Učitel matematiky

Emil Calda

O "skoro stejném vzorci" pro počty kombinací a variací

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 1, 20–21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152777

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1995

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

O „SKORO STEJNÉM VZORCI" PRO POČTY KOMBINACÍ A VARIACÍ

EMIL CALDA, *MFF UK Praha*

O kombinačních číslech $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n+1}{k+1}$ je všeobecně známo, že pro ně platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

což je možno zapsat ve tvaru

$$K(k,n) + K(k+1,n) = K(k+1,n+1),$$

kde $K(k,n)$ značí počet k-členných kombinací z n prvků. Tento vztah se ve škole dokazuje algebraicky užitím definice kombinačního čísla, i když jeho odvození kombinatorickou úvahou by bylo vhodnější. V následujících řádcích ukážeme, že aplikací této úvahy na počty variací dojdeme ke vztahu „skoro stejnému", který se od vzorce pro počty kombinací liší pouze koeficentem u prvního členu:

$$(k+1)V(k,n) + V(k+1,n) = V(k+1,n+1);$$

$V(k,n)$ přitom znamená počet k-členných variací z n prvků.

Připomeňme si tedy nejprve kombinatorické odvození výše uvedeného vztahu pro počty kombinací. Všechny $(k+1)$-členné kombinace z $n+1$ prvků $a_1, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$, jejichž počet je $K(k+1,n+1)$, rozložíme do dvou disjunktních tříd podle toho, zda obsahují či neobsahují prvek a_{n+1}. Počet $(k+1)$-členných kombinací, které neobsahují prvek a_{n+1}, je zřejmě roven počtu $(k+1)$-členných kombinací sestavených z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tj. číslu $K(k+1,n)$. Počet $(k+1)$-členných kombinací, které prvek a_{n+1} obsahují, dostaneme, když si uvědomíme, že každou takovou kombinaci je možno si představit jako k-člennou kombinaci z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž počet je $K(k,n)$, doplněnou o prvek a_{n+1}; nezáleží přitom na tom, zda prvek a_{n+1}, kterým k-tici vybranou z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ doplňujeme, umístíme na „začátek" nebo na „konec" této k-tice, či mezi její libovolné dva členy, neboť u kombinací na pořadí prvků ve skupině nezáleží. Platí tedy vskutku

$$K(k,n) + K(k+1,n) = K(k+1,n+1).$$

V případě variací postupujeme stejným způsobem, dojdeme však k výsledku mírně odlišnému. Zatímco počet $(k+1)$-členných variací z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, které neobsahují prvek a_{n+1}, je dán číslem $V(k+1,n)$, podobně jako u kombinací číslem $K(k+1,n)$, je počet $(k+1)$-členných variací, které prvek a_{n+1} obsahují, nikoli $V(k,n)$, ale $(k+1)V(k,n)$. U variací totiž záleží na pořadí prvků ve skupině, takže pro doplnění prvku $a_{n=1}$ máme $k+1$ možností: prvek a_{n+1} můžeme dát na „začátek" nebo na „konec" nebo do libovolné z $k-1$ mezer mezi dvěma sousedními prvky. Počet $(k+1)$-členných variací z prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, které obsahují prvek a_{n+1}, je tedy $(k+1)V(k,n)$. Dostáváme tak, že platí

$$(k+1)V(k,n) + V(k+1,n) = V(k+1,n+1).$$

Odvození a porovnání těchto výsledků pro počty $(k+1)$-členných kombinací a variací z $n+1$ prvků může nejen zpestřit probíranou látku, ale může pomoci žákům k jejímu lepšímu pochopení a porozumění.