Vlastimil Dlab

Poznámky o kombinačních číslech, posloupnostech (především aritmetických) a polynomech

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 4, 37–55

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152708`

Poznámky o kombinačních číslech, posloupnostech (především aritmetických) a polynomech

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Věnováno památce mého učitele profesora Tomáše Augustina

1. Úvod

Je tomu už více než 70 let, co mě, zásluhou mého vynikajícího učitele pana profesora Tomáše Augustina, uchvátil zájem o strukturu kombinačních čísel (viz [2]). Dnes se k tomuto tématu vracím, abych poukázal na velmi blízký vztah mezi třemi matematickými objekty: kombinačními čísly $\binom{n}{k}$, posloupnostmi $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$, především aritmetickými, a polynomy $P(x)$, přičemž se omezíme na jejich hodnoty $P(k)$ pro přirozená čísla $k = 1, 2, \ldots$. členy posloupností a koeficienty polynomů mohou být libovolná čísla. V tomto článku prezentujeme celý výklad pro případ, kdy jsou tato čísla racionální. Ve vývoji matematiky hrají velmi důležitou roli posloupnosti celých čísel. Záhy však uvidíme, že se v našem pojednání na celá čísla omezit nemůžeme.

Souvislosti mezi těmito objekty ilustrují v elementární míře podstatu matematiky zdůrazňovanou všemi významnými matematiky. V nedávné době to byli především Michael Francis Atiyah a Israel Moiseevich Gelfand, kteří tuto jednotu, celistvost matematiky termínem „Unity of Mathematics“ vyjadřovali. Vzpomínám, že moje diskuze s těmito matematiky vždy směřovaly k tomuto tématu. Zatímco Atiyah „jednotu“ vztahoval především na vzájemné vazby mezi matematikou a fyzikou, Gelfand viděl „celistvost“ v celém panoramatu matematiky.

Do hodin matematiky patří nové úlohy, pojmy a zajímavosti, které vzbudí pozornost a zájem žáků. A to je přesně to, co bychom měli ve svých příspěvcích přinášet. V dnešním článku přinášíme nové hříčky: Diferenční trojúhelník a jeho rozšíření na (nekonečný) diferenční čtverec. Ty slouží k tomu, abychom poukázali na těsné souvislosti mezi celočíselnými polynomy a aritmetickými posloupnostmi a tím přiblížili a vysvětlili Pólyovu větu ([12, 13]). Doufáme, že získané poznatky povedou k hlubšímu studiu, které ponecháme zvídavým čtenářům. Poznamenejme, že tento postup byl už naznačen v článku [9]. Rozsáhlejší článek naleznete na adrese uvedené v [2].

2. Ilustrace: Co se v článku dozvíme?

Nejprve se dohodněme, že číslem budeme v tomto článku rozumět číslo racionální. Podstatná část naší prezentace se bude týkat celých čísel, jejichž obor budeme v článku značit $\mathbb{Z}$. Obor racionálních čísel budeme značit písmenem $\mathbb{Q}$.[1)]

Připomeňme definici kombinačních čísel $\binom{n}{k}$ definovaných pro přirozená čísla $1 \leq k \leq n$ takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1},$$

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ pro libovolné } n \geq 0 \text{ a } \binom{n}{k} = 0 \text{ pro přirozená čísla } k > n \geq 0.$$

Tato definice si zasluhuje rozšíření, které budeme v naší stati používat. Kombinační symboly definují funkce Φ_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, racionální (nebo reálné či komplexní) proměnné x

$$\Phi_k(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k(k-1)\ldots 2.1}$$

a

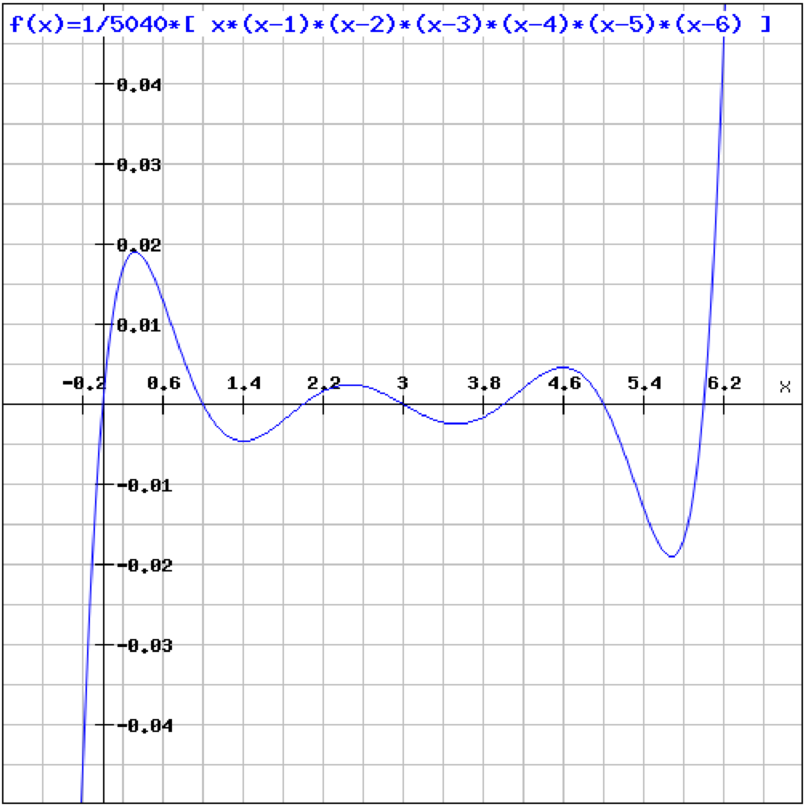
$$\Phi_0(x) = \binom{x}{0} = 1.$$

Uvidíme, že tyto funkce budou hrát zcela zásadní roli v popisu takzvaných celočíselných polynomů, tj. polynomů, jejichž hodnoty v přirozených číslech jsou celá čísla. Graf funkce $\Phi_7(x)$ na obr. 1 ilustruje chování těchto funkcí.

