Dalibor Martišek

O jednom mýtickém trojúhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 4, 1–15

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152704`

O jednom mýtickém trojúhelníku

Dalibor Martišek, Šlapanice

Motto

La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.

Matematika je umění dávat stejné jméno různým věcem.

Henri Poincaré (1908)

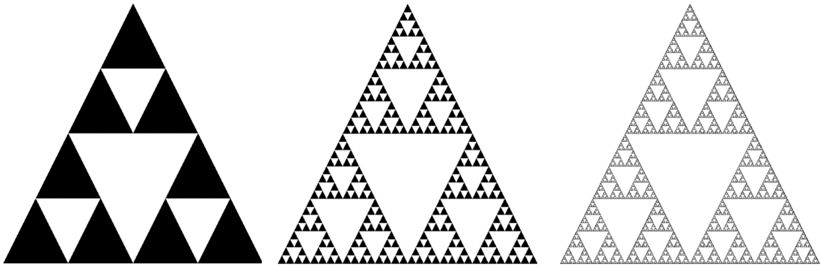
Co mají rostliny společného s bloudící želvou, hrací kostkou, chrámovými věžemi, koncem světa a binomickým rozvojem? Pokud vůbec nějaká společná vlastnost existuje, najdeme ji pomocí matematiky. Matematika je totiž schopna nacházet někdy až neuvěřitelné souvislosti. A je to právě jen matematika, která nám i na tuto otázku odpoví: souvislosti se v tomto případě skrývají v jednom správně vykrájeném trojúhelníku.

Trojúhelník je jedním ze základních geometrických útvarů. Každý, kdo úplně nezapomněl učivo ZŠ, jistě zná součet velikostí jeho vnitřních úhlů, výšky, těžnice, kružnici opsanou i vepsanou, vzorečky pro obvod, obsah a možná i mnoho dalšího. Co by na tom mělo být zajímavého, či dokonce mytického? S trojúhelníkem můžeme začít kouzlit v okamžiku, kdy jeho konstrukci opakujeme do nekonečna. Jedna taková konstrukce je poměrně známá a uváděly ji i některé články na stránkách Rozhledů (Panešová 2020, Dlab 2022, Martišek 2022). Zde ji připomeneme v krátké úvodní kapitole.

Sierpińského trojúhelník

Autorem této konstrukce je Wacław Franciszek Sierpiński (Sierpiński 1915): sestroj libovolný trojúhelník a vyjmi z něho vnitřek trojúhelníku určeného jeho středními příčkami. Na tři zbývající trojúhelníky aplikuj tutéž konstrukci, s devíti následujícími trojúhelníky proveď totéž a takto pokračuj do nekonečna (na obr. 1 jsme takto vyjímali bílé trojúhelníky z trojúhelníku černého).

Tento útvar má „nekonečný obvod“ a „nulový obsah“. Tyto poněkud nezvyklé pojmy byly vysvětleny v článku (Martišek 2022). Před sto lety byl tento trojúhelník jedním z impulsů k zásadnímu přehodnocení pojmů dimenze a míra. Dnes tuto konstrukci můžeme považovat za kuriozitu s nepopiratelným kouzlem (viz např. Dlab 2022). Obsah a obvod ovšem nejsou ani zdaleka jedinými kouzelnickými triky, které má tento trojúhelník v rukávu.



Obr. 1: Druhý, pátý a šestý krok konstrukce rovnoramenného Sierpińského trojúhelníku

Aristid Lindenmayer a jeho jazykový koutek

Aristid Lindenmayer byl maďarský biolog, který se zabýval morfologií růstu řas. V roce 1968 navrhl formální matematický systém umožňující do té doby zcela nevídané geometrické konstrukce, které se dnes ani zdaleka neomezují jen na svůj původní účel. Lindenmayerovy systémy (L-systémy) jsou něco mezi velmi jednoduchými, ale zcela formálními jazyky, a jednoduchými, ale zcela formálními matematickými teoriemi.

Každý lidský jazyk lze formálně definovat množinou přípustných symbolů (abecedou) – množinou „základních" slov, v češtině např. {*byt; les; …*} a gramatikou, která umožňuje odvozovat další slova a slovní spojení {*nábytek; v lese; …*}. Jedním z vrcholů tisíce let trvajícího vývoje matematiky bylo poznání, že pokud se mají matematici vyhnout nejasnostem a paradoxům, musí postupovat právě takto. Každá matematická teorie dnes musí být (alespoň v principu) schopna postupovat od seznamu povolených znaků, např. $\{p; q; \ldots; \neg; \vee; \wedge; \Rightarrow; (;); \ldots\}$, přes množinu „základních" posloupností těchto znaků, tj. „slov", či „vět", které považuje za pravdivé (axiomy), např. $\{p \Rightarrow p; p \vee \neg p; \ldots\}$, a „gramatiku" – pravidla odvozování, která umožňují z těchto „pravd" odvozovat další tvrzení této teorie – matematické věty. V gramatice je například uvedeno, že k posloupnosti znaků $p \Rightarrow p$ lze vždy zprava připsat znaky $\vee q$ (v tomto pořadí), tj. že z axiomu $p \Rightarrow p$ lze vždy odvodit větu $p \Rightarrow p \vee q$.

