František Kuřina

Elegantní důkaz jedné krásné věty

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 2, 18–20

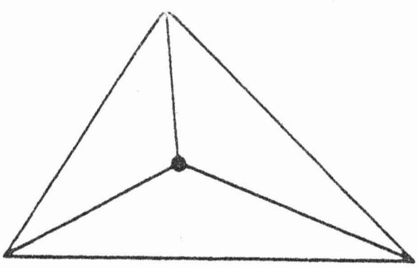
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152796

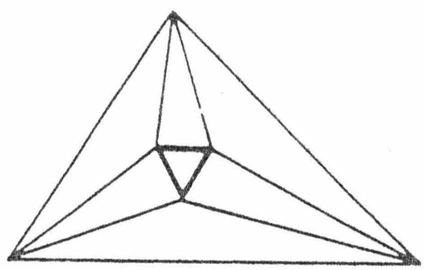
ELEGANTNÍ DŮKAZ JEDNÉ KRÁSNÉ VĚTY

František Kuřina

Osy úhlů v trojúhelníku procházejí jedním bodem. Jednoduché tvrzení, s nímž se seznamují již žáci na základní škole. Tato věta i její důkaz je svým způsobem krásná: vyjadřuje jistou harmonii prostých geometrických souvislostí.

Jak to bude s průsečíky polopřímek, které dělí vnitřní úhly libovolného trojúhelníku na tři shodné části? Výsledek, který můžete objevit rýsováním, je překvapující: tyto průsečíky jsou pro libovolný trojúhelník vrcholy rovnostranného trojúhelníku.





Připomeňme, že „trisekci úhlů" je přitom třeba provádět přibližně např. pomocí úhloměru. Pro „velké" pravoúhlé trojúhelníky s úhly 30° a 60° je to pěkné cvičení na rýsování na základní škole.

Když jsem se poprvé seznámil s uvedenou větou o trisekci úhlů trojúhelníku, snažil jsem se ji dokázat. Nepodařilo se mi to. Příležitostně jsem našel v literatuře několik jejích důkazů, žádný mne však nezaujal: byly příliš těžkopádné vzhledem k eleganci výsledného tvrzení. Teprve nedávno jsem v knize známého kanadského geometra *H.S.M. Coxetera* **Introduction to Geometry** (New York, 1961) našel opravdu elegantní důkaz této krásné věty. Rád bych ho našim čtenářům přiblížil.

Dnes se věta, o niž nám jde, nazývá **Morleyova** věta a můžeme ji formulovat takto: *Průsečíky polopřímek, které po řadě vycházejí*

Prof. RNDr. František Kuřina (1932), absolvent Matematicko fyzikální fakulty UK v Praze (matematika - deskriptivní geometrie), pracuje na katedře matematiky VŠP v Hradci Králové.

ze sousedních vrcholů libovolného trojúhelníku a dělí jeho vnitřní úhly na třetiny, jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

Traduje se, že v roce 1899 rozeslal anglický matematik *F. Morley* po světě tuto domněnku se snahou podnítit nalezení jejího důkazu. Jeho úsilí bylo korunováno úspěchem; od té doby byla věta dokázána různými způsoby.

Coxeter postupuje při jejím důkazu „od konce": k rovnostrannému trojúhelníku konstruuje trojúhelník, který má požadované vlastnosti a je podobný danému trojúhelníku.

Důkaz Morleyovy věty.