Uvažujme nyní polynom $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 7$ a s ním spojené schéma

$\mathbf{a_1} = P(1) = -11$	$\mathbf{a_2} = P(2) = -5$	$\mathbf{a_3} = P(3) = 17$	$\mathbf{a_4} = P(4) = 61$
$\mathbf{b_1} = a_2 - a_1 = 6$	$b_2 = a_3 - a_2 = 22$	$b_3 = a_4 - a_3 = 44$	
$\mathbf{c_1} = b_2 - b_1 = 16$	$c_2 = b_3 - b_2 = 22$		
$\mathbf{d_1} = c_2 - c_1 = 6$			

[1)] Podotkněme, že mnohé z našich výsledků platí pro libovolné prvky z oboru, v němž je možno sčítat, odčítat (tj. přičítat číslo opačné), násobit a dělit (tj. násobit číslem převráceným, inverzním), tedy např. čísla z libovolného číselného komutativního tělesa, jako je pole reálných či komplexních čísel.



Obr. 1: Graf funkce $\Phi_7(x)$

Nyní definujme polynom

$$Q(n) = a_1\binom{n-1}{0} + b_1\binom{n-1}{1} + c_1\binom{n-1}{2} + d_1\binom{n-1}{3} =$$
$$= a_1\Phi_0(n-1) + b_1\Phi_1(n-1) + c_1\Phi_2(n-1) + d_1\Phi_3(n-1).$$

$Q(n)$ je tedy

$$-11 + 6(n-1) + \frac{16}{2}(n-1)(n-2) + \frac{6}{6}(n-1)(n-2)(n-3) =$$
$$= n^3 + 2n^2 - 7n - 7.$$

Polynom $P(x)$ je zcela určen čtyřmi hodnotami (pro $x = 1, 2, 3, 4$)

$$-11,\ -5,\ 17,\ 61,$$

které jsou v jednoznačném vztahu s čtveřicí čísel

$$-11,\ 6,\ 16,\ 6.$$

Předchozí tabulku můžeme totiž doplnit na schéma

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
\mathbf{-11} & \mathbf{-5} & \mathbf{17} & \mathbf{61} & 133 & 239 & 385 & 577 & 821 & 1123 & \ldots \\
\mathbf{6} & \mathbf{22} & \mathbf{44} & 72 & 106 & 146 & 192 & 244 & 302 & \ldots & \\
\mathbf{16} & \mathbf{22} & 28 & 34 & 40 & 46 & 52 & 58 & \ldots & & \\
\mathbf{6} & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & \ldots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & & & &
\end{array} \tag{1}$$

kde

$$P(5) = 133, \quad P(6) = 239, \quad P(7) = 385,$$
$$P(8) = 577, \quad P(9) = 821, \quad \ldots$$

Samozřejmě, tento postup lze použít pro každý polynom tvaru

$$P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\colon$$

$$\begin{array}{cccc}
A+B+C+D & 8A+4B+2C+D & 27A+9B+3C+D & 64A+16B+4C+D \\
7A+3B+C & 19A+5B+C & 37A+7B+C & \\
12A+2B & 18A+2B & & \\
6A & & &
\end{array}$$

Odtud

$$\begin{gathered}
(A+B+C+D) + (7A+3B+C)(n-1) + \\
+ (6A+B)(n-1)(n-2) + A(n-1)(n-2)(n-3) = \\
= An^3 + Bn^2 + Cn + D = P(n).
\end{gathered}$$

Ve 4. sekci podáme důkaz pro polynomy libovolného stupně.

Uvědomme si, že jsme nalezli jednoduchou cestu, jak určit (jednoznačně) polynom stupně d na základě jeho hodnot pro $x = 1, 2, \dots, d$. Podejme příklad, který nám ukáže, že celočíselné hodnoty polynomu stupně d pro $x = 1, 2, \dots, d$ sice zaručují, že hodnoty ve všech celých číslech jsou celočíselné, ale nezaručují, že jeho koeficienty jsou celočíselné. Nebuďme překvapeni. Vždyť už polynom

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

který jsme prostě označili

$$\Phi_2(x) = \binom{x}{2},$$

má pro celočíselná x celočíselné hodnoty.

Zopakujme si postup: Hledáme kubický polynom $P(x)$, pro nějž

$$P(1) = 3, \quad P(2) = 2, \quad P(3) = 8, \quad P(4) = 5.$$

Zkonstruujeme příslušné schéma

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{8} & \mathbf{5} & -23 & -92 & -218 & -417 & \dots \\
\mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{-3} & -28 & -69 & -126 & -199 & \dots & \\
\mathbf{7} & \mathbf{-9} & -25 & -41 & -57 & -73 & \dots & & \\
\mathbf{-16} & -16 & -16 & -16 & -16 & \dots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & &
\end{array} \tag{2}$$

a dostáváme hledaný polynom

$$P(n) = 3\binom{n-1}{0} + (-1)\binom{n-1}{1} + 7\binom{n-1}{2} + (-16)\binom{n-1}{3} =$$
$$= 3 - n + 1 + \frac{7}{2}(n^2 - 3n + 2) + \left(-\frac{16}{6}\right)(n^3 - 6n^2 + 11n - 6),$$

tj.

