen könne, daß kein auch noch so kleines ω angeblich ist, von dem sich sagen ließe, daß diese Function innerhalb x und $x\pm\omega$ fortwährend steigt oder fällt.

6. Eine Function von dieser Beschaffenheit erhalten wir, wie ich behaupte, wenn wir die Function Fx nach einem solchen Gesetze von der Veränderlichen x abhängen lassen, daß jeder zu x gehörige Werth der Fx die Grenze vorstellt, der sich zu demselben x gehörige Werthe der Function y_n bey der unendlichen Vermehrung von n in das Unendliche nahen, sofern nicht beyde Werthe einander vollkommen gleich sind. Ich werde erst darthun müssen, daß eine solche Function in der That möglich sey, dann wird sich leicht erweisen lassen, daß sie auch dem Gesetze der Stetigkeit gehorche, und die Beschaffenheit habe, welche im Lehrsatze ausgesagt wird.

a) Die Möglichkeit einer Function, wie ich soeben die Fx beschrieb, wird außer Zweifel seyn, wenn wir erweisen, daß es zu jedem nicht außerhalb a und b gelegenen Werthe der x einen bestimmten meßbaren Werth für Fx gebe. Ist nun $x=a$, so haben wir $Fa=A$; für $x=b$, haben wir $Fb=B$; für

$$x=\tfrac{1}{2}(a+b),\text{ ist } F\left(\frac{a+b}{2}\right)=\tfrac{1}{2}(A+B);$$

und so gibt es noch eine unendliche Menge von Werthen der Fx, die sich durch einen aus A und B zusammengesetzten rationalen Ausdruck darstellen lassen; weil es bestimmte Werthe in einer der Functionen $y_1, y_2, y_3 \ldots$ gibt, mit den sie zusammenfallen. Es sind dieß nämlich alle diejenigen Werthe von Fx, welche zu solchen Werthen von x gehören, auf die man bey dem Geschäfte der Theilung des Abstandes $(b-a)$ früher oder später kömmt. Daß aber auch zu jedem beliebigen a n d e r e n Werthe von x, der fortwährend zwischen zwey von jenen Grenzwerthen liegt, ein meßbarer Werth von Fx gehöre, erhellet so: Wenn wir voraussetzen, daß $A < B$ sey; so ist offenbar unter allen Werthen, welche die Function y_2 annimmt, der kleinste $=A$, der größte $=\frac{1}{8}(9B-A)$; wenn aber im Gegentheil $A > B$, so ist A der größte und $\frac{1}{8}(9B-A)$ der kleinste. In beyden Fällen also ist der Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Werthe der Function y_2 nicht größer als $\frac{9}{8}(B-A)$. Da wir nun, um den Werth der Function y_3 zu erhalten, mit jedem der 4 Stücke, in welche der Abstand $(b-a)$ zerlegt wurde, eben das vornahmen, was mit dem ganzen Abstande $(b-a)$ vorgenommen wurde, um die sämmtlichen Werthe der y_2 zu erzeugen: so leuchtet ein, daß der größte Unterschied zwischen demjenigen Werthe der y_3, welche zu E i n e m der erwähnten 4 Stücke gehören, nur $\frac{9}{8}\cdot\frac{5}{8}(B-A)$ betrage; indem derjenige Abstand, der vorhin $(B-A)$ war, hier nur $\frac{5}{8}(B-A)$ ist. Auf ähnliche Weise findet sich der größte Unterschied zwischen den Werthen, welche zu Einem der 16 Stücke gehören, in die der Abstand $(b-a)$ zur Bildung der Function y_3 zerlegt worden ist, $=\frac{9}{8}(\frac{5}{8})^2(B-A)$. Und so ist allgemein der größte Unterschied zwischen den Werthen, welche zu Einem der (4^{n-2}) Stücke gehören, in die der Abstand $(b-a)$ zur Bildung der Function y_n zerlegt wird, d. h. deren zugehörige x keinen größeren Unterschied als $(\frac{3}{8})^{n-2}(b-a)$ von einander haben, $=\frac{9}{8}(\frac{5}{8})^{n-2}(B-A)$. Vermehren wir also die Zahl n noch um r, indem wir die Functionen $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots y_{n+r}$ bilden: so kann der Unterschied zwischen denjenigen Werthen der y_n und y_{n+r}, deren zugehörige x von einander nicht mehr als um $(\frac{3}{8})^{n-2}(b-a)$ verschieden sind, auf keinen Fall größer seyn, als die Summe, welche zum Vorschein kommt, wenn wir die eben erwähnten einzelnen Unterschiede addiren, d. h. als

