Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege

§. 1.

Willkürlicher Satz. Wenn bey einer Reihe von Größen nicht etwa der besondere Fall obwaltet, daß anzufangen von einem gewissen Gliede die folgenden alle, jedes für sich, Null sind, wie dieses Letztere z. B. bey der Binomialreihe für jeden positiven und ganz zähligen Exponenten n, nach dem (n + 1ten) Gliede geschieht: so ist es offenbar, daß der Werth dieser Reihe, d. h. die Größe, die durch Summirung ihrer Glieder entsteht, nicht immer einerley verbleiben könne, wenn man die Menge der Glieder nach Belieben vermehret. Insonderheit muß sich dieser Werth gewiß jedesmahl ändern, wenn man die Anzahl der Glieder nur um ein einzelnes, welches nicht Null ist, vermehret. Der Werth einer Reihe ist daher nebst dem Gesetze, welches die Bildung ihrer einzelnen Glieder bestimmt, auch noch von ihrer Anzahl abhängig; so daß derselbe auch bey unveränderter Gestalt und Größe der einzelnen Glieder eine veränderliche Größe vorstellt. In dieser Rücksicht bezeichnen wir eine Function von x, welche aus einer beliebig zu vermehrenden Reihe von Gliedern bestehet, und bederen Werth sonach nebst x auch noch von ihrer Gliederzahl r abhängig ist, durch $\overset{(r)}{F}(x)$, oder $\overset{r}{F}x$. So ist z. B. $A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^r = \overset{r}{F}x$; dagegen

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx + \ldots + Sx^{r+s} = \overset{(r+s)}{F}x.$$

§. 2.

1. Zusatz. Die Werthveränderung, d. h. die Zu- oder Abnahme des Werthes, die eine Reihe durch die Vermehrung ihrer Gliederzahl um eine bestimmte Menge, z. B. um eines, erfährt, kann nach Beschaffenheit der Umstände bald eine beständige Größe (wenn nähmlich die Glieder der Reihe einander alle gleich sind), bald aber auch eine veränderliche seyn; und in diesem Falle bald eine Größe, die zuweilen wächst zuweilen abnimmt, bald eine, die beständig wächst, bald eine, die beständig abnimmt. So ist die Aenderung, welche die Reihe

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

erfährt, wenn sie um ein Glied vermehret wird, eine beständige Größe; die Aenderung, welche die Reihe

$$a + ae + ae^2 + ae^3 +$$

durch die Vermehrung um ein Glied erfährt, eine

ver-

veränderliche Größe, wenn anders nicht etwa $e = 1$ ist, wird immer größer, wenn $e > \pm 1$, und immer kleiner, wenn $e < \pm 1$.

§. 3.

2. Zusatz. Wenn die Werthänderung (Zu- oder Abnahme), die eine Reihe durch Vermehrung ihrer Gliedermenge um eine bestimmte Anzahl (z. B. um eines) erleidet, immer gleich groß verbleibt, oder gar immer größer wird; in beyden Fällen auch noch einerley Vorzeichen behält: so ist es einleuchtend, daß der Werth dieser Reihe größer als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man dieselbe weit genug fortsetzen darf. Denn gesetzt der Zuwachs, den die Reihe durch eine Vermehrung von je n Gliedern erfährt, sey = oder $>$ d, und man begehre die Reihe so groß zu machen, daß sie die gegebene Größe D überschreitet: so nehme man nur eine ganze Zahl r, die = oder $> \frac{D}{d}$, und verlängere die Reihe um r. n Glieder; so hat dieselbe hiedurch einen Zuwachs erhalten, der

= oder $>$ ($r . d$ = oder $> \frac{D}{d}\, d = D$) ist

§. 4.

3. Zusatz. Dagegen giebt es auch Reihen, deren Werth, so weit man sie fortsetzen mag, eine gewisse Größe nie überschreitet. Von dieser Art ist gleich die Reihe:

$$a - a + a - a + \ldots,$$

deren Werth, so weit man sie fortsetzen mag, immer entweder o oder a ist, also die Größe a nie überschreitet.

§. 5.

4. Zusatz. Unter diesen ist besonders merkwürdig die Classe derjenigen Reihen, welche die Eigenschaft besitzen, daß die Veränderung (Zu- oder Abnahme), welche ihr Werth durch eine auch noch so weit getriebene Fortsetzung ihrer Glieder erleidet, immer kleiner verbleibt, als eine gewisse Größe, die wieder selbst so klein, als man nur immer will, angenommen werden, kann, wenn man die Reihe schon vorher weit genug fortgesetzt hat. Daß es dergleichen Reihen gebe, beweiset uns nicht nur das Beyspiel aller derjenigen, deren Glieder, hinter einem gewissen, alle der Null gleich sind, die also eigentlich über dieß Glied hinaus gar keiner Fortsetzung, noch Werthveranderung mehr fähig sind, wie die Binomialreihe des §. 1: sondern von dieser Art sind auch alle Reihen,

deren Glieder entweder eben so, oder noch stärker abnehmen, als die einer geometrischen Progression, deren Exponent ein echter Bruch ist. Denn der Werth der geometrischen Reihe

$$a + ae + ae^2 + \ldots + ae^r$$

ist bekanntlich $= a\frac{1 - e^{r+1}}{1 - e}$. Wird aber diese Reihe noch um s Glieder verlängert, so ist der Zuwachs

$$ae^{r+1} + ae^{r+2} + ae^{r+3} + \ldots + ae^{r+s} = ae^{r+r}.\frac{1 - e^s}{1 - e}.$$