$$P(n) = -\frac{8}{3}n^3 + \frac{39}{2}n^2 - \frac{245}{6}n + 27.$$

Tento polynom má pro všechna přirozená čísla n celočíselné hodnoty, které vytvářejí speciální posloupnost

$$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 8,\ a_4 = 5,\ a_5 = -23,\ a_6 = -92,\ a_7 = -218,$$
$$a_8 = -417,\ a_9 = -705,\ a_{10} = -1098,\ \ldots;$$

budeme ji nazývat aritmetickou posloupností třetího řádu. Schémata (1) a (2) budeme nazývat *diferenční trojúhelníky.*

V této sekci jsme poukázali na velmi těsný vztah mezi polynomy a posloupnostmi. Tento vztah je zprostředkován kombinačními čísly, využitím jejich vlastností. Vzhledem k rozsahu tohoto tématu se budeme roli kombinačních čísel a jejich významu věnovat v separátním článku. Zde se tedy zaměříme na posloupnosti celých čísel a na celočíselné polynomy, především na Pólyovu větu [12, 13] (viz hlavní věta ve 4. sekci). V našich úvahách budeme využívat Al-Karajiho (953–1029) rovnost

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}. \tag{3}$$

Připomeneme-li si, že číslo $\binom{n+1}{k}$ udává počet k-prvkových podmnožin $(n+1)$-prvkové množiny, rovnost (3) se stává zřejmou. Zvolíme-li totiž v M jeden prvek, který označíme m_*, podmnožiny, které mají k prvků jsou dvojího druhu: Ty, které obsahují prvek m_* (je jich $\binom{n}{k-1}$), a ty, které prvek m_* neobsahují, a těch je $\binom{n}{k}$. Tím dostáváme vzorec (3).

3. Metoda: Diferenční trojúhelník a diferenční čtverec.

Zcela zásadní pro naši další práci je pojem diferenčního trojúhelníku $\mathbb{T}_{ij\ n}$ a (jeho nekonečného rozšíření) diferenčního čtverce $\mathbb{S}_{ij}$. Uveďme jejich definice.

Definice. Soubor celých čísel $a_{r\ s} \in \mathbb{Z}$, která jsou přiřazena množině všech mřížových bodů roviny tvořící trojúhelník $\mathbb{T}_{ij\ n}$ (viz obr. 2), a která splňují pro všechna $r, s \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$a_{r\ s+1} = a_{r\ s} + a_{r+1\ s} \tag{4}$$

pro všechna $i \le r < i+n$, $j \le s < j+n$, budeme nazývat *diferenční trojúhelník.*[2)]

[2)] Připomeňme si opět, že diferenční schéma lze definovat (a je užitečné) v případě, kdy a_{ij} jsou prvky jakýchkoli číselných oborů.

$$\mathbb{T}_{ij\;n} \;=\; \begin{array}{llllll} \mathbf{a_{i\;j}} & \mathbf{a_{i\;j+1}} & \mathbf{a_{i\;j+2}} & \cdots\ \mathbf{a_{i\;j+n-3}} & \mathbf{a_{i\;j+n-2}} & \mathbf{a_{i\;j+n-1}} \\ \mathbf{a_{i+1\;j}} & a_{i+1\;j+1} & a_{i+1\;j+2} & \cdots\, a_{i+1\;j+n-3} & a_{i+1\;j+n-2} & \\ \mathbf{a_{i+2\;j}} & a_{i+2\;j+1} & a_{i+2\;j+2} & \cdots\, a_{i+2\;j+n-3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \mathbf{a_{i+n-3\;j}} & a_{i+n-3\;j+1} & a_{i+n-3\;j+2} & & & \\ \mathbf{a_{i+n-2\;j}} & a_{i+n-2\;j+1} & & & & \\ \mathbf{a_{i+n-1\;j}} & & & & & \end{array}$$

Obr. 2. Diferenční trojúhelník $\mathbb{T}_{ij\;n}$

Ihned vidíme, že řádek (tj. posloupnost)

$$\mathbf{r}_{i\;j}^{(n)} \;=\; (a_{i\;j}, a_{i\;j+1}, \ldots, a_{i\;j+n-1})$$

stejně jako sloupec

$$\mathbf{s}_{i\;j}^{(n)} \;=\; (a_{i\;j}, a_{i+1\;j}, \ldots, a_{i+n-1\;j})$$

určují jednoznačně celý diferenční trojúhelník $\mathbb{T}_{ij\;n}$. Tyto dvě posloupnosti jsou spolu těsně svázány. Jejich vztah bude s využitím kombinačních čísel popsán v tvrzení 1.