$$\tfrac{9}{8}(\tfrac{5}{8})^{n-2}(B-A)+\tfrac{9}{8}(\tfrac{5}{8})^{n-1}(B-A)+\tfrac{9}{8}(\tfrac{5}{8})^{n}(B-A)+\cdots+\tfrac{9}{8}(\tfrac{5}{8})^{n-r-2}(B-A).$$

Dieser Unterschied bleibt also immer kleiner als der Werth dieser Reihe, wenn wir sie in das Unendliche fortgehen lassen, d. h. als $3(\frac{5}{8})^{n-2}.(B-A)$. Verstehen wir also unter y_n itzt denjenigen Werth der Function y_n, der zu demselben x wie der bestimmte Werth Fx gehört; so ist der Unterschied zwischen y_n und Fx auf jeden Fall $< 3(\frac{5}{8})^{n-2}(B-A)$. Da aber dieser Unterschied bey der unendlichen Vermehrung von n in das Unendliche abnimmt; so geht hervor, daß sich der Werth von Fx so genau als man nur immer will bestimmen lasse.

b) Auch zeigt sich, daß diese Function dem Gesetze der Stetigkeit folge; denn weil die y_n dem Gesetze der Stetigkeit folgt, so nimmt der Unterschied der beyden Werthe von y_n, welche zu x und $x+\Delta x$ gehören, mit Δx in das Unendliche ab; also muß auch der Unterschied der Werthe Fx und $F(x+\Delta x)$, dem die ersteren unendlich nahe treten, in das Unendliche abnehmen.

c) Daß aber bey dieser Function trotz ihrer Stetigkeit eine unendliche Menge von Abwechselungen des Steigens und Fallens in der Art Statt findet, daß für keinen Werth von x, der nur nicht außerhalb a und b liegt, ein ω klein genug angeblich ist, um behaupten zu können, daß Fx innerhalb x und $x\pm\omega$ nur fortwährend steige oder fortwährend falle, erhellet daraus, weil sich zu jedem auch noch so kleinen ω ein n auffinden läßt so groß, daß $(\frac{3}{8})^{n-2}(b-a) < \omega$ ausfällt. Bey einem solchen Werthe von n stellt y_{n+1} eine Function vor, die innerhalb jedes Abstandes = oder $> (\frac{3}{8})^{n-1}(b-a)$ wenigstens zweymahl steigt und zweymahl wieder fällt. Also auch innerhalb x und $x \pm \omega$ steigt und fällt y_{n+1} zweymahl; da nun die höchsten und niedrigsten Werthe, welche die Functionen von der Form $y_1 . y_2 . y_3 ....$ bey ihrem abwechselnden Steigen und Fallen annehmen, insgesammt auch in der Function Fx vorkommen: so gibt es auch in der letzteren innerhalb x und $x \pm \omega$ vier zu eben soviel aufeinander folgenden Werthen der x gelegene Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, davon $\beta > \alpha$ und $\gamma < \beta$ ist; d. h. auch die Function Fx steigt weder fortwährend, noch fällt sie fortwährend innerhalb x und $x \pm \omega$.

§. 76. Lehrsatz. Wenn Fc ein äußerster Werth der Function Fx ist, und zwar ein äußerster wenigstens hinsichtlich auf einen positiven (negativen) Zuwachs ihrer Veränderlichen x (§. 62); wenn ferner $F(c+\gamma)$ der nächste äußerste Werth ist, den es in dieser Function auf Seite des positiven (negativen) Zuwachses gibt; und wir wissen endlich, daß diese Function dem Gesetze der Stetigkeit von $x=c$ bis $x=c+\gamma$ einschließlich gehorchet: so muß der äußerste Werth, den $F(c+\gamma)$ vorstellt (wenn nicht auf beyden Seiten), wenigstens hinsichtlich auf einen negativen (positiven) Zuwachs, Statt finden, und Eines der Beyden Aeußersten Fc und $F(c+\gamma)$ muß als ein *Maximum*, daß andere als ein *Minimum* befunden werden.

