Jiří Veselý

π aneb 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 3, 1–10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152814`

π
aneb
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 79 ...

Jiří Veselý

Úvod. Označení podílu velikostí obvodu a průměru kruhu symbolem 'π' pochází patrně ze zkrácení řeckého termínu $\pi\epsilon\rho\iota\phi\acute{\epsilon}\rho\epsilon\iota\alpha$. Často užívaný název *Ludolfovo číslo* je u nás podstatně frekventovanější než ve světové literatuře (viz např. [Ev], str. 86). Nežli se pokusíme o malý výlet do historie, je vhodné připomenout, že 'π' je pro žáky tvrdým oříškem: je jedním z čísel, s nimiž je nutno se seznámit daleko dříve, nežli se to dá udělat z matematického hlediska dostatečně přesně. Poučíme-li však žáky o tom, jak se v historii lidské vědomosti o čísle π vyvíjely a použijeme-li k výkladu původní příklady, máme naději žáky zaujmout a cestu k budoucímu pochopení této důležité partie jim maximálně usnadnit. K dobré orientaci výkladu musí mít učitel nad jakoukoli látkou potřebný nadhled: k němu má následující text přispět.

Pro větší přehlednost je přirozené používat označení, na které jsme všichni zvyklí; to je samo o sobě daleko mladší než je doba, kam historie π sahá. I standardizace označení prošla totiž určitým vývojem: symbol 'π' použil jako prvý v této souvislosti William Oughtred (1575 – 1660) v práci, která byla vydána až po jeho smrti v r. 1663. Označil jím *délku jednotkové kružnice*. Ve stejném významu ho pak používali i další angličtí matematici Isaac Barrow (1630 – 1677) a James Gregory (1638 – 1675). K označení *poměru obvodu a průměru kruhu* ho poprvé použil v r. 1706 William Jones (1675 – 1749). Dokonce i Leonhard Euler (1707 – 1783) užíval až do r. 1735 pro tento poměr jiné

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), absolvent MFF UK, pracuje v Oddělení historie matematiky MÚ UK. Článek je rozšířeným textem jedné z přednášek na semináři z historie matematiky na MFF UK (autor děkuje kolegům ze semináře za cenné připomínky).

označení (písmeno p) a symbolu π použil poprvé teprve v práci z r. 1737; snad právě díky jeho vlivu se označení definitivně vžilo.

Pohled do ranné historie. Ve starších pramenech nacházíme použití aproximací π, které jsou až překvapivě dobré. V dalším textu jsou číselné hodnoty často „zpětně dopočteny" z uvedených návodů či řešených praktických úloh; v historických pramenech však téměř vždy schází to podstatné, tj. popis toho, jak byly tyto hodnoty určeny či proč se konkrétní úloha řeší popisovaným způsobem. Symbolu '$\sim$' používáme k popisu aproximace π v jednotlivých pramenech; hodnoty přibližujeme desetinným vyjádřením pro snazší orientaci čtenáře. Uvedeme několik starších, vcelku namátkou zvolených příkladů.

Nejprve si uvědomíme, že jeden z klasických problémů řecké matematiky, problém kvadratury kruhu, souvisí úzce s rektifikací kružnice. U prvého je požadováno nalézt takovou konstrukci kružítkem a pravítkem, která k danému kruhu poskytne čtverec téhož obsahu, ve druhém jde v podstatě o to, jak sestrojit stejnými prostředky úsečku jejíž délka je rovna délce dané kružnice, známe-li její poloměr. Snadno nahlédneme, že jde v obou případech o konstruovatelnost úsečky o délce π. Snaha vyřešit tento problém byla po dlouhou dobu hnacím motorem činnosti mnoha matematiků.

Dnes jsou známy i výsledky, které prakticky neovlivnily vývoj evropské matematiky. Některé pocházejí např. z Číny. V prameni z r. 130 užívá HOU HAN SHU[1] $\pi \sim 3,1622$ a je téměř jisté, že tamní učenci dospěli (níže popsanou Archimedovou metodou, avšak nezávisle) k odhadu

$$3,141024 < \pi < 3,142704$$

(LIU HUI dospěl roku 264 dokonce o krok dále než Archimedes, neboť pracoval s pravidelným vepsaným mnohoúhelníkem o 192 stranách). Pro zajímavost zmiňme matematika ZU CHONGZHI (429 – 500), jenž se ocitl v r. 1955 na známce vydané v ČLR. Na ní je uvedena i hodnota $\pi \sim 3,14159265$. Podle čínských pramenů Zu skutečně určil π přesně na sedm desetinných míst (na známce je

[1] Přepis jmen v literatuře značně kolísá, zejména u orientálních učenců.