Rozšířením n-tic $\mathbf{r}_{i\;j}^{(n)}$ a $\mathbf{s}_{i\;j}^{(n)}$ na nekonečné posloupnosti obdržíme nekonečné rozšíření trojúhelníku $\mathbb{T}_{ij\;n}$ na $\mathbb{T}_{ij\;\infty}$, které se stává nekonečným *diferenčním čtvercem* $\mathbb{S}_{ij}$. Zdůrazněme, že vztahy (4) zůstanou zachovány. Obr. 3 představuje diferenční čtverec $\mathbb{S}_{11}$.

$$
\mathbb{S}_{11} \;=\; \begin{array}{cccccccc}
\mathbf{a_{1\,1}} & \mathbf{a_{1\,2}} & \mathbf{a_{1\,3}} & \cdots & \mathbf{a_{1\,n-1}} & \mathbf{a_{1\,n}} & \mathbf{a_{1\,n+1}} & \cdots \\
\mathbf{a_{2\,1}} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} & a_{2\,n+1} & \cdots \\
\mathbf{a_{3\,1}} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} & a_{3\,n+1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\mathbf{a_{n-1\,1}} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} & a_{n-1\,n+1} & \cdots \\
\mathbf{a_{n\,1}} & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} & a_{n\,n+1} & \cdots \\
\mathbf{a_{n+1\,1}} & a_{n+1\,2} & a_{n+1\,3} & \cdots & a_{n+1\,n-1} & a_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\;\vdots & & \ddots
\end{array}
$$

Obr. 3. Diferenční čtverec $\mathbb{S}_{11}$

Budeme pracovat především s trojúhelníky $\mathbb{T}_{11\,n}$. Každé tvrzení týkající se diferenčního trojúhelníku $\mathbb{T}_{11\,n}$ lze přepsat do tvrzení týkajícího se libovolného diferenčního trojúhelníku $\mathbb{T}_{i\,j\,n}$. Toho využijeme v důkaze tvrzení 1.

Formulujme toto slibované tvrzení.

Tvrzení 1. *V diferenčním trojúhelníku $\mathbb{T}_{11\,n}$ platí*[3)]

$$a_{1\,n} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n-1}{t-1} a_{t\,1} \tag{5}$$

a

$$a_{n\,1} = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{n-t} \binom{n-1}{t-1} a_{1\,t}. \tag{6}$$

Důkaz těchto vztahů je překvapivě jednoduchý (užitím matematické indukce a opakovaně rovnosti (3)).

Vidíme ihned, že platí pro $n = 1$ (a $n = 2$). Předpokládejme, že vzorce platí pro n a prezentujme indukční krok, tj. platnost těchto vzorců pro $n+1$. Naše úvahy se týkají diferenčních trojúhelníků $\mathbb{T}_{11\,n+1}$, $\mathbb{T}_{11\,n}$, $\mathbb{T}_{21\,n}$ a $\mathbb{T}_{12\,n+1}$ vyobrazených na následujícím obr. 4.

[3)] Výraz (5) ve tvaru $a_{1\,k} = \sum_{t=1}^{k} \binom{k-1}{t-1} a_{t\,1}$ platí pro všechna přirozená čísla $1 \leq$ $\leq k \leq n$.

$$\begin{array}{c} \mathbb{T}_{11\ n+1} \ \& \ \mathbb{T}_{11\ n} \\ \mathbb{T}_{21\ n} \ \& \ \mathbb{T}_{12\ n+1} \end{array} = \begin{array}{c|cccccc}
\mathbf{a_{1\ 1}} & \mathbf{a_{1\ 2}} & \mathbf{a_{1\ 3}} & \cdots & \mathbf{a_{1\ n-1}} & \mathbf{a_{1\ n}} & \mathbf{a_{1\ n+1}} \\ \hline
\mathbf{a_{2\ 1}} & a_{2\ 2} & \cdots & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{2\ n} & \\
\mathbf{a_{3\ 1}} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3\ n-1} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & & \\
\mathbf{a_{n-1\ 1}} & a_{n-1\ 2} & a_{n-1\ 3} & & & & \\
\mathbf{a_{n\ 1}} & a_{n\ 2} & & & & & \\
\mathbf{a_{n+1\ 1}} & & & & & &
\end{array}$$

Obr. 4. Diferenční trojúhelníky $\mathbb{T}_{11\ n+1}$, $\mathbb{T}_{11\ n}$, $\mathbb{T}_{21\ n}$ a $\mathbb{T}_{12\ n+1}$

Předpokládáme tedy pro n platnost vzorců (5) a

$$a_{2\ n} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n-1}{t-1} a_{t+1\ 1} = \sum_{t=2}^{n+1} \binom{n-1}{t-2} a_{t\ 1}. \tag{7}$$

Potom, užitím (5) a (7),

$$a_{1\ n+1} = a_{1\,n} + a_{2\,n} =$$

$$= \binom{n-1}{0} a_{1\ 1} + \sum_{t=2}^{n} \left[\binom{n-1}{t-2} + \binom{n-1}{t-1} \right] a_{t\ 1} + \binom{n-1}{n-1} a_{n+1\ 1} =$$

$$= \binom{n}{0} a_{1\ 1} + \sum_{t=2}^{n} \binom{n}{t-1} a_{t\ 1} + \binom{n}{n} a_{n+1\ 1} = \sum_{t=1}^{n+1} \binom{n}{t-1} a_{t\ 1}.$$

Zcela stejným postupem lze dokázat vzorec (6). Předpokládáme pro n platnost vzorců (6) a

$$a_{n\ 2} = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{n-t} \binom{n-1}{t-1} a_{1\ t+1} = \sum_{t=2}^{n+1} (-1)^{n+1-t} \binom{n-1}{t-2} a_{1\ t}. \tag{8}$$

Užitím (6) a (8) dostáváme

$$a_{n+1\ 1} = a_{n\ 2} - a_{n\ 1} = (-1)^n \binom{n-1}{0} a_{1\ 1} +$$

$$+ \sum_{t=2}^{n} (-1)^{n+1-t} \left[\binom{n-1}{t-2} + \binom{n-1}{t-1} \right] a_{1\ t} + \binom{n-1}{n-1} a_{1\ n+1} =$$

$$= (-1)^n \binom{n}{0} a_{1\ 1} + \sum_{t=2}^{n} (-1)^{n+1-t} \binom{n}{t-1} a_{1\ t} + \binom{n}{n} a_{1\ n+1} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n+1} (-1)^{n+1-t} \binom{n}{t-1} a_{1\ t}.$$

Tím je důkaz proveden.