Beweis. *1.* Es wird genug seyn, wenn wir nur darthun, daß falls der Werth Fc ein *Maximum* ist, und zwar hinsichtlich auf einen positiven Zuwachs, der Werth $F(c+\gamma)$ ein *Minimum* seyn müsse, und zwar hinsichtlich auf einen negativen Zuwachs. Denn für die übrigen Fälle ergibt sich der Beweis auf ähnliche Art. Weil nun die Function Fx dem Gesetze der Stetigkeit von $x=c$ bis $x=c+\gamma$ einschließlich folgt; so muß es nach §. 24 unter den sämmtlichen Werthen derselben, die sie von $x=c$ bis $x=c+\gamma$ annimmt, wenigstens Einen, welcher der größte, und einen, welcher der kleinste ist, geben, in dem Sinne, daß der erstere keinen größeren, der zweyte keinen kleineren neben sich hat. Wäre nun Fc kein solcher größter Werth; so müßte es irgend einen von c verschiedenen, aber nicht außerhalb c und $c+\gamma$ liegenden Werth von x, den wir durch $c+\mu\gamma$ vorstellen wollen, geben, dessen zugehöriger Werth von Fx oder $F(c+\mu\gamma)$ ein solcher größter Werth ist. Dieß $F(c+\mu\gamma)$ müßte nach §. 63 entweder ein *Maximum* seyn, oder es müßte ein Paar den Werth

$c+\mu\gamma$ einschließende Zahlen α und β geben, daß unsere Function für alle innerhalb α und β gelegenen Werthe von x den Werth $F(c+\mu\gamma)$ unverändert beybehält.

2. Das Erste, oder daß $F(c+\mu\gamma)$ ein *Maximum* sey, widerspricht geradezu der Bedingung des Lehrsatzes, daß es innerhalb c und $c+\gamma$ kein *Maximum* oder *Minimum* geben soll.

3. Lasset uns also nur noch die zweyte Annahme prüfen. Bey dieser müßte es irgend ein i geben klein genug, daß für dasselbe und für alle kleineren die Gleichung

$$F(c+\mu\gamma-i)=F(c+\mu\gamma)$$

bestehet. In dieser Gleichung läßt sich i unbedingt vermindern, aber nicht eben so unbedingt vermehren. Denn wenn wir $i=\mu\gamma$ nehmen, so ist $F(c+\mu\gamma-i)=Fc$ sicher nicht $=F(c+\mu\gamma)$. Die Beschaffenheit, einen Ausdruck $F(c+\mu\gamma-i)$, der $=F(c+\mu\gamma)$ ist, zu liefern, kommt also zwar allen Werthen von i, die kleiner als ein gewisser sind, aber nicht allen überhaupt zu. Nach §. gibt es daher gewiß eine meßbare Zahl j, welche die größte derjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle Werthe von i, die $<j$ sind, die hier beschriebene Beschaffenheit noch haben.

4. Von diesem j nun behaupte ich, es müsse $<\mu\gamma$ seyn, der Werth $F(c+\mu\gamma-j)$ aber müsse der letzte derjenigen seyn, welche dem Werthe $F(c+\mu\gamma)$ gleich kommen; dagegen jeder Werth, $F(c+\mu\gamma-(j+\omega))$, welcher zum Vorschein kommt, wenn wir statt j eine Zahl $j+\omega$ setzen, ω möchte auch noch so klein seyn, müsse bald $<F(c+\mu\gamma)$ ausfallen.

α) Daß $j<\mu\gamma$ seyn müsse, erhellet daraus, weil wir schon vorhin fanden, daß $Fc<F(c+\mu\gamma)$ sein müsse.

β) Daß aber $F(c+\mu\gamma-j)$ noch zu den Werthen gehöre, die der Zahl $F(c+\mu\gamma-j)$ gleichen, fließt aus der Stetigkeit, die unsere Function befolgt. Denn weil für alle Werthe von $i<j$, die Gleichung $F(c+\mu\gamma-i)=F(c+\mu\gamma)$ bestehet; so muß sie auch noch für $i=j$ bestehen, d. h. auch $F(c+\mu\gamma-j)$ muß $=F(c+\mu\gamma)$ seyn. Daß endlich $F(c+\mu\gamma-(j+\omega))$ schon $<F(c+\mu\gamma)$ seyn müsse, folgt aus der Annahme, daß j der größte Werth sey, von dem es gilt, daß alle kleineren das Verhältniß $F(c+\mu\gamma-i)=F(c+\mu\gamma)$ noch erfüllen; und aus dem Umstande, daß alle Werthe der Function, welche dem größten nicht gleichen, kleiner als dieser seyn müssen.