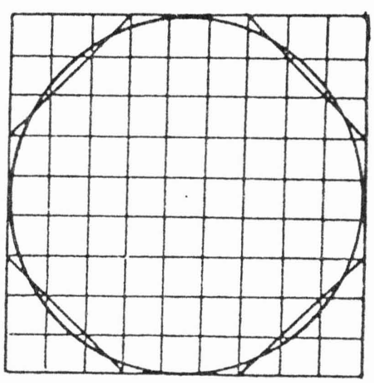
patrně průměr z nalezených odhadů). Srovnej [Ev], str. 85, nebo [Be], str. 27.

Také výsledky nalezené v Indii jsou velmi pozoruhodné: např. v knize *Śalbasūtras* (asi z r. 530) uvádí ĀRYABHATA (475 – ?) $\pi \sim (62832/20000) \doteq 3,1416$. V jiném díle (asi z r. 1150) píše učenec BHĀSKARA (1114 – asi 1185) $\pi \sim 3927/1250 = 3,1416$ (tuto „přesnou hodnotu", patrně převzatou z předchozího pramene, autor aproximuje zlomkem 22/7); na jiném místě se u něj setkáváme s hodnotou $\pi \sim \sqrt{10} \doteq 3,162278$. Srovnej např. s [Be], str. 26. Mimochodem, posledně citovaná knížka českého autora vyšla v době jeho emigrace v USA a je reálná naděje, že se brzo objeví i její český překlad.

Poznamenejme, že v *Bibli* lze nalézt aproximaci $\pi \sim 3$. Kniha První Královská (Samuelova) (I.7.23) popisuje stavbu domu Šalamounova [Bi][2]:

23. *Udělal také moře slité desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol: pět loket byla vysokost jeho, a okolek třiceti loket obkličoval je vůkol.*

Přejděme nyní k výsledkům, které rozvoj evropské i světové matematiky ovlivnily podstatněji.



Obr. 1.

V egyptském papyru, který zakoupil skotský sběratel HENRY RHIND v r. 1858, nacházíme 84 řešených problémů; je v něm řešen i příklad, z něhož lze zpětně určit hodnotu $\pi \sim 3,16049$. V prame-

[2]Citujeme záměrně starší vydání z r. 1889. „Moře slité" je v komentáři vysvětleno, šlo o měděnou nádobu pro koupel.

nech se též uvádí, že papyrus byl opsán písařem AHMESEM asi 1650 před n.l. z pramenů patrně o 200 – 400 let starších[3]. Z náznaků řešení jiných problémů lze provést *velmi pravděpodobnou rekonstrukci* postupu založeného na dvou nezávislých přiblíženích, jejichž chyby se poněkud kompenzují (sledujte Obr. 1). Nejprve se sestrojí čtverec o straně rovné 9 jednotkám a do něj se vepíše nepravidelný osmiúhelník („rohové čtverce" o straně 3 jednotky se rozdělí úhlopříčkami). Obsah tohoto osmiúhelníka je roven 63 čtverečním jednotkám. Ten aproximuje (vznik první chyby) do počátečního čtverce vepsaný kruh o průměru 9 jednotek. Dále ještě při odhadu obsahu kruhu zaokrouhlíme ($63 \doteq 64$), čímž vzniká druhá chyba. Provedeme-li dopočtení příslušného přiblížení π, dostáváme

$$\pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \sim 8^2, \quad \text{neboli} \quad \pi \sim 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,1604\dots .$$

Exhaustivní metoda. Z matematického hlediska je pro nás nejzajímavější využití tzv. *exhaustivní metody*, které nacházíme v souvislosti s určením hodnoty π u ARCHIMEDA (287 - 212 před n.l.); viz [Ed]. Již dříve tuto metodu využíval EUKLEIDES (365 – asi 300 před n.l.). Ve svých *Základech* např. ukázal, že obsahy kruhů jsou ve stejném poměru jako čtverce jejich průměrů. Hodnotu tohoto poměru se však nikdy nepokusil numericky určit. Souvisí to s chápáním těchto poměrů, neboť dle soudobých představ nešlo o *čísla*. Soustřeďme se však na otázku, co nacházíme u Archimeda nového.