Zopakujme znovu: Každá posloupnost $\{a_n = a_{1n} \mid n \geq 1\}$ definuje diferenční čtverec $\mathbb{S}_{11}$ a platí

$$a_n = \sum_{t=1}^{n} a_{t1} \binom{n-1}{t-1}.$$

Tak například pro Fibonacciho posloupnost ($a_{11} = F_1 = 1$, $a_{12} = F_2 = 1$, $a_{13} = F_3 = 2, \ldots, a_{1n} = F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ldots$) platí ($a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = F_1 = 1$, $a_{41} = -F_2 = -1, \ldots, a_{n1} = (-1)^n F_{n-2}, \ldots$), jak ukazuje diferenční čtverec této posloupnosti

$$\begin{array}{cccccccccc}
F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & \cdots & F_n & \cdots \\
0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & \cdots & F_{n-1} & \cdots \\
F_1 & 0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & \cdots & F_{n-2} & \cdots \\
-F_2 & F_1 & 0 & F_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_{n-3} & \cdots \\
F_3 & -F_2 & F_1 & 0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{n-4} & \cdots \\
-F_4 & F_3 & -F_2 & F_1 & 0 & F_1 & \cdots & F_{n-5} & \cdots \\
F_5 & -F_4 & F_3 & -F_2 & F_1 & 0 & \cdots & F_{n-6} & \cdots \\
-F_6 & F_5 & -F_4 & F_3 & -F_2 & F_1 & \cdots & F_{n-7} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Pro F_n, $n \geq 3$ tedy dostáváme

$$F_n = 1 + \sum_{t=1}^{n-2} (-1)^{t+1} \binom{n-1}{t+1} F_t,$$

což přináší celou řadu vztahů mezi členy Fibonacciho posloupnosti. Například

$$F_8 = 1 + \binom{7}{2} F_1 - \binom{7}{3} F_2 + \binom{7}{4} F_3 - \binom{7}{5} F_4 + \binom{7}{6} F_5 - \binom{7}{7} F_6.$$

Ke každé posloupnosti

$$\mathbf{a} = (a_{1\,1}, a_{1\,2}, \ldots, a_{1\,n})$$

je přirozeným způsobem (často vyžadovanou aplikací) přiřazena posloupnost jejích částečných součtů:

$$\mathbf{s} = (s_{1\,1}, s_{1\,2}, \ldots, s_{1\,n}),$$

kde $s_{1\,k} = \sum_{t=1}^{k} a_{1\,t}$ pro $1 \leq k \leq n$.

Tyto částečné součty $s_{1\,n}$ popisuje následující tvrzení.

Tvrzení 2. *Pro součet $s_{1\,n} = \sum_{t=1}^{n} a_{1\,t}$ v diferenčním trojúhelníku $\mathbb{T}_{11\,n}$ platí rovnost*

$$s_{1\,n} = \sum_{t=1}^{n} \binom{n}{t} a_{t\,1}. \tag{9}$$

Důkaz je zprostředkován na obr. 5. Diferenční čtverec $\mathbb{S}_{11}$ z obr. 3 rozšíříme přidáním nultého řádku

$$\mathbf{r}_{01}^{(\infty)} = (0, s_{1\,1}, s_{1\,2}, \ldots, s_{1\,n}, \ldots)$$

na diferenční čtverec $\mathbb{S}_{0\,1}$. Užitím tvrzení 1 dostáváme v diferenčním trojúhelníku $\mathbb{T}_{01\,n+1}$

$$s_{1\,n} = a_{0\,n+1} = 0 + \binom{n}{1} a_{1\,1} + \binom{n}{2} a_{2\,1} + \cdots + \binom{n}{n} a_{n\,1},$$

což jsme chtěli dokázat.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{a_{0\,1}=0} & \mathbf{a_{0\,2}=s_{1\,1}} & \mathbf{a_{0\,3}=s_{1\,2}} & \cdots & \mathbf{a_{0\,n-1}=s_{1\,n-2}} & \mathbf{a_{0\,n}=s_{1\,n-1}} & \mathbf{a_{0\,n+1}=s_{1\,n}} & \cdots \\
a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} & a_{1\,n+1} & \cdots \\
\mathbf{a_{2\,1}} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} & a_{2\,n+1} & \cdots \\
\mathbf{a_{3\,1}} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} & a_{3\,n+1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\mathbf{a_{n-1\,1}} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} & a_{n-1\,n+1} & \cdots \\
\mathbf{a_{n\,1}} & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} & a_{n\,n+1} & \cdots \\
\mathbf{a_{n+1\,1}} & a_{n+1\,2} & a_{n+1\,3} & \cdots & a_{n+1\,n-1} & a_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Obr. 5. Diferenční čtverec $\mathbb{S}_{01}$, $s_{1\,n} = \sum_{t=1}^{n} a_{1\,t} = \sum_{t=1}^{n} a_{t\,1}\binom{n}{t}$

Zde by si měl každý s rovnostmi (5) a (9) pohrát. Tak např. pro posloupnost třetích mocnin přirozených čísel dostáváme (nekonečný) diferenční čtverec

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 & 343 & 512 & 729 & 1000 & \ldots \\
7 & 19 & 37 & 61 & 91 & 127 & 169 & 217 & 271 & 331 & \ldots \\
12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 & 66 & \ldots \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

a tedy

$$a_n = 1 + 7(n-1) + 6(n^2 - 3n + 2) + (n^3 - 6n^2 + 11n - 6) = n^3$$

a

$$s_n = n + \frac{7}{2}(n^2 - n) + 2(n^3 - 3n^2 + 2n) + \frac{1}{4}(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) =$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

4. Aritmetické posloupnosti vyšších řádů a celočíselné polynomy.

V této závěrečné sekci shrneme a použijeme získané výsledky, především tvrzení 1 a tvrzení 2, k formulaci vztahů mezi aritmetickými posloupnostmi a polynomy.