5. Aus allem diesen aber gehet deutlich hervor, daß sich der Werth $F(c+\mu\gamma-j)$ ganz wie ein *Maximum* (wenigstens wie ein einseitiges) verhalte. Da nun vorausgesetzt wird, daß es kein Aeußerstes für unsere Function innerhalb c und $c+\gamma$ gibt: so müssen wir auch diese zweyte Annahme verwerfen. Es erübriget also nur zuzugestehen, daß Fc unter den sämmtlichen Werthen der Function von $x=c$ bis $x=c+\mu\gamma$ einschließlich keinen größeren über sich habe.

6. Unter diesen Werthen muß es aber auch einen, der keinen kleineren unter sich hat, geben; und wenn man nur nicht sogleich zugeben will, daß dieser der Werth $F(c+\gamma)$ sey: so müßte sich dasselbe durch einen Ausdruck wie $F(c+\mu\gamma)$ darstellen lassen, worin $\mu\gamma<\gamma$ ist. Aus §. 63 wissen wir aber, daß auch jeder solche kleinste Werth einer Function entweder ein *Minimum* sey oder daß es zwey die Zahl $c+\mu\gamma$ einschließende Grenzen α und β gebe, die so beschaffen sind, daß alle innerhalb derselben liegenden Werthe der Fx denselben Werth $F(c+\mu\gamma)$ haben. Annehmend, daß $F(c+\mu\gamma)$ ein *Minimum* sey, hieße der Bedingung, daß unsere Function zwischen c und $c+\mu\gamma$ kein Aeußerstes habe, gerade zu widersprechen. Allein auch bey der zweyten Annahme zeigt sich auf ähnliche Art wie vorhin, daß sie uns nöthige irgend ein, sey es auch nur ein einseitiges, *Minimum* innerhalb c und $c+\gamma$ zuzugestehen. Da wir dieß nicht sollen, bleibt uns nichts übrig, als den Werth $F(c+\gamma)$ selbst für einen kleinsten Werth der Function zu erklären. Und somit ist dieser Werth gewiß ein *Minimum*.

7. Daß er es aber (wenn nicht in beyderley Hinsichten, wenigstens) hinsichtlich auf einen negativen Zuwachs von x seyn müsse, ist sehr leicht einzusehen. Denn die entgegengesetzte Annahme hätte ja zu Folge, daß es ein ω klein genug gebe, um behaupten zu können, daß $F(c+\gamma-\omega)$ für dieses und für alle kleineren Werthe $=F(c+\gamma)$ sey; und wir wissen schon, wie dieses auf die weitere Folge hinausführt, das es ein *Minimum* von der Form $F(c+\gamma-j)$, d. h. noch zwischen c und $c+\gamma$ irgend ein Aeußerstes gebe.

§. 77. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen x dem Gesetze der Stetigkeit folgt; innerhalb eben dieser Grenzen aber auch mehrere Aeußerste hat, es seyen dieß ein- oder beyderseitige, sind sie nur jedenfalls so vertheilt, daß unter den sämmtlichen Werthen von x, die ihnen zugehören, jeder seinen ihm nächsten hat: so behaupte ich, daß von je zwey Aeußersten, welche zunächst aufeinander folgen, das Eine immer ein *Maximum*, das andere ein *Minimum* seyn müsse; es wäre denn, daß beyde Aeußerste zu den bloß einseitigen gehören, und daß die Function für alle zwischen liegenden Werthe ihrer Veränderlichen einen und eben denselben constanten Werth behält; in welchem Falle jene beyden Aeußersten auch von derselben Art, d. h. beyde *Maxima* oder auch beyde *Minima* seyn können.

Beweis. *1.* Wenn c ein innerhalb a und b gelegener Werth ist, welchem ein äußerster Werth der Fc, nahmentlich ein *Maximum* und zwar ein beyderseitiges entspricht; so folgt aus dem vorigen Satze, daß das nächste an Fc grenzende Aeußerste auf Seite des positiven sowohl als auch des negativen Zuwachses von x (falls es ein solches gibt) ein *Minimum* sey; und wenn umgekehrt Fc ein beyderseitiges *Minimum* ist, so folgt, daß das nächst angrenzende Aeußerte zu beyden Seiten ein *Maximum* sey.