Wenn nun $e < \pm 1$; so verbleibt dieser Zuwachs, wenn man erst r hinlänglich groß genommen hat, kleiner als jede gegebene Größe, wie groß auch s hinterher anwachsen mag. Denn weil e immer $< \pm 1$ verbleibt, so ist $ae^{r+1}.\frac{1 - e}{+ - e}$ offenbar immer kleiner als $ae^{r+1}.\frac{2}{1 - e}$ Letztere Größe aber kann durch Vermehrung von r kleiner als jede gegebene werden; indem derjenige Werth, den sie für ein nächst grösseres r annimmt, aus dem nächst vorhergehenden durch die Multiplication mit e, einem echten und unveränderlichen Bruche entstehet. (S. den binomischen Lehrsatz §. 22.) Es läßt sich also jede geometrische Progression, deren Exponent ein echter

Bruch ist, erst so weit fortsetzen, daß der Zuwachs, der ihr hierauf durch jede noch fernere Fortsetzung zu Theil werden kann, kleiner als irgend eine gegebene Größe verbleiben muß. Um desto mehr muß dieses von einer Reihe gelten, deren Glieder noch stärker abnehmen, als die einer fallenden geometrischen Progression.

§. 6.

5. **Zusatz.** Wenn man den Werth, welchen die Summe der ersten n, n + 1, n + 2, ..., n + r Glieder einer wie §. 5 beschaffenen Reihe hat, der Ordnung nach durch $\overset{n}{F}x$, $\overset{n+1}{F}x$, $\overset{n+2}{F}x$, ..., $\overset{n+r}{F}x$ bezeichnet (§. 1): so stellen die Größen

$$\overset{1}{F}x,\ \overset{2}{F}x,\ \overset{3}{F}x,\ \ldots,\ \overset{n}{F}x,\ \ldots,\ \overset{n+r}{F}x,\ \ldots$$

nun eine neue Reihe vor (die **summatorische** der vorigen genannt). Diese hat der gemachten Voraussetzung nach die besondre Eigenschaft, daß der Unterschied, der zwischen ihrem nten Gliede $\overset{n}{F}x$, und jedem späteren $\overset{n+r}{F}x$, es sey auch noch so weit von jedem nten entfernt, kleiner als jede gegebene Größe bleibt, wenn man erst n groß genug angenommen hat. Dieser Unterschied ist nähmlich der Zuwachs, den die **ursprüngliche** Reihe durch eine Fortsetzung über ihr ntes Glied hinaus erfährt; und dieser

Zu-

Zuwachs soll der Voraussetzung nach so klein verbleiben können, als man nur immer will, wenn man erst n groß genug angenommen hat.

§. 7.

Lehrsatz. Wenn eine Reihe von Größen

$$\overset{1}{F}x,\ \overset{2}{F}x,\ Fx,\ \ldots,\ \overset{n}{F}x,\ \ldots,\ \overset{n+r}{F}x,$$

von der Beschaffenheit ist, daß der Unterschied zwischen ihrem nten Gliede $\overset{n}{F}x$ und jedem späteren $\overset{n+r}{F}x$, sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Größe verbleibt, wenn man n groß genug angenommen hat: so gibt es jedesmahl eine gewisse beständige Größe, und zwar nur eine, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt.

Beweis. Daß eine solche Reihe, wie sie der Lehrsatz beschreibt, möglich sey, erhellet aus §. 6. Die Annahme aber daß die Größe X vorhanden sey, der sich die Glieder dieser Reihe bey immer weiterer Fortsetzung so sehr, als man nur immer will, nähern, enthält auch gewiß nichts Unmögliches, wenn man noch nicht voraussetzt, daß diese Größe nur eine einzige und unveränderliche sey. Denn wenn es eine Größe, welche sich ändern darf, seyn soll; so wird man sie freylich jederzeit so annehmen können, daß sie dem Gliede $\overset{n}{F}x$, welches man eben jetzt mit ihr vergleicht, recht nahe kommt, ja mit ihm völlig einerley ist. Daß aber die Voraussetzung auch einer unveränderlichen Größe, die diese Eigenschaft der Annäherung an die Glieder unsrer Reihe hat, keine Unmöglichkeit enthalte; folgt daraus, weil es bey dieser Voraussetzung möglich wird, diese Größe so genau, als man nur immer will, zu bestimmen. Denn gesetzt, man wollte X so genau bestimmen, daß der Unterschied zwischen dem angenommenen und dem wahren Werthe von X eine auch noch so kleine gegebene Größe d nicht überschreitet: so suche man nur in der gegebenen Reihe ein Glied $\overset{n}{F}x$ von der Beschaffenheit aus, daß jedes folgende $\overset{n+r}{F}x$ von ihm um weniger als $\pm d$ verschieden sey. Ein solches Fx muß es nach der Voraussetzung geben, Ich sage nun, der Werth von $\overset{n}{F}x$ sey von dem wahren Werthe der Größe X höchstens um $\pm d$ verschieden. Denn wenn man bey einerley n, r nach Belieben vergrößert, so muß der Unterschied $X - \overset{n+r}{F}x = \pm \omega$ so klein werden können, als man nur immer will. Der Unterschied $\overset{n}{F}x - \overset{n+r}{F}x$ bleibt.