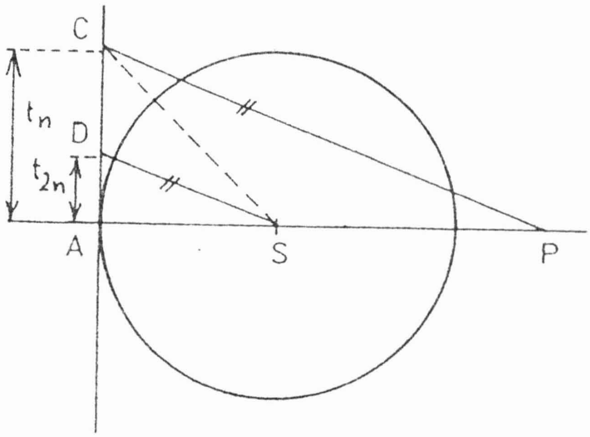
V Archimedově práci *Měření kruhu* je patrně poprvé striktně dokázáno, že platí-li pro obsah a obvod kruhu

$$P = \pi_1 r^2 \quad \text{a} \quad O = \pi_2 d \ ,$$

pak $\pi_1 = \pi_2$. Poprvé je zde popsána vzájemná souvislost „obou π". Archimedes dále určuje délku kružnice a tak nachází aproximaci π: používá přiblížení kružnice opsanými a vepsanými pravidelnými n-úhelníky. Podstatné je, že se vyrovnal s možností prakticky libovolně zlepšovat odhad π shora a zdola (někdy se o jeho

[3]Proto se někdy užívá některého ze zmíněných jmen k označení tohoto pramene.

metodě mluví jako o *metodě komprese*). Popišme postup podrobněji: mějme (jednotkovou) kružnici, které je opsán a vepsán pravidelný n-úhelník.



Obr. 2.

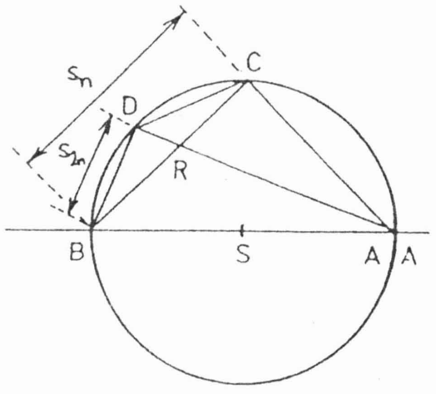
Označíme-li t_n délku *poloviny strany* pravidelného opsaného n-úhelníka, pak při zdvojnásobení počtu stran dospějeme jednoduchými geometrickými úvahami ke vzorečku pro vztah t_n a t_{2n} (sledujte Obr. 2):

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}}. \tag{1}$$

Na obrázku lze sledovat úvahu pro již zmíněnou jednotkovou kružnici. Označme S střed kružnice a A bod dotyku stran opsaného n- a $2n$-úhelníka. Jejich koncové body jsou označeny D a C. Sestrojme bod P na přímce SA tak, aby úsečka DS byla rovnoběžná s úsečkou CP. Pak je trojúhelník SPC rovnoramenný (uvědomte si, že polopřímka SD půlí $\measuredangle ASC$; dále pro velikosti úhlů platí $\measuredangle SPC + \measuredangle SCP = \measuredangle ASC$ a $\measuredangle SCP = \measuredangle DSC$, tedy úhly při P a C v trojúhelníku SCP jsou si rovny) a platí

$$\frac{AD}{AS} = \frac{AC}{AS + SP} = \frac{AC}{AS + SC},$$

z čehož plyne vzorec (1).



Obr. 3.