2. Stellt aber Fc ein bloß einseitiges *Maximum* oder *Minimum* vor: so muß es vermöge des Begriffes eines solchen Aeußersten auf einer Seite hin einen Zuwachs von $x=i$ geben, der klein genug ist, daß für ihn und alle kleineren $F(c+i)=Fc$ verbleibt. Es läßt sich aber ganz wie im vorigen §. No. 3 beweisen, daß es auch einen größten Werth von $i=j$ geben müsse, der noch die Gleichung $F(c+j)=Fc$ erfüllt; daß somit $F(c+j+\omega)$ bereits $>$ oder $<$ als Fc seyn müsse; woraus denn folgt, daß $F(c+j)$ abermahls ein Aeußerstes, nämlich ein einseitiges Aeußerstes sey.

3. Von welcher Art aber dieß Aeußerste sey, ist unbestimmt: es kann bey einerley Fc sowohl ein *Maximum* als auch ein *Minimum* seyn, wie wir uns leicht durch irgendein Beyspiel überzeugen können. Denn setzen wir, daß Fx für alle Werthe von $x=0$ bis $x=c$ den Werth ax habe, für $x=c$ also $=ac$ werde, dann aber für alle Werthe von $x=c$ bis $x=c+j$ fortwährend $=ac$ verbleibe: so haben wir, wenn a und c positiv sind, an dem Werthe ac das Beyspiel eines einseitigen *Maximi*; und es hindert uns nichts das nächstfolgende einseitige Aeußerste, das für $x=c+j$ eintritt, so einzurichten, daß es ein *Maximum*, oder auch daß es ein *Minimum* werde. Das Erste geschieht, wenn wir z. B. festsetzen, daß für alle Werthe von $x>c+j$, $Fx=ax-aj$: das zweyte, wenn wir $Fx=2ac+aj-ax$ annehmen.

§. 78. Zusatz. Die im §. 77 angegebene Bedingung, daß die *Maxima* und *Minima* in ihrer Aufeinanderfolge wechseln, verstehet sich also bey Functionen, welche an keine andere Bedingung als das Gesetz der Stetigkeit gebunden sind, keineswegs von selbst und tritt nicht nothwendig ein. Denn wenn es kein auch noch so kleines ω von der Art gibt, daß sich behaupten ließe, die Function Fx steige oder falle fortwährend innerhalb x und $x \pm \omega$: so sieht man, daß zwischen je zwey Werthen x und $x \pm \omega$, deren zugehörige Fx und $F(x \pm \omega)$ ein Paar Aeußerste sind, noch irgend ein dritter Werth von x liege, dem gleichfalls ein Aeußerstes zugehört. Ist aber dieß, dann läßt sich von einem Paare nächst aufeinander folgender Aeußersten gar nicht sprechen, und eben darum auch nicht behaupten, daß das Eine derselben ein *Maximum*, das andere ein *Minimum* seyn müsse.

§. 79. Lehrsatz. Es lassen sich Functionen Fx denken, die innerhalb gewisser Grenzen a und b ihrer Veränderlichen x fortwährend wachsen oder abnehmen, dabey auch fortwährend meßbar verbleiben, und doch nicht stetig auch nur für einen einzigen innerhalb a und b gelegenen Werth der x sind.

Beweis. Wenn Fx auch nicht für einen einzigen innerhalb a und b gelegenen Werth von x stetig seyn soll; so muß (nach §. 2.) für jeden dieser Werthe Einer von folgenden drey Fällen eintreten:

a) entweder der Unterschied $F(x+\Delta x)-Fx$ muß, so klein wir auch Δx annehmen mögen, unmeßbar bleiben, oder

b) dieser Unterschied muß obgleich meßbar doch beständig $> \frac{1}{N}$ sich darstellen, oder endlich

c) er wird zwar auch zuweilen $< \frac{1}{N}$, aber verbleibt dieß nicht, wenn wir Δx in das Unendliche abnehmen lassen.