Každé posloupnosti čísel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_t, \dots)$ přiřaďme diferenční čtverec $\mathbb{S}_{1\,1}$, který budeme nazývat diferenčním čtvercem příslušné posloupnosti. Tedy $a_t = a_{1\,t}$ pro každé $t = 1, 2, \dots$. Budeme si nyní všímat případů, kdy ve vzniklém čtverci vznikne nulový řádek, tak jako v předchozím příkladu u posloupnosti třetích mocnin přirozených čísel. Vyznačme takové případy následující definicí.

Definice. Posloupnost $\mathbf{a} = (a_{1\,1}, a_{1\,2}, \dots, a_{1\,t}, \dots)$ se nazývá *aritmetickou posloupností vyššího řádu,* jestliže diferenční čtverec $\mathbb{S}_{11}$ obsahuje nulový řádek, tj. jestliže existuje m takové, že $a_{m\,t} = 0$ pro všechna $t \geq 1$. Nejmenší d takové, že $a_{d+2\,t} = 0$ pro všechna $t \geq 1$, nazveme *řádem* této aritmetické posloupnosti.

V této terminologii jsou aritmetické posloupnosti, jak je známe z elementární algebry, aritmetické posloupnosti řádu 1. Aritmetické posloupnosti, pro něž $a_t = c \neq 0$ pro všechna $t \geq 1$ jsou aritmetické posloupnosti řádu 0, zatímco posloupnost nul je aritmetickou posloupností řádu -1. Připomeňme, že pro každé $n = 1, 2, \dots$ je částečná posloupnost $\{b_t = a_{1\,n+t} \mid t \geq 1\}$ aritmetické posloupnosti $\mathbf{a}$ řádu d aritmetickou posloupností téhož řádu d.

Jak jsme viděli v předchozí sekci, Fibonacciho posloupnost aritmetickou posloupností není. Podobně, žádná geometrická posloupnost (a_1, $a_2 = a_1 q$, $a_2 = a_1 q^2, \dots, a_n = a_1 q^{n-1}, \dots$) s kvocientem $q \neq 1$ není aritmetickou posloupností. Na druhé straně, posloupnost $(a_n = n^d \mid n \geq 1)$ je aritmetickou posloupností řádu d pro libovolné přirozené číslo d.

Připomeňme rozšíření definice kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ pro libovolné číslo x, které vede na definici funkcí

$$\Phi_k(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1},\ k \in \mathbb{N}, \quad \Phi_0(x) = \binom{x}{0} = 1.$$

Proměnná x může být libovolné reálné či komplexní číslo.[4)] V tomto článku uvažujeme x reálné, ovšem hlavní výsledky se týkají celočíselných posloupností a polynomů, jejichž hodnoty jsou celá čísla.

Definice. Polynom, jehož hodnoty v celých číslech jsou celá čísla, budeme nazývat *celočíselným polynomem.*

Znovu připomeňme, že koeficienty celočíselného polynomu nemusí být celá čísla. To ukazují už polynomy Φ_k, jejichž vedoucí koeficient je $\frac{1}{k!}$.

Malá Fermatova věta tvrdí, že pro každé prvočíslo p a každé celé číslo c, je $c^p - c$ dělitelné prvočíslem p. To tedy znamená, že polynom

$$F_p(x) = \frac{1}{p}(x^p - x)$$

je celočíselným polynomem. Vhodný součin takových polynomů bude tedy celočíselný polynom, který bude obsahovat zcela libovolný (předem předepsaný) racionální koeficient.

Zcela základní je klasifikace celočíselných polynomů, kterou v roce 1915 publikoval George Pólya [12] a kterou formulujeme jako následující větu. Věta ukazuje, že celočíselné polynomy $\Phi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, tvoří bázi množiny všech celočíselných polynomů.

Hlavní věta. *Každý celočíselný polynom $P(x)$ stupně d lze jednoznačně vyjádřit jako celočíselnou lineární kombinaci polynomů $\Phi_k(x)$, tj. ve tvaru*

$$P(x) = a_{1\,0}\Phi_0(x) + a_{2\,0}\Phi_1(x) + \cdots + a_{d+1\,0}\Phi_d(x) = \sum_{t=0}^{d} a_{t+1\,0}\Phi_t(x).$$

Důkaz plyne ihned z tvrzení 1 aplikovaného na diferenčních trojúhelnících $\mathbb{T}_{10\,d+1}$ a $\mathbb{T}_{11\,d+1}$, které jsou určeny hodnotami $a_{1\,t} = P(t)$ pro $t = 0, 1, 2, \dots, d+1$.