Pro vepsané n-úhelníky podobně dostáváme pro *délky stran* $s_n = BC$ a $s_{2n} = BD$ (sledujte Obr. 3) s ohledem na podobnost trojúhelníků ABD, BPD a APC

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{BD} \quad \text{a} \quad \frac{AC}{AD} = \frac{PC}{BD},$$

z čehož plyne

$$\frac{AB + AC}{AD} = \frac{BP + PC}{BD} = \frac{BC}{BD},$$

neboli

$$\frac{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}{\sqrt{4 - s_{2n}^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}}, \qquad \text{a po úpravě} \qquad s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}} .$$

Je tedy pro každé n

$$\sqrt{\frac{s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} < \frac{\pi}{n} < \frac{2t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}} .$$

Archimedes znal aproximaci pro $\sqrt{3}$

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

a tak mohl s poměrně dobrou přesností začít od šestiúhelníků; po obdivuhodném výpočtu dostal použitím velmi pečlivého zaokrouhlování horního i dolního odhadu

$$\frac{223}{71} < \frac{25344}{8069} < \pi < \frac{29376}{9347} < \frac{22}{7},$$

neboli (v poněkud přehlednějším tvaru)

$$3,140845\ldots < 3,140909\ldots < \pi < 3,142826\ldots < 3,142857\ldots .$$

Zdá se však, že se Archimedes dostal ještě blíže: jeden z jeho následovníků, Heron Alexandrijský (1. stol. n.l.), to uvádí ve spise *Metrica* z doby asi kolem roku 60 (tento spis se však podařilo objevit teprve v r. 1896). Tam se píše, že Archimedes dospěl k dolnímu odhadu $211875 : 67441 < \pi$, neboli $3,141634\cdots < \pi$.

Tento báječný výkon, k němuž sahají počátky teorie integrace, zůstal po mnoho století ideově nepřekonán (uvědomte si, že nebyly k dispozici počítače, a že záznam při provádění výpočtů bez pozičního zápisu v dekadické soustavě byl značně náročný). Po dlouhou dobu Archimedovi následníci prostě pouze zvyšovali počty stran aproximujících opsaných a vepsaných mnohoúhelníků a trpělivě počítali jeho metodou další a další platné cifry π.

Claudius Ptolemaios (? – asi 170), astronom pracující v letech 139 – 161 v Alexandrii, používal při svých výpočtech hodnoty $\pi \sim 3 + (17/120) = 3.14167$, která byla převzata patrně od Apolonia z Pergy (asi 260 – 170 před n.l.).

Matematik Leonardo Pisánský známější jako Fibonacci (asi 1180 – 1250) zpřesnil Archimedův výpočet pro 96-ti úhelník (užíval již dekadického zápisu) a přestože se dopouštěl nepřesností, dospěl k odhadům, jejichž průměrná hodnota dává pro číslo $\pi \sim (864/275) = 3,141818$.

Pomineme podrobnější výklad o dalších méně významných vývojových milnících: Gerbert, pozdější papež Sylvestr II (940 – 1003), užíval „archimedovskou hodnotu" (22/7). Ani na konci 14. stol. nedosáhl Albert von Sachsen větší přesnosti. Dominicus Parisiensis se v práci z r. 1346 odlišil od ostatních pouze tím, že věděl, že jde o *aproximaci* π a ne o přesnou hodnotu (to nebylo tehdy zdaleka tak samozřejmé!). Také AL-KASHI (? – asi 1430), astronom pracující v Samarkandu, spočetl r. 1429 klasickým postupem hodnotu π na šestnáct desetinných míst. GEORG PEURBACH (1423 – 1461) nepokročil dále, znal však alespoň docela dobře historické prameny; tato konstatování ukazují jen určitý soumrak poznání, neboť zmíněné práce nepřinesly prakticky nic zajímavého.

Také již letmě připomenutý LUDOLPH VAN CEULEN (1539 – 1620) postupoval stejnou metodou jako Archimedes. Určil hodnotu π na 35 desetinných míst tak, že použil 2^{62}-úhelník; věnoval těmto výpočtům podstatnou část života a měl prý výslednou hodnotu vyrytu i na náhrobku v Leydenu. Náhrobek se však nezachoval a tak je tento fakt popisován v různých pramenech odlišně (viz [Ev], str. 85 a násl.).