1. Der erste Fall kann nun allerdings bey unserer Function für keinen innerhalb a und b gelegenen Werth von x eintreten. Für einen solchen ist nämlich nach der Voraussetzung, welche der Lehrsatz macht, der Werth von Fx, und wenn wir Δx so klein nehmen, daß auch noch $x+\Delta x$ innerhalb a und b liegt, auch der Werth von $F(x+\Delta x)$, mithin auch der Unterschied $F(x+\Delta x)-Fx$ eine meßbare Zahl.

2. Auch der dritte Fall kann sich hier nie ergeben; denn weil vorausgesetzt wird, daß Fx innerhalb a und b fortwährend wachse oder fortwährend abnehme: so kann der Unterschied $F(x+\Delta x)-Fx$, nach seinem absoluten Werthe genommen, bey

der Verminderung von Δx immer nur abnehmen: ist er somit für einen gewissen Werth von Δx einmahl schon $< \frac{1}{N}$ geworden, so kann er bloß dadurch, daß wir Δx in das Unendliche abnehmen lassen, nicht wieder $> \frac{1}{N}$ werden.

3. Daß aber der zweyte Fall bey einem jeden innerhalb a und b gelegenen Werthe der x sich einfinde, führt keinen Widerspruch mit sich; sobald wir nur nicht voraussetzen, daß die Zahl $\frac{1}{N}$, für welche das Verhältniß $F(x+\Delta x)-Fx > \frac{1}{N}$ bestehen soll, bey allen Werthen von x eine und dieselbe verbleibe. Nun ist es allerdings wahr, daß der Unterschied $F(x+\Delta x) - Fx$ für diesen Fall selbst dann, wenn Δx eine unendlich kleine Zahl (in der §. erklärten Bedeutung des Wortes wird), seinem absoluten Werthe nach immer noch größer als eine gegebene endliche Zahl verbleiben müsse.

Bezeichnen wir also durch x und $x+i$ ein Paar beliebige innerhalb a und b gelegene Werthe der frey Veränderlichen, und denken wir uns den Unterschied i in eine unendliche Menge unendlich kleiner Theile zerlegt, etwa wie solche zum Vorschein kämen, wenn wir denselben durch eine beliebige unendlich große Zahl n dividiren würden: so sind wir freylich zu der Behauptung berechtigt; daß eine unendliche Menge von Verhältnissen, wie die nachfolgenden bestehen:

$$F\left(x+\frac{i}{n}\right) - Fx > e_1$$

$$F\left(x+\frac{2i}{n}\right) - F\left(x+\frac{i}{n}\right) > e_2$$

$$F\left(x+\frac{3i}{n}\right) - F\left(x+\frac{2i}{n}\right) > e_3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F\left(x+\frac{ni}{n}\right) - F\left(x+\frac{(n-1)\,i}{n}\right) > e_n.$$

Aus diesen Verhältnissen folgt durch Addirung des Größeren zum Größeren, wenn wir die gleichen Theile, die mit entgegengesetzten Vorzeichen in der Summe erscheinen, weglassen, weil sie sich unter einander aufheben:

$$F(x+i) - Fx > e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n.$$

Hier ist nun rechter Hand allerdings eine Summe, welche aus einer unendlichen Menge endlicher Zahlen von einerley Vorzeichen bestehet. Indessen wissen wir (aus §.), daß eine solche Summe keineswegs unendlich groß zu seyn brauche. Ist aber diese Summe nur endlich, so hindert nichts, uns auch den Unterschied $F(x+i)-Fx$, der seinem absoluten Werthe nach immer größer als jene Summe seyn muß, nur endlich groß zu denken. Somit können denn auch die Werthe von Fx alle meßbar verbleiben.

§. 80. Lehrsatz. Wenn eine Function Fx für einen gewissen Werth ihrer Veränderlichen $x=c$ einen Sprung thut (§. 2), für andere unter der Form $c+\omega$ oder $c-\omega$ enthaltene aber Stetigkeit hat: so läßt sich jederzeit eine beständige meßbare Zahl von der Beschaffenheit angeben, daß ihr der Unterschied $F(c\pm\omega)-Fc$ nach seinem absoluten Werthe bey der unendlichen Abnahme von ω so nahe kommt, wie keine andere Zahl.