aber

aber jederzeit, so groß man auch r nehme, $< \pm d$. Also muß auch der Unterschied

$$X - \overset{n}{F}x = (X - \overset{n+r}{F}x) - (\overset{n}{F}x - \overset{n+r}{F}x)$$

jederzeit $< \pm (d + \omega)$ verbleiben. Da aber derselbe bey einerley n eine beständige Größe ist, ω dagegen durch die Vergrößerung von r so klein gemacht werden kann, als man nur immer will: so muß $X - \overset{n}{F}x =$ oder $< \pm d$ seyn. Denn wäre es größer und z. B. $= \pm (d + e)$; so könnte unmöglich das Verhältniß $d + e < d + \omega$, d. h. $e < \omega$ bestehen, wenn man ω immer mehr verkleinert. Der wahre Werth von X ist also von dem Werthe, den das Glied $\overset{n}{F}x$ hat, höchstens um d verschieden; und läßt sich daher, da man d nach Belieben klein annehmen kann, so genau, als man nur immer will, bestimmen. Es gibt also eine reelle Größe, der sich die Glieder der von uns besprochenen Reihe so sehr, als man nur immer will, nähern, wenn man sie weit genug fortsetzt. Aber nur eine einzige dergleichen Größe gibt es. Denn nähmen wir an, daß es nebst X nach eine andre beständige Größe Y gäbe, der sich die Glieder der Reihe so sehr, als man nur immer will, nahern, wenn man sie weit genug fortsetzt; so müßten die Unterschiede $X - \overset{n+r}{F}x = \omega$, und $Y - \overset{n+r}{F}x = \overset{1}{\omega}$ so klein werden können, als man nur immer will, wenn man r groß ge-

genug werden ließe. Dasselbe müßte also auch von ihrem eigenen Unterschiede, d. h. von $X - Y = \omega - \overset{1}{\omega}$ gelten; welches wenn X und Y *beständige* Größen seyn sollen, unmöglich ist, falls man nicht $X = Y$ voraussetzt.

§. 8.

Anmerkung. Wenn man den Werth der Größe X auf die Art, wie es im vorigen §. geschehen, nähmlich durch irgend eines der Glieder selbst, aus welchen die gegebene Reihe zusammengesetzt ist, zu bestimmen sucht: so wird man, wenn anders die Glieder dieser Reihe nicht, anzufangen von einem gewissen, einander alle gleich sind, X niemahls ganz *genau* bestimmen. Man hüthe sich aber, hieraus zu schließen, daß die Größe X allemahl *irrational* seyn müsse. Denn wenn uns z. B. die Reihe

$$0{,}1;\quad 0{,}11;\quad 0{,}111;\quad 0{,}1111;\quad \ldots$$

(welche die summatorische der geometrischen

$$\frac{1}{10};\quad \frac{1}{100};\quad \frac{1}{1000};\quad \frac{1}{10000};\quad \ldots$$

ist) vorgelegt wäre: so wäre die Größe, der sich ihre Glieder so sehr, als man nur immer will, nähere, keineswegs irrational, sondern der Bruch $\frac{1}{9}$. Daraus nähmlich, daß eine Größe sich *auf einem gewissen Wege* nicht genau bestimmen läßt, fol-

get

get noch nicht, daß sie auf keinem andern völlig bestimmbar, und also irrational sey.

§. 9.

Zusatz. Wenn also irgend eine gegebene Reihe von der Beschaffenheit ist, daß jedes einzelne ihrer Glieder endlich, die Veränderung aber, die sie durch eine auch noch so weit getriebene Fortsetzung erfährt, kleiner als jede gegebene Größe ausfällt, sobald man nur die Anzahl ihrer bisherigen Glieder groß genug genommen hat: so gibt es jederzeit eine, aber auch nur eine beständige Größe, welcher der Werth dieser Reihe so nahe tritt, als man nur immer will, wenn man sie weit genug fortsetzt. Denn eine solche Reihe ist von der Art der §. 5 beschriebenen, und folglich bilden die Werthe, welche die Summe ihrer n, n + 1, ... Glieder ersteigt, eine Reihe, wie die der §§. 6 und 7; mithin kömmt ihnen auch die §. 7 erwiesene Eigenschaft zu.

§. 10.

Anmerkung. Man glaube ja nicht, daß in dem obigen Satze §. 9 die Bedingung, „daß die „Veränderung (Zu- oder Abnahme), welche „die Reihe durch jede Fortsetzung er- „fährt, kleiner als jede gegebene Größe

müs-

„müsse bleiben können, wenn man sie vor-
„hin schon weit genug fortgesetzt hat," —
überflüssig sey; und daß der Satz vielleicht mit einer grö-
ßeren Allgemeinheit auch so ausgedrückt werden könn-
te: „Wenn die Glieder einer Reihe durch
„ihre Fortsetzung stets kleiner und so
„klein zu werden vermögen, als man nur
„immer will; so gibt es jedesmahl auch
„eine beständige Größe, der sich der
„Werth der Reihe bey ihrer Fortsetzung
„so sehr, als man nur immer will, nä-
„hert." Diese Behauptung würde gleich folgendes
Beyspiel widerlegen. Die Glieder der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots$$

können so klein werden, als man nur immer will; und doch ist es eine aus den Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel bekannte (aber auch aus rein arithmetischen Betrachtungen herleitbare) Wahrheit, daß dieser Reihe Werth größer, als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man sie weit genug fortsetzt.

§. 11.