Přibližme si pomocí počítače (bylo použito programu *Mathematica*) výsledky výpočtů: představu o růstu přesnosti výpočtů nám umožní následující tabulka (počítáme od začátku s přesností na 30 desetinných míst, což přirozeně vede k růstu chyby; číslo n udává počet stran užitých n-úhelníků; místo, až kam se π shoduje s odhadem, je pak vždy vyznačeno pomocí symbolu |):

6	3 | ,00000000000	3 | ,46410161513
12	3,1 | 0582854123	3 | ,21539030917
24	3,1 | 3262861328	3,1 | 5965994209
48	3,1 | 3935020304	3,14 | 608621513
96	3,141 | 03195089	3,14 | 271459964
192	3,141 | 45247228	3,141 | 87304997
384	3,1415 | 5760791	3,141 | 66274705
768	3,1415 | 8389214	3,141 | 61017660
1536	3,14159 | 046322	3,14159 | 703432
3072	3,141592 | 10599	3,14159 | 374877
6144	3,141592 | 51669	3,141592 | 92738
12288	3,1415926 | 1936	3,141592 | 72203
24576	3,1415926 | 4503	3,1415926 | 7070
49152	3,14159265 | 145	3,14159265 | 786
98304	3,141592653 | 05	3,14159265 | 465
196608	3,141592653 | 45	3,141592653 | 85

393216	3,1415926535|5	3,141592653|65
786432	3,14159265358|	3,141592653|60
1572864	3,14159265358|	3,1415926535|9
3145728	3,14159265358|	3,1415926535|9
6291456	3,14159265358|	3,1415926535|9

Tab. 1:

Nové myšlenky. Podstatným teoretickým přínosem k řešení problému byl výsledek, ke kterému dospěl až FRANÇOIS VIÈTE (1540 – 1603). Postupoval podobně jako Archimedes, začal však se čtvercem. Při zdvojnásobování počtu stran vepsaného (pravidelného) n-úhelníka se vnitřní úhel příslušný jedné straně půlí a tak snadno dospíváme ke vzorečku pro aproximaci obsahu kruhu o poloměru r pomocí obsahů vepsaných n-úhelníků

$$A(n) = n \cdot (1/2) r^2 \sin 2\beta .$$

Z něho lze obdržet $A(n)/A(2n) = \cos\beta$ a dále

$$\frac{A(n)}{A(4n)} = \cos\beta \cdot \cos(\beta/2),$$

až postupně nakonec dostaneme

$$A(n) = A(2^k n) \cdot \cos\beta \cdot \cos(\beta/2) \cdots \cos(\beta/2^k) \ .$$

Odtud obdržíme po úpravách

$$\pi = \frac{(1/2) n \sin 2\beta}{\cos\beta \cdot \cos(\beta/2) \cdots \cos(\beta/2^k)} \ .$$

Při $n = 4$, $\beta = 45°$ je $\cos\beta = \sin\beta = (\sqrt{2}/2)$. Úpravami dále dostaneme

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \cdots \ .$$

Již teď je vhodné říci, že tato posloupnost (její zápis neformalizujeme, je takto přehlednější) konverguje relativně „rychle“, ale zachází se s ní (nepoužíváme-li ovšem počítač) dosti složitě. Nacházíme ji ve Viètově práci z r. 1593.

Ačkoliv byl Viète stále silně ovlivněn Archimedem, byl prvním, kdo vyjádřil π analytickým výrazem. Naskýtá se zde samozřejmě problém konvergence příslušného nekonečného součinu; tato konvergence byla dokázána teprve r. 1891. Pro praktický výpočet Viète užil přímo Archimedovu metodu (dospěl k 393 216-ti úhelníku šestnáctinásobným zdvojováním počtu stran, přičemž vyšel od šestiúhelníka, nikoli od čtverce). Dostal tak odhad

$$3,1415926535 < \pi < 3,1415926537\,.$$

Na konci 16. stol. bylo π známo na 30 desetinných míst (na konci 18. stol. stoupl tento počet na 140 a na konci 19. stol. na 707 míst; viz opět např. [Ev], resp. [Sc]).

Dokončení v příštím čísle

⋆ ⋆ ⋆

Kvadratura polárního kruhu

Pravil jeden lední medvěd
svému druhu,
že chce provést kvadraturu
polárního kruhu.
Druhý praví: Já tím ale
vůbec nadšen nejsem,
neboť potom budeme žít
za polárním čtvercem!