Beweis. Nach der im §. 2 gegebenen Erklärung eines Sprunges muß der Werth Fc ein meßbarer seyn; und weil die Function für alle diejenigen x, die einer der Formen $c+\omega$ oder $c-\omega$ unterstehen, stetig seyn soll; so müssen auch alle diejenigen ihrer Werthe, welche entweder der Form $F(c+\omega)$ oder $F(c-\omega)$ unterstehen, meßbar seyn. Mithin ist es auch der Unterschied $F(c\pm\omega)-Fc$. Bleibt nun (weil auch dieß möglich ist) der Werth von $F(c\pm\omega)$ anzufangen von einem gewissen ω für alle kleineren abwärts beständig, einerley z. B. $=A$; so ist $A-c$ selbst die Zahl, von der wir in unserem Lehrsatze reden; eine beständige meßbare Zahl, welcher der Unterschied $F(c\pm\omega)-Fc$ so nahe kommt, wie keiner anderen. Ist aber $F(c\pm\omega)$ veränderlich, so folgt doch aus der Stetigkeit, die diese Function für alle ω, welche kleiner als ein gewisser sind, beobachten soll, daß es eine beständige meßbare Zahl A gibt, der sich $F(c\pm\omega)$ in das Unendliche nähert. Bezeichnen wir nämlich die verschiedenen Werthe, in welche $F(c\pm\omega)$ übergehet, wenn wir ω nach einem beliebigen Gesetze in das Unendliche abnehmen lassen, durch x_1, x_2, x_3, ...; so gilt von diesen Zahlen, daß der Unterschied $x_{n+m}-x_n$ nach seinem absoluten Werthe betrachtet, so groß man auch die Zahl m annehmen mag, fortwährend kleiner verbleibt, als ein gewisser Bruch, der selbst so klein werden kann, als man nur immer will, wenn man nur erst die Zahl n groß genug angenommen hat.

Aus §. wissen wir nun, es gebe jederzeit eine, aber auch nur eine einzige meßbare Zahl A, der sich die Zahlen $x_1 . x_2 . x_3, \ldots$ in das Unendliche nähern. Ist aber A eine Zahl von der Art, daß $A - F(c \pm \omega)$ seinem absoluten Werthe nach in das Unendliche abnimmt d. h. $= \Omega$ wird; so ist

$$F(c \pm \omega) - Fc = A - \Omega - Fc = A - C - \Omega.$$

Also ist $A - C$ jene beständige Zahl, von der unser Lehrsatz behauptet, daß ihr der Unterschied $F(c \pm \omega) - Fc$ so nahe rücken könne, wie keiner anderen.

§. 81. Erklärung. Es sey mir erlaubt, die Zahl, die dieser Lehrsatz beschreibt, d. h. jene beständige meßbare Zahl, welcher der Unterschied $F(c \pm \omega) - Fc$ bey der unendlichen Abnahme von ω so nahe tritt, wie keiner angeblichen anderen, die Größe des Sprunges, welche die Function Fx für den Werth $x = c$ macht, zu nennen.

§. 82. Lehrsatz. Wenn eine Function das Gesetz der Stetigkeit nicht anders als nur für gewisse vereinzelt stehende Werthe ihrer Veränderlichen verletzet; so kann gleichwohl die Menge der Sprünge, welche sie innerhalb zweyer gegebener Grenzen ihrer Veränderlichen macht, unendlich groß werden, und zwar selbst, wenn sie innerhalb dieser Grenzen nur Eines von Beyden entweder fortwährend wächst, oder fortwährend abnimmt. Doch müssen in diesem Falle die Größen ihrer Sprünge, wenn wir sie dergestalt ordnen, daß nie ein größerer auf einen kleineren folgt, eine meßbare und somit convergirende Reihe bilden. Wenn aber die Bedingung, daß die Function innerhalb der gegebenen Grenzen fortwährend wachse oder fortwährend abnehme, nicht gesetzt ist; so wird auch die Größe ihrer Sprünge durch kein anderes Gesetz, als daß ein jeder meßbar seyn müsse, beschränkt.