Vorerinnerung. In Untersuchungen der angewandten Mathematik ereignet sich öfters der Fall, daß man von einer veränderlichen Größe x erfährt, es komme allen ihren Werthen, die kleiner als ein gewisser u sind, eine bestimmte Eigenschaft M zu; ohne zu gleicher Zeit zu erfahren, daß diese Eigenschaft Werthen, die *größer* sind als u, nicht mehr zukomme. In solchen Fällen kann es vielleicht noch manches $\overset{1}{u}$, das > u ist, geben, von dem es gleicher Weise wie von u gilt, daß alle unter ihm stehende Werthe von x die Eigenschaft M besitzen, ja diese Eigenschaft kann vielleicht *allen* x *ohne Ausnahme* zukommen. Wenn man dagegen nur noch *dieß Eine* erfährt, *daß* M *nicht allen* x *überhaupt eigen sey*: so wird man aus der Vereinigung von diesen beyden Angaben nun schon berechtiget seyn zu schließen, *es gebe eine gewisse Größe* U, *welche die größte derjenigen ist, von denen es wahr seyn kann, daß alle kleineren* x *die Eigenschaft* M *besitzen*. Dieses beweiset der folgende Lehrsatz.

§. 12.

Lehrsatz. Wenn eine Eigenschaft M nicht *allen* Werthen einer veränderlichen Größe x, wohl aber *allen*, die *kleiner* sind, als ein gewisser u, zukömmt: so gibt es allemahl eine Größe U, welche die größte derjenigen ist, von denen behauptet werden kann, daß alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen.

Be-

Beweis. 1. Weil die Eigenschaft M von allen x, die kleiner sind als u, und gleichwohl nicht von allen überhaupt gilt; so gibt es sicher irgend eine Größe $V = u + D$ (wobey D etwas positives vorstellt) von der sich behaupten läßt, daß M nicht allen x, die $< V = u + D$ sind, zukomme. Wenn ich daher die Frage aufwerfe, ob M wohl allen x, die $< u + \frac{D}{2^m}$ sind, zukomme? und den Exponenten m der Ordnung nach, erst 0, dann 1, dann 2, dann 3, u. s. w. bedeuten lasse: so bin ich gewiß, daß man die erste meiner Fragen mir wird verneinen müssen. Denn die Frage, ob M wohl allen x, die $< u + \frac{D}{2^0}$ sind, zukomme, ist einerley mit der, ob M allen x, die $< u + D$ sind, zukomme; welches nach der Voraussetzung zu verneinen ist. Es kömmt nur darauf an, ob man mir auch alle folgenden Fragen, welche entstehen, indem ich m nach und nach immer größer ansetze, verneinen wird. Sollte dieses der Fall seyn; so ist einleuchtend, daß u selbst der größte der Werthe ist, von welchen die Behauptung gilt, daß alle x, die kleiner als er sind, die Eigenschaft M besitzen. Denn gäbe es noch einen größeren z. B. $u + d$; d. h. gälte die Behauptung, daß auch noch alle x, die $< u + d$ sind, die Eigenschaft M haben: so ist doch offenbar, daß wenn ich m groß genug annehme,

u +

$u + \frac{D}{2^m}$ einmahl = oder $< u + d$ wird; und folglich müßte, wenn M allen x, die $< u + d$ sind, zukömmt, dasselbe auch allen, die $< u + \frac{D}{2^m}$ sind, zukommen; also hätte mir diese Frage nicht verneint, sondern bejahet werden müssen. Es ist daher erwiesen, daß es in diesem Falle (wo man mir alle obigen Fragen verneint) eine gewisse Größe U (nähmlich u selbst) gebe, welche die größte derjenigen ist, von denen die Behauptung gilt, daß alle unter ihr stehende x die Eigenschaft M besitzen.

2. Wird mir dagegen die obige Frage einmahl bejahet, und ist m der bestimmte Werth des Exponenten, bey dem man sie mir zuerst bejahet (m kann auch 1 bedeuten; aber, wie wir gesehen, nicht 0): so weiß ich nun, daß die Eigenschaft M allen x, die $< u + \frac{D}{2^m}$ sind, aber schon nicht mehr allen, die $< u + \frac{D}{2^{m-1}}$ sind, zukomme. Der Unterschied zwischen $u + \frac{D}{2^{m-1}}$ und $u + \frac{D}{2^m}$ ist aber $= \frac{D}{2^m}$. Wenn ich daher mit diesem wieder, wie vorhin mit dem Unterschiede D verfahre; d. h. wenn ich die Frage aufwerfe, ob M wohl allen x, die

$< u +$

$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}}$ sind, zukomme; und hier den Exponenten n erst o; dann 1, dann 2, u. s. w. bedeuten lasse: so bin ich abermahl gewiß, daß man mir wenigstens die erste dieser Fragen wird verneinen müssen. Denn fragen, ob M allen x, die $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+o}}$ sind, zukomme, heißt eben so viel, als fragen, ob M allen x, die $< u + \frac{D}{2^{m-1}}$ sind, eigen sey; was man schon vorhin verneinet hatte. Sollte man aber auch alle meine folgenden Fragen verneinen, so groß ich auch n nach und nach mache: so würde, wie vorhin, erhellen, $u + \frac{D}{2^m}$ sey jener größte Werth, oder das U, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M besitzen.

3. Wird mir dagegen eine dieser Fragen bejahet, und geschieht dieß zuerst bey dem bestimmten Werthe n: so weiß ich nun, daß M allen x, die $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}}$ sind, zukomme, aber schon nicht mehr allen, die $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n-1}}$ sind.

sind. Der Unterschied zwischen diesen beyden Größen ist $= \frac{D}{2^{m+n}}$; und ich verfahre mit ihm wieder, wie vorhin mit $\frac{D}{2^m}$. U. s. w.