---

4) Například $\binom{\pi}{2}$ je reálné číslo $\frac{\pi(\pi-1)}{2}$, tj. hodnota kvadratického polynomu $y = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8}$ v bodě $x = \pi$.

$$
\begin{array}{l}
\mathbb{T}_{10\;d+1} \\
\&\; \mathbb{T}_{11\;d+1} =
\end{array}
\begin{array}{c|ccccccc}
\mathbf{a_{1\,0}} & \mathbf{a_{1\,1}} & \mathbf{a_{1\,2}} & \cdots & \mathbf{a_{1\,d-2}} & \mathbf{a_{1\,d-1}} & \mathbf{a_{1\,d}} & \mathbf{a_{1\,d+1}} \\
\mathbf{a_{2\,0}} & a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,d-2} & a_{2\,d-1} & \mathbf{a_{2\,d}} & \\
\mathbf{a_{3\,0}} & a_{3\,1} & a_{3\,2} & \cdots & a_{3\,d-2} & \mathbf{a_{3\,d-1}} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & & & \\
\mathbf{a_{d-1\,0}} & a_{d-1\,1} & a_{d-1\,2} & & & & & \\
\mathbf{a_{d\,0}} & a_{d\,1} & \mathbf{a_{d\,2}} & & & & & \\
\mathbf{a_{d+1\,0}} & \mathbf{a_{d+1\,1}} & & & & & &
\end{array}
$$

Obr. 6. Diferenční trojúhelníky $\mathbb{T}_{10\;d+1}$ a $\mathbb{T}_{11\;d+1}$, kde $a_{1\,t} = P(t)$

Tvrzení 1 zaručuje vyjádření

$$P(x) = \sum_{t=0}^{d} a_{t+1\;1} \Phi_t(x-1), \tag{11}$$

odkud posunutím proměnné x dostáváme

$$P(x) = \sum_{t=0}^{d} a_{t+1\;0} \Phi_t(x). \tag{12}$$

Jednoznačnost tohoto vyjádření můžeme dokázat indukcí vzhledem ke stupni polynomu. Nejvyšší koeficient $\frac{a_{d+1\;0}}{d!}$ určuje jednoznačně člen $a_{d+1\;0}$. Stupeň polynomu

$$Q(x) = P(x) - a_{d+1\;0} \Phi_d(x) = \sum_{t=0}^{d-1} a_{t+1\;0} \Phi_t(x) \tag{13}$$

se snížil a tedy jeho vyjádření ve tvaru (12) je jednoznačné.

Můžeme ještě dodat, že absolutní člen polynomu $P(x)$ je ve vyjádření (12) triviálně $a_{1\,0}$, zatím co ve vyjádření (11) je roven $\sum_{t=0}^{d} (-1)^t a_{t+1\;1}$.

Definujeme-li $P_0(x) = P(x)$ a $P_t(x) = P_{t-1}(x+1) - P_{t-1}(x)$ pro $t = 1, 2, \ldots, d$, vidíme, že stupeň polynomu $P_t(x)$ je $d - t$ a jeho hodnoty tvoří v diferenčním trojúhelníku řádek $t + 1$.

Článek zakončíme ilustrací popsaných faktů užitím jednoduchého polynomu

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$

Tedy

$$P_0(x) = P(x), \quad P_1(x) = 3x^2 - 3x - 2, \quad P_2(x) = 6x, \quad P_3(x) = 6.$$

Obr. 7 popisuje diferenční čtverce $\mathbb{S}_{1\ -3}$, $\mathbb{S}_{1\ 0}$, $\mathbb{S}_{1\ 1}$ a $\mathbb{S}_{1\ 10}$.

$P(-3)$		$P(-1)$	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$		$P(4)$		$P(6)$		$P(8)$		$P(10)$
-53	-19	-3	1	-1	-3	1	17	51	109	197	321	487	701
34	16	4	-2	-2	4	16	34	58	88	124	166	214	268
-18	-12	-6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Obr. 7. Diferenční čtverce $\mathbb{S}_{1\ -3}, \mathbb{S}_{1\ 0}, \mathbb{S}_{1\ 1}$ a $\mathbb{S}_{1\ 10}$

Pomocí těchto čtverců dostáváme následující vyjádření polynomu $P(x)$:

$$P(x) = -53\binom{x+3}{0} + 34\binom{x+3}{1} - 18\binom{x+3}{2} + 6\binom{x+3}{3},$$

$$P(x) = \binom{x}{0} - 2\binom{x}{1} + 0\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3},$$

$$P(x) = -\binom{x-1}{0} - 2\binom{x-1}{1} + 6\binom{x-1}{2} + 6\binom{x-1}{3},$$

$$P(x) = 701\binom{x-10}{0} + 268\binom{x-10}{1} + 60\binom{x-10}{2} + 6\binom{x-10}{3}.$$

Obecně tedy (užitím diferenčního čtverce $\mathbb{S}_{1\,t}$) platí

$$P(x) = P_0(t)\binom{x-t}{0} + P_1(t)\binom{x-t}{1} + P_2(t)\binom{x-t}{2} + P_3(t)\binom{x-t}{3}.$$

Čtenáři doporučujeme, aby si zvolil celočíselný polynom a vyjádřil ho ve tvaru lineární celočíselné kombinace funkcí $\Phi_t(x)$, tj. užitím báze $\{\Phi_t(x) \mid t = 0, 1, 2, \dots\}$. Porovnejte své výpočty pro volbu polynomu $P(x) = x^5 - 3x^3 + x - 1$.