Beweis. *1.* Denken wir uns eine Function, welche für alle Werthe von $x = 0$ einschließlich bis $x = \frac{1}{2}$ ausschließlich den Werth $Fx = x$ annehme; für alle Werthe von $x = \frac{1}{2}$ einschließlich bis $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ausschließlich, den Werth $Fx = \frac{1}{2} + x$; für alle Werthe von $x = \frac{3}{4}$ einschließlich bis $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ ausschließlich. den Werth $Fx = \frac{3}{4} + x$; für alle Werthe von $x = \frac{7}{8}$ einschließlich bis $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ ausschließlich, den Werth $Fx = \frac{7}{8} + x$ und nach dem hier angedeuteten Gesetze in das Unendliche fortschreite, so daß im Allgemeinen allen Werthen von

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ einschließlich bis $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$

ausschließlich. der Werth $Fx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + x$ zugehört. Es ist offenbar. daß diese Function für alle innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$. dann $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$. dann $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$ u. s. w. gelegenen Werthe. das Gesetz der Stetigkeit befolge. Denn alle für diese Werthe ihrer Veränderlichen gehörigen Werthe der Function. sind unter der einfachen Form $a+x$ enthalten; nur nimmt von Zeit zu Zeit a einen andern aber stets meßbaren Werth. der < 1 ist. an. Eben so offenbar ist aber auch. daß diese Function vom Gesetze der Stetigkeit abweiche und einen Sprung thue für die Werthe $x = \frac{1}{2}. \frac{3}{4}. \frac{7}{8}. \frac{15}{16}$ u. s. w. Alle diese Sprünge. deren Menge unendlich ist. liegen innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 1$. Die Größen derselben aber sind in eben der Ordnung. in der wir sie aufzählten. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots\ldots$ d. h. sie bilden eine zusammenlaufende Reihe. Auch ist kein Zweifel. daß diese Function innerhalb der eben genannten Grenzen 0 und 1 fortwährend wachse. Es ist daher gezeigt. daß eine Function. die das Gesetz der Stetigkeit nur für gewisse vereinzelt stehende Werthe ihrer Veränderlichen verletzt. eine unendliche Menge von Sprüngen innerhalb gegebener Grenzen zu machen vermöge. sofern die Größen dieser Sprünge selbst dergestallt abnehmen. daß sie sich ordnen lassen in eine zusammenlaufende Reihe.

2. Daß aber auch nur unter dieser letzteren Bedingung eine unendliche Menge von Sprüngen bey einer Function. welche nur Eines von Beyden. entweder fortwährend wächst, oder fortwährend abnimmt. Platz greifen könne. erhellet daraus. weil. wenn eine Function fortwährend wächst oder abnimmt. der Unterschied $F(x+\Delta x) - Fx$ für alle Werthe von x dasselbe Vorzeichen behält. sofern wir auch das Vorzeichen von Δx nicht ändern. Nehmen wir also zwey Werthe von x. deren der Eine α der Grenze a, der andere β der Grenze b so nahe tritt. als man nur immer will: so leuchtet ein. daß der Unterschied $F\beta - F\alpha$ seinem absoluten Werthe nach als eine Summe betrachtet werden könne. welche nebst mehreren anderen Summanden, alle diejenigen Zahlen in sich schließt, welche die Größe der innerhalb α und β vorkommenden Sprünge darstellen. Da nun die Anzahl dieser Sprünge bloß dadurch. daß man die Grenzen α und β den Grenzen a und b immer näher rückt. so sehr vermehrt werden kann. als man nur immer will; so ist entschieden. daß der Unterschied $F\beta - F\alpha$ und somit wenigstens eine der Zahlen $F\beta$ oder $F\alpha$ unendlich groß seyn müßte, wenn die er-

wähnten Sprünge nicht immer kleiner würden, so zwar, daß sie nach ihrer Größe geordnet eine Reihe bilden, die obgleich sie in das Unendliche gehet, doch nur einen endlichen Werth hat.

3. Wenn aber die Bedingung, daß unsere Function nur Eines von Beyden thue, entweder fortwährend wachse oder fortwährend abnehme, wegfällt: dann ist auch keine Nothwendigkeit mehr da, die Beschaffenheit der Sprünge, welche sie macht, auf die besagte Art zu beschränken.

Denn wenn die Function bald wächst, bald abnimmt, bald auch vielleicht keines von Beyden thut; so haben die einzelnen Unterschiede von der Form $F(x+\Delta x)-Fx$, aus denen der Unterschied $F\beta-F\alpha$ zusammengesetzt wird, verschiedene Vorzeichen: und somit kann ihre Menge sowohl als ihre Größe seyn, welche sie immer will, ohne daß $F\beta-F\alpha$ eine gewisse Grenze zu überschreiten braucht.