4. Wenn ich auf diese Art so lange fortfahre, als man nur immer will; so sieht man, daß das Resultat, das ich zuletzt erhalte, eines von Beydem seyn muß.

a. Entweder ich finde einen Werth von der Form $u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n\ldots+r}}$, der sich mir als der größte darstellt, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M besitzen. Dieß geschieht in dem Falle, wenn mir die Fragen, ob M allen x, die $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+n+r}}$ sind, zukomme, für jeden Werth von s verneinet werden.

b. Oder ich finde wenigstens, daß M zwar allen x, die $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$ sind, zukomme, aber schon nicht mehr allen, die

$$< u + \frac{I}{2^m} + \frac{D}{2^{n+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}$$

sind. Hiebey steht es mir frey, die Anzahl der Glieder in diesen beyden Größen durch neue Fragen immer noch größer zu machen.

5. Ist nun der erste Fall vorhanden, so ist die Wahrheit des Lehrsatzes bereits erwiesen. Im zweyten Falle lasset uns bemerken, daß die Größe

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$$

eine Reihe vorstelle, deren Gliederzahl ich nach Belieben vermehren kann, und die zur Classe der §. 5 beschriebenen gehöret; weil sie, je nachdem $m, n, \ldots 1$ entweder alle $= 1$, oder zum Theile noch größer sind, entweder eben so, oder noch stärker abnimmt, als eine geometrische Progression, deren Exponent der echte Bruch $\frac{1}{2}$ ist. Daraus ergibt sich, daß sie die Eigenschaft des §. 9 habe; d. h. daß es eine gewisse beständige Größe gebe, der sie so nahe kommen kann, als man nur immer will, wenn man die Menge ihrer Glieder hinlänglich vermehret. Sey diese Größe U; so behaupte ich, die Eigenschaft M gelte von allen x, die $< U$ sind. Denn gälte sie von irgend einem x, das $< U$ ist, z. B. von $U - \delta$ nicht; so müßte die Größe

$$u + \frac{D}{2m} + \frac{D}{2^{n+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}},$$ weil

für

für alle x, die kleiner als sie sind, die Eigenschaft M Statt finden soll, immer den Abstand δ von U behalten. Denn jedes x, das

$$= u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} - \omega$$

ist, so klein auch ω sey, besitzt die Eigenschaft M; dagegen dem $x = U - \delta$ soll sie nicht zukommen: also muß

$$U - \delta > u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} - \omega,$$

oder $U - \left[u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}\right] > \delta - \omega$

seyn. Mithin könnte der Unterschied zwischen U und der Reihe nicht so klein werden, als man nur immer will; da $\delta - \omega$ nicht so klein werden kann, als man nur immer will, indem sich δ nicht ändert, während ω kleiner als jede gegebene Größe zu werden vermag. — Eben so wenig kann aber M von allen x, die $< U + \varepsilon$ sind, gelten. Denn weil der Werth der Reihe $u + \frac{D}{} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$ dem Werthe der Reihe

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+}}$$ so nahe

gebracht werden kann, als man nur immer will, indem der Unterschied beyder nur $\frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$ ist; weil ferner der Werth der letzteren Reihe der Größe U so nahe treten kann, als man nur immer will: so kön-

können auch der Werth der ersteren Reihe und U einander so nahe kommen, als man nur will. Also kann $u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}$ gewiß $< U + \varepsilon$ werden. Nun aber gilt der Voraussetzung nach M nicht von allen x, die

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}$$

sind; um desto weniger also von allen x, die $< U + \varepsilon$ sind. Also ist U der größte Werth, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M besitzen.

§. 13.

1. Anmerkung. Vorstehender Lehrsatz ist von der größten Wichtigkeit, und wird in allen Zweigen der Mathematik, in der Analysis sowohl, als in den angewandten Theilen, in der Geometrie, Chronometrie und Mechanik gebraucht. Statt seiner hatte man sich bisher nicht selten des falschen Satzes bedient: „Wenn eine Eigenschaft M nicht „von allen x, wohl aber von allen, die „kleiner als ein gewisses sind, gilt: so „gibt es jederzeit irgend ein größtes x, „welchem die Eigenschaft M zukömmt" Dieß, sage ich, ist zu Folge des so eben Erwiesenen falsch. Denn gibt es irgend eine Größe U, welche

die

die größte unter denjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle unter ihr stehende x die Eigenschaft M an sich haben: so gibt es eben darum sicher kein größtes x, dem diese Eigenschaft zukömmt, wenn anders x eine entweder frey oder doch stetig veränderliche Größe ist. Denn für eine jede frey oder nach dem Gesetze der Stetigkeit veränderliche Größe gibt es bekanntlich nie einen größten Werth, der kleiner als eine gewisse Grenze U ist; indem, so nahe sie auch schon an dieser Grenze stehen mag, sie ihr doch immer noch näher gebracht werden kann. — Man denke sich, um dieß durch ein Beyspiel zu erläutern, eine rechtwinkelige Hyperbel, und nehme eine ihrer Asymptoten zur Abscissenlinie, und nicht den Mittelpunct c, sondern was immer für einen andern Punct a in dieser Asymptote, der die Entfernung D von c hat, zum Anfangspuncte der Abscissen an. Erklären wir nun die Richtung ac für die positive der Abscissen, und die Richtung ab, welche die rechtwinkelige Ordinate des Punctes a hat, für die positive der Ordinaten: so wird von jeder Abscisse x, die kleiner als eine gewisse z. B. kleiner als $\frac{D}{2}$ ist, die Eigenschaft gelten, daß ihr eine positive Ordinate entspricht. Gleichwohl wird diese Eigenschaft (M) nicht von allen positiven Abscissen gelten, nahmentlich nicht von solchen, die großer als D sind. Gibt es nun wohl hier eine größte Abscisse, einen größten Werth von x, welchem die Eigenschaft M zukömmt? Keineswegs; wohl aber gibt es ein U, d. h. eine Abscisse, welche die größte unter denjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle kleineren als sie positive Ordinaten haben, d. h. die Eigenschaft M besitzen. Diese Abscisse nähmlich ist + D.