Diferenční trojúhelníky $\mathbb{T}_{10\,6}$ a $\mathbb{T}_{11\,6}$ jsou

$$\begin{array}{rrrrrrr}
-1 & -2 & 9 & 164 & 835 & 2754 & 7133 \\
-1 & 11 & 155 & 671 & 1919 & 4379 & \\
12 & 144 & 516 & 1248 & 2460 & & \\
132 & 372 & 732 & 1212 & & & \\
240 & 360 & 480 & & & & \\
120 & 120 & & & & &
\end{array}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
P(x) &= -\binom{x}{0} - \binom{x}{1} + 12\binom{x}{2} + 132\binom{x}{3} + 240\binom{x}{4} + 120\binom{x}{5} = \\
&= -2\binom{x-1}{0} + 11\binom{x-1}{1} + 144\binom{x-1}{2} + \\
&\quad + 372\binom{x-1}{3} + 360\binom{x-1}{4} + 120\binom{x-1}{5}.
\end{aligned}$$

Bohatství celočíselných polynomů naznačuje též jednoduchý fakt, který zaručuje, že libovolnou konečnou posloupnost n čísel lze rozšířit na aritmetickou posloupnost řádu $\leq n-1$ (viz [6]). Prostě rozšíříme diferenční trojúhelník $\mathbb{T}_{1\,1\,n}$ určený danou posloupností na diferenční čtverec tím, že v příslušném čtverci definujeme $a_{n\,1} = a_{n\,2} = \cdots = a_{n\,k} = \cdots$, čímž v prvním řádku získáme aritmetickou posloupnost řádu $\leq n-1$:

$$\mathbf{a} = (a_{1\,1}, a_{1\,2}, \dots, a_{1\,k}, \dots).$$

Tento fakt je v některých publikacích často nepochopen a v některých vysvětlen (viz [8] a [11]).

Ilustrace následující úlohy ukazuje, že řešení může být neočekávané: Prodlužte šestičlennou posloupnost $(1, 2, 3, 4, 5, -277)$ na aritmetickou posloupnost řádu pět. Nejprve zkonstruujme příslušný diferenční trojúhelník

$$\begin{array}{rrrrrr}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -277 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -282 & \mathbf{-1414} \\
0 & 0 & 0 & -283 & \mathbf{-1132} & \mathbf{-2830} \\
0 & 0 & -283 & \mathbf{-849} & \mathbf{-1698} & \mathbf{-2830} \\
0 & -283 & \mathbf{-566} & \mathbf{-849} & \mathbf{-1132} & \mathbf{-1415} \\
-283 & \mathbf{-283} & \mathbf{-283} & \mathbf{-283} & \mathbf{-283} & \mathbf{-283}
\end{array}$$

a odtud odvoďme celočíselný polynom

$$P(x) = \binom{x-1}{0} + \binom{x-1}{1} + (-283)\binom{x-1}{5} = x + (-283)\binom{x-1}{5} =$$

$$= -\frac{283}{120}x^5 + \frac{283}{8}x^4 - \frac{4811}{24}x^3 + \frac{4245}{8}x^2 - \frac{38711}{60}x + 283,$$

který splňuje

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 2, \quad P(3) = 3, \quad P(4) = 4, \quad P(5) = 5, \quad P(6) = -277$$

a definuje aritmetickou posloupnost pátého řádu.

Literatura

[1] Cahen, P.-J., Chabert, J.-L.: What you should know about integer-valued polynomials. *Amer. Math. Monthly*, roč. 123 (2015), č. 4, s. 311–3337.

[2] Dlab, V.: *Číslo kombinační klíčem k aritmetickým řadám vyšších stupňů*, `https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Prvni%20prace.pdf`, `https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Prvni%20prace%20(original).pdf`, `https://www.delta42.com/Vlastimil%20Dlab/Kombinace.Posloupnosti.pdf`.

[3] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, roč. 17 (2009), č. 3, s. 169–182.

[4] Dlab, V.: Arithmetic progressions of higher order. *Teaching Math. and Comp. Science*, roč. 28 (2011), s. 1–15, česká verze: *Aritmetické posloupnosti vyšších řádů*, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/literatura/aritm-posl.pdf`.

[5] Dlab, V.: Aritmetické a geometrické posloupnosti, mnohočleny. *Ani jeden matematický talent nazmar*, JČMF – UHK, Hradec Králové, 2013, s. 36–44.

[6] Dlab, V.: Aproximace geometrických posloupností. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 90 (2015), č. 4, s. 1–5.

[7] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* 2. vyd., ČVUT, Praha, 2022.

[8] Dlab, V., Martišek, D.: Jedinákova posloupnost. *Učitel matematiky*, roč. 31 (2023), č. 4, s. 225–231.

[9] Matematické oříšky: Hrátky s posloupnostmi celých čísel. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 97 (2022), č. 4, s. 32–35.

[10] Kuřina, F.: Chvála „biflování“. *Učitel matematiky*, roč. 18 (2010), č. 1, s. 49–52.

[11] Kuřina, F.: Jedinákova posloupnost. *Učitel matematiky*, roč. 29 (2021), s. 95–98.

[12] Pólya, G.: Ueber ganzwertige ganze funktionen. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, roč. 40 (1915), s. 1–16.

[13] Pólya, G.: Über ganzwertige polynome in algebraischen Zahlkörpern. *J. Reine Angew. Math.*, roč. 149 (1919), s. 97–116.

[14] Studnička, F. J.: *Algebra pro vyšší třídy středních škol.* 2. vyd., Dr. Eduard Grégr a syn, Praha, 1877.

[15] Veselý, V.: Aritmetické řady vyšších stupňů. *Rozhledy matematicko--přírodovědecké*, roč. 30 (1950/51), s. 16–22.

[16] Vicovský, K.: O aritmetických řadách. *Rozhledy matematicko--přírodovědecké*, roč. 16 (1936/37), 47–48, s. 71–75.