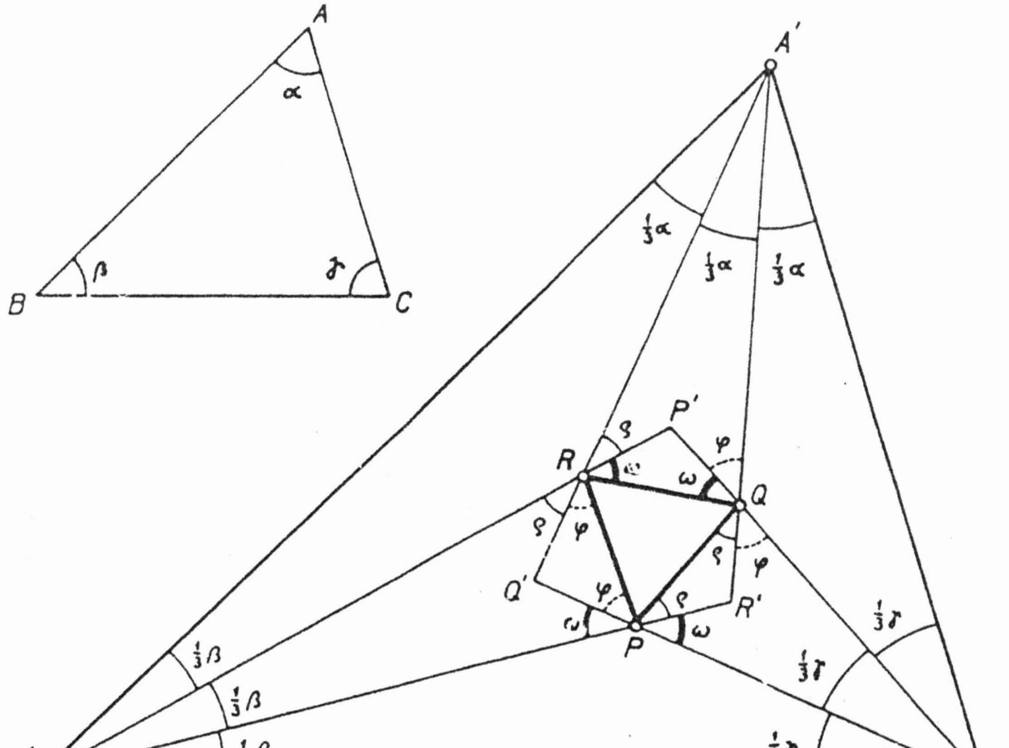
ABC je libovolný trojúhelník s vnitřními úhly velikostí α, β, γ. Sestrojme úhly

$\omega = 60° - \frac{\alpha}{3}$, $\varphi = 60° - \frac{\beta}{3}$, $\zeta = 60° - \frac{\gamma}{3}$,

pro něž zřejmě platí

$\omega < 60°$, $\varphi < 60°$, $\zeta < 60°$, $\varphi + \omega + \zeta = 120°$.

K libovolnému rovnostrannému trojúhelníku PQR sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC tak, že polopřímky dělící vnitřní úhly trojúhelníku $A'B'C'$ na třetiny, se protínají ve vrcholech trojúhelníku PQR.



Nad stranami trojúhelníku PQR sestrojíme podle obrázku rovnoramenné trojúhelníky RQP', PRQ', PQR', které mají u základen RQ, RP, PQ po řadě úhly velikostí ω, φ, ζ. Přímky RP' a PR' se protínají v bodě, který označíme B', průsečík přímek $Q'P$ a $P'Q$ označme C', přímky $Q'R$ a $R'Q$ se protínají v bodě A'. Z konstrukce je zřejmé, že platí:

$$|\angle B'RQ'| = |\angle A'RP'| = \zeta,$$
$$|\angle B'PQ'| = |\angle C'PR'| = \omega,$$
$$|\angle A'QP'| = |\angle C'QR'| = \varphi.$$

To ovšem znamená, že platí:

$|\angle PC'Q| = \frac{1}{3}\gamma$, neboť $|\angle PC'Q| = 180° - (\zeta + \varphi + \omega) - \zeta = 60° - \zeta$, a podobně

$$|\angle PB'R| = \tfrac{1}{3}\beta, \qquad |\angle RA'Q| = \tfrac{1}{3}\alpha.$$

Protože $P'P$ je osa úhlu $B'P'C'$ a

$$|\angle B'PC'| = 180° - \omega = 90° + \tfrac{1}{2}|\angle B'P'C'|,$$

je bod P středem kružnice vepsané trojúhelníku $B'C'P$. Důkaz tohoto dílčího tvrzení přenechávám čtenáři. PC' je tedy osa úhlu $P'C'B$. Ze stejných důvodů je Q středem kružnice vepsané trojúhelníku $A'C'Q'$ a R je středem kružnice vepsané trojúhelníku $A'R'B'$.

Polopřímky $C'P, C'Q$; $A'Q, A'R$; $B'R, B'P$ dělí tedy vnitřní úhly trojúhelníku $A'B'C'$ na třetiny.

Protože podobnost, která převádí trojúhelník $A'B'C'$ do trojúhelníku ABC zachovává velikosti odpovídajících úhlů, protínají se polopřímky, které dělí vnitřní úhly trojúhelníku ABC na třetiny, ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku.

Morleyova věta je ukázkou zajímavé geometrické vlastnosti. Můžeme na ní dokumentovat nejen krásu, ale i jistou bizarnost části geometrie 19. století. Shodou okolností v témže roce, kdy byla zveřejněna Morleyova hypotéza, publikuje David Hilbert dílo Grundlagen der Geometrie, které je základem nového pohledu na geometrii jako abstraktní disciplínu, v níž geometrické pojmy nemusí mít žádný konkrétní význam, ale jsou pouhými proměnnými v axiomatické konstrukci.