§. 14.

2. Anmerkung. Es dürfte Jemand vielleicht auf den Gedanken kommen, daß der Beweis des Lehrsatzes §. 12 ganz kurz auf folgende Art hätte gefaßt werden können: „Gäbe es kein größtes U, von „welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm „stehende x die Eigenschaft M besitzen: so würde „man u immer größer und größer, und „also so groß, als man nur immer will, nehmen „können, und folglich müßte M von allen x ohne „Ausnahme gelten.“ — Allein dieß wäre ein sehr fehlerhafter Schluß, indem er sich auf den stillschweigend angenommenen Obersatz stützen würde: „daß eine Größe, die immer größer und „größer genommen werden kann, als „man sie schon genommen hat, so groß „werden könne, als man nur immer „will.“ — Wie falsch dieses sey, beweiset z. B. die bekannte Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$, deren Werth immer größer und größer gemacht werden

kann

kann, als er schon ist, und gleichwohl immer < 1 verbleibt! — Wir würden eines so leicht einzusehenden Irrthums gar nicht erwähnen, wenn es nicht von Zeit zu Zeit geschähe, daß Mathematiker sich ihn zu Schuld kommen lassen, wie erst kürzlich Einer in seiner „vollständigen Theorie der Parallelen."

§. 15.

Lehrsatz. Wenn sich zwey Functionen von x, fx und φx, entweder für alle Werthe von x, oder doch für alle, die zwischen α und β liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern; wenn ferner $f\alpha < \varphi\alpha$, und $f\beta > \varphi\beta$ ist: so gibt es jedesmahl einen gewissen zwischen α und β liegenden Werth von x, für welchen $fx = \varphi x$ wird.

Beweis. Wir müssen erinnern, daß in diesem Lehrsatze die Werthe der Functionen fx und φx bloß ihrer absoluten Größe nach, d. h. ohne Rücksicht auf ein Vorzeichen, oder so, als ob sie gar keine des Gegensatzes fähige Größen wären, mit einander verglichen werden sollen. Wohl aber kommt es an auf die Bezeichnung, welche α und β haben.

I. Man nehme erstlich an, daß α und β beyde positiv sind, und daß (weil dieses dann gleichgültig ist) β die größere von beyden, und somit $\beta = \alpha + i$ sey, wo i eine positive Größe anzeigt. Weil nun $f\alpha < \varphi\alpha$ ist; so ist auch, wenn ω eine positive Größe anzeigt, die so klein werden kann, als man nur immer will, $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$. Denn weil sich fx und φx für alle x, die zwischen α und β liegen, stetig verändern sollen; und $\alpha + \omega$ zwischen α und β liegt, so bald nur $\omega < i$ genommen wird: so mussen $f(\alpha + \omega) - f\alpha$ und $\varphi(\alpha + \omega) - \varphi\alpha$ so klein werden konnen, als man nur will, wenn man ω klein genug nimmt. Es ist daher, wenn auch Ω, $\acute{\Omega}$ Größen bedeuten, die sich so klein machen lassen, als man nur immer will, $f(\alpha+\omega) - f\alpha = \Omega$, und $\varphi(\alpha + \omega) - \varphi\alpha = \acute{\Omega}$. Daher

$$\varphi(\alpha + \omega) - f(\alpha + \omega) = \varphi\alpha - f\alpha + \acute{\Omega} - \Omega.$$

Allein $\varphi\alpha - f\alpha$ gleicht nach der Voraussetzung irgend einer positiven Größe von unveränderlichem Werthe A. Also ist

$$\varphi(\alpha + \omega) - f(\alpha + \omega) = A + \acute{\Omega} - \Omega,$$

welches, wenn man Ω, $\acute{\Omega}$ klein genug werden läßt, d. h. wenn man dem ω einen sehr kleinen Werth ertheile, und dann noch um so mehr für alle kleineren Werthe, was positiv bleibt. Also läßt sich von allen ω, die kleiner als ein gewisses sind, behaupten, daß die zwey Functionen $f(\alpha + \omega)$ und $\varphi(\alpha + \omega)$ in dem Verhältnisse der kleineren Größe zu einer grö-

ße-

ßeren stehen. Bezeichnen wir diese Eigenschaft der veränderlichen Größe ω durch M; so können wir sagen, daß alle ω, die kleiner als ein gewisses sind, die Eigenschaft M besitzen. Daß aber diese Eigenschaft gleichwohl nicht allen Werthen von ω zukomme, nahmentlich nicht dem Werthe $\omega = i$; ist daraus klar, weil $f(\alpha + i) = f\beta$ nach der Voraussetzung nicht mehr $<$, sondern $> \varphi(\alpha + i) = \varphi\beta$ ist. Zufolge des Lehrsatzes §. 12 muß es daher eine gewisse Größe U geben, welche die größte unter denjenigen ist, von denen sich behaupten läßt, daß alle ω die $<$ U sind, die Eigenschaft M an sich tragen.

2. Und dieses U muß innerhalb o und i liegen. Denn es kann erstlich nicht $= i$ seyn; indem dieß hieße, daß jedes $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$ sey, so oft nur $\omega < i$ ist, es möge übrigens dem Werthe i auch noch so nahe kommen. Allein ganz auf dieselbe Art, wie wir so eben erwiesen, daß die Voraussetzung $f\alpha < \varphi\alpha$ die Folge $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$ nach sich zieht, so bald man nur ω klein genug nimmt, läßt sich auch darthun, daß aus der Voraussetzung $f(\alpha + i) > \varphi(\alpha + i)$, die Folge $f(\alpha + i - \omega) > \varphi(\alpha + i - \omega)$ fließt, sobald man nur ω klein genug nimmt. Also ist es nicht wahr, daß die zwey Functionen fx und φx für alle Werthe von x, die $< \alpha + i$ sind, in dem Velhältnisse der kleineren Größe zu einer größeren stehen. — Noch weniger kann zweytens $U > i$ seyn, weil

sonst

sonst auch i einer der Werthe von ω wäre, die $< U$ sind, und daher auch $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$ seyn müßte, was der Voraussetzung des Lehrsatzes geradezu widerspricht. Also liegt U, da es doch positiv ist, sicher zwischen 0 und i, und folglich $\alpha + U$ zwischen α und β.

3. Es frägt sich nun, in welchem Verhältnisse die Functionen fx und φx für den Werth $x = \alpha + U$ zu einander stehen? Es kann zuförderst nicht $f(\alpha + U) < \varphi(\alpha + U)$ seyn; denn dieses gäbe auch $f(\alpha + U + \omega) < \varphi(\alpha + U + \omega)$, wenn man ω klein genug annähme; und folglich wäre $\alpha + U$ nicht der größte Werth, von dem behauptet werden kann, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M haben. — Eben so wenig kann zweytens $f(\alpha + U) > \varphi(\alpha + U)$ seyn; weil dieß auch $f(\alpha + U - \omega) > \varphi(\alpha + U - \omega)$ gäbe, sobald man ω nur klein genug nimmt; und also wäre gegen die Voraussetzung die Eigenschaft M nicht von allen x, die unter $\alpha + U$ stehen, wahr. Es bleibt denn also nichts anderes übrig, als daß $f(\alpha + U) = \varphi(\alpha + U)$ sey; und folglich ist erwiesen, daß es einen zwischen α und β liegenden Werth von x, nähmlich $\alpha + U$ gibt, für welchen $fx = \varphi x$ wird.

II. Derselbe Beweis ist auch auf den Fall anwendbar, wenn α und β beyde negativ sind; sobald man nur unter ω, i und U negative Größen

ver-

versteyet; indem $\alpha+\omega$, $\alpha+i$, $\alpha+U$, $\alpha+U-\omega$ dann gleichfalls Größen zwischen α und β vorstellen.

III. Ist $\alpha=0$ und β positiv, so nehme man nur auch $i\ (=\beta)$, ω, U positiv; und ist β negativ, auch diese negativ: so wird sich der Beweis I. wörtlich anwenden lassen.

IV. Wenn endlich α und β von entgegengesetzter Art, und (weil dieß gleichgültig ist) z. B. α negativ, und β positiv ist: so sagt die Voraussetzung des Lehrsatzes in Betreff der Stetigkeit der Functionen fx und φx, daß diese Stetigkeit sich auf alle Werthe von x erstrecke, die, wenn sie negativ, $< \alpha$, und wenn sie positiv, $< \beta$ sind. Unter diesen ist denn auch der Werth $x=0$ begriffen. Man untersuche also das Verhältniß, welches fx und φx für $x=0$ haben. Ist $f(0)=\varphi(0)$, so ist der Lehrsatz schon von selbst erwiesen. Ist aber $f(0)>\varphi(0)$; so liegt, weil $f\alpha<\varphi\alpha$ seyn soll, nach III. zwischen 0 und α; ist endlich $f(0)<\varphi(0)$, zwischen 0 und β ein Werth, für welchen $fx=\varphi x$ wird. Also gibt es in jedem Falle einen zwischen α und β liegenden Werth von x, der $fx=\varphi x$ macht.

§. 16.

Anmerkung. Daß es nur einen einzigen Werth von x gebe, der $fx=\varphi x$ macht,

wird

wird hiemit keineswegs behauptet. Wenn nähmlich $f\alpha < \varphi\alpha$, und $f(\alpha + U) = \varphi(\alpha + U)$; so muß zwar allerdings $f(\alpha + U + \omega) > \varphi(\alpha \quad U + \omega)$ seyn, wenn man ω klein genug nimmt; d. h. die Function fx, die vorhin kleiner war, als φx, muß bald darauf, nachdem beyde einander gleich geworden sind, größer als φx werden. Allein bey immer größerer Vermehrung von ω ist es wohl möglich, daß man, bevor $\alpha + U + \omega$ noch $= \beta$ gemacht worden ist, auf Werthe kommt, die fx abermahls $< \varphi x$ geben. In einem solchen Falle muß es, wie unmittelbar aus unserm Lehrsatze folgt, nebst U noch zwey andere zwischen α und β liegende Werthe von x geben, welche $fx = \varphi x$ machen. Denn es sey $f(\alpha + U + x) < \varphi(\alpha + U + x)$; so muß es, weil vorhin $f(\alpha + U + \omega)$ schon $> \varphi(\alpha + U + \omega)$ war, zwischen $\alpha + U + \omega$ und $\alpha + U + x$, d. h. auch zwischen α und β, einen Werth von x geben, wofür $fx = \varphi x$ ist; und eben so, weil wieder $f(\alpha + i)$ oder $f\beta > \varphi\beta$ ist, auch zwischen $\alpha + U + x$ und β noch einen Werth von x, der $fx = \varphi x$ macht. Auf diese Art erhellet, daß die Werthe von x, welche $fx = \varphi x$ machen, überhaupt immer nach einer ungeraden Zahl vorhanden seyn müssen.

§. 7.

Lehrsatz. Jede Function von der Form $a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$, in welcher

m,

$m, n, \ldots r$ ganze positive Exponenten bezeichnen, ist für alle Werthe von x eine nach dem Gesetze der Stetigkeit veränderliche Größe.

Beweis. Denn wenn sich x in $x+\omega$ verändert; so ist die Aenderung, welche die Function erfährt, offenbar

$$=b\left[(x+\omega)^m - x^m\right]+c\left[(x+\omega)^n - x^n\right]+\ldots+p\left[(x+\omega)^r - x^r\right];$$

eine Größe, von der sich leicht darthun läßt, daß sie so klein werden könne, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt. Denn zu Folge des binomischen Lehrsatzes, dessen Gültigkeit für ganze positive Exponenten wir (§ 8 des binom. Lehrs.) unabhängig von den Untersuchungen, mit denen sich die gegenwärtige Abhandlung beschäftigt, dargethan haben, ist diese Größe:

$$=\omega\left\{\begin{array}{l} mbx^{m-1} + m\frac{m-1}{2}bx^{m-2}\omega + \ldots + \omega^{m-1} \\ + ncx^{n-1} + n\frac{n-1}{2}cx^{n-2}\omega + \ldots + \omega^{n-1} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + rpx^{r-1} + r\frac{r-1}{2}px^{r-2}\omega + \ldots + \omega^{r-1} \end{array}\right\}$$

Die Menge der Glieder, aus welchen der in den Klammern enthaltene Factor bestehet, ist, wie man weiß, immer nur endlich, und von dem Werthe

 der

der Größen x und ω unabhängig; und da diese überall nur in positiver Potenz erscheinen; so ist der Werth jedes einzelnen Gliedes, folglich auch des ganzen Ausdruckes für jeden Werth von x und ω, (auch für $x = 0$), immer nur endlich. Wird aber bey einerley x, ω verkleinert; so nehmen die Glieder, in denen ω vorkömmt, ab, während die übrigen ungeändert bleiben. Bezeichnen wir also durch S die Größe, die herauskömmt, wenn man die Werthe, die alle einzelnen Glieder des Ausdruckes für ein bestimmtes ω, z. B. für $\overset{1}{\omega}$ annehmen, so zu einander addirt, als ob sie alle einerley Vorzeichen hätten: so ist der wirkliche Werth, den dieser Ausdruck für eben dasselbe $\overset{1}{\omega}$ hat, gewiß nicht $> S$, derjenige aber, den er für jedes kleinere ω annimmt, sicher $< S$. Verlangt man daher, daß die Veränderung, welche die Function $a + bx^m + cx^n + .. + px^r$ erfährt, $< D$ ausfalle; so nehme man nur ein ω, das zugleich $< \overset{1}{\omega}$, und auch $< \frac{D}{S}$ ist: so wird $\omega . S$, und um so mehr das Product aus ω in eine Größe, die $< S$ ist, $< D$ seyn müssen.

§. 18.

Lehrsatz. Wenn eine Function von der

Form

Form $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q$, in welcher n eine ganze positive Zahl bedeutet, für $x = \alpha$ einen positiven, für $x = \beta$ aber einen negativen Werth annimmt: so hat die Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$$

wenigstens eine reelle Wurzel, die zwischen α und β liegt.

Beweis. 1. Wenn α und β beyde einerley Vorzeichen haben (beyde entweder positiv oder negativ sind); so ist es klar, daß eben dieselben Glieder der Function, welche für $x = \alpha$ positiv oder negativ werden, dieß Zeichen auch für $x = \beta$, und für die sämmtlichen Werthe von x, die zwischen α und β liegen, behalten. Wird nun der Werth der Function für $x = \alpha$ positiv, für $x = \beta$ aber negativ; so kann dieß nur daher rühren, weil die Summe der positiven Glieder in ihr für $x = \alpha$ größer, für $x = \beta$ aber kleiner, als die der negativen ausfällt. Aber die Summe jener sowohl als dieser ist von der Form.

$$a + bx^m + cx^n + \ldots + px$$

des §. 17, d. h. eine stetige Functien. Bezeichnen wir also die eine durch φx, die andere durch fx; so muß es, weil $f\alpha < \varphi\alpha$, und $4\beta > \varphi\beta$ ist, nach §. 15 irgend einen zwischen α und β gelegenen Werth von x geben, für welchen $fx = \varphi x$

wird

wird. Für diesen Werth wird aber $fx - \varphi x$, d. h. die gegebene Function zu Null; also ist dieser Werth eine Wurzel der Gleichung

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0.$$

2. Sind aber α und β entgegengesetzt; so betrachte man den Werth, den die gegebene Function für $x = 0$ annimmt. Ist dieser Null; so ist von selbst erwiesen, daß die erwähnte Gleichung eine reelle, zwischen α und β liegende Wurzel habe; nähmlich $x = 0$. Ist aber dieser Werth (die Größe q) positiv; so weiß man jetzt, daß die gegebene Function für $x = 0$ positiv, für $x = \beta$ aber negativ werde; und weil dieselben Glieder, welche für $x = \beta$ positiv oder negativ werden, dieß Zeichen auch für alle zwischen 0 und β liegende Werthe von x behalten: so kann man ganz durch dieselben Schlüsse, wie in n°. 1 beweisen, daß zwischen 0 und β ein Werth von x liegen müsse, welcher die Function zu Null macht. Ist endlich q negativ; so gilt dasselbe, was wir so eben gesagt, wenn man nur α statt β setzt. Da nun ein zwischen 0 und β oder ein zwischen 0 und α liegender Werth auch zwischen α und β liegt, wenn beyde entgegengesetzt sind; so ist die Wahrheit unsers Lehrsatzes für jeden Fall erwiesen.