Zatímco u složitější matematické teorie (např. euklidovské geometrie) je tento striktně formální popis extrémně obtížný a u přirozeného jazyka již prakticky nemožný, popis L-systému je většinou velmi jednoduchý.

Příklad 1.

abeceda: $\{F; G; +; -\}$
axiom: F
gramatika: $\{F \mapsto G - F - G; G \mapsto F + G + F\}$
(tedy každý znak F lze přepsat uspořádanou pěticí znaků $G - F - G$ a každý znak G pěticí $F + G + F$).

Jak tedy bude vypadat naše teorie?
Axiom: F
1. věta: $G - F - G$.

Dalším přepisem můžeme z této první věty „odvodit“ sedm dalších vět: třemi způsoby můžeme přepsat právě jedno písmeno, třemi způsoby právě dvě písmena, nebo můžeme přepsat všechna tři. Dále budeme přepisovat vždy všechna písmena. Tedy:

2. věta:

$$\begin{array}{ccccc} G & - & F & - & G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F+G+F & - & G-F-G & - & F+G+F. \end{array}$$

3. věta:

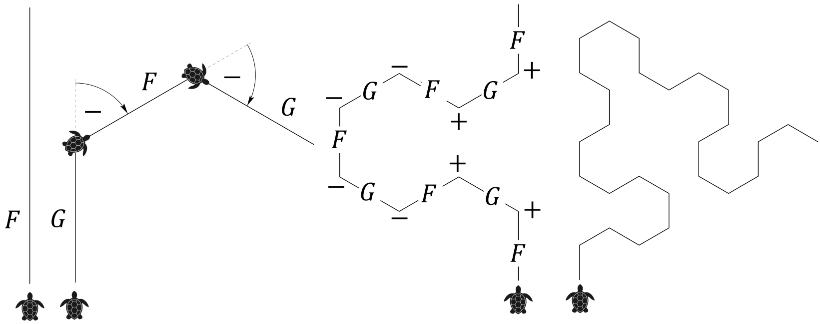
$$G - F - G + F + G + F + G - F - G - F + G + F - G - F - G - F + G + F - G - F - G + F + G + F + G - F - G,$$

atd.

To je tzv. syntaktická stránka jazyka či teorie – zatím jsme zcela formálně seskupovali a přepisovali nějaké znaky. Každý jazyk i každá teorie má ale také stránku sémantickou. Každá skupina znaků musí mít nějaký význam. Česky se domluvíme pouze s někým, kdo si pod uspořádanými trojicemi znaků *byt* či *les* představuje (alespoň zhruba) totéž co my.

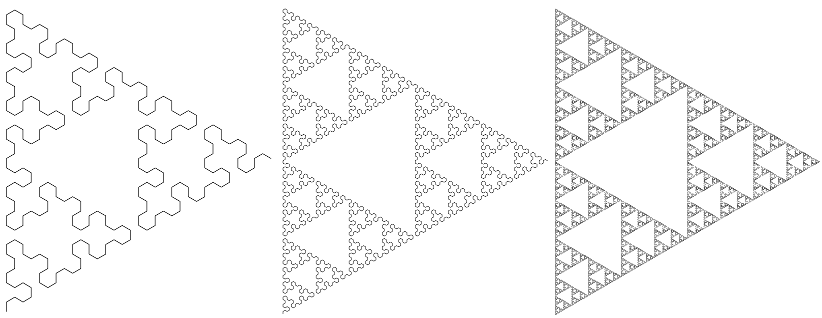
Abychom zjistili, co je na příkladu 1 tak mimořádného a co to má společného s trojúhelníkem, dodáme mu význam (naší teorii budeme interpretovat). Představme si želvu (nebo jakékoliv jiné zvířátko) v nějakém bludišti. Její poloha je v každém okamžiku určena bodem, ve kterém se nachází, a orientací jejího těla. Každá věta popisuje cestu z bludiště. Každý znak je jednoduchá instrukce: písmeno znamená krok vpřed; znak $+$ otoč se o $+60°$; znak $-$ otoč se o $-60°$.

Pojďme bloudit. Axiom F představuje nejjednodušší možné „bludiště“ – východ je přímo před želvou, stačí krok vpřed. Na počátku cesty nechť má želva hlavu nahoře (viz obr. 2), tj. její první krok vpřed je vzhůru. Jednotlivé věty představují stále složitější bludiště a stále delší cestu (viz obr. 2 zleva doprava). Poznamenejme ještě, že s každou následující větou jsou kroky želvy zkráceny vždy na polovinu, jinak by se každá další konstrukce nepřiměřeně zvětšovala.



Obr. 2: Interpretace L-systému z př. 1. Zleva: Axiom, první, druhá a třetí věta

Na obr. 3 jsou sestrojeny cesty želvy generované pátou, sedmou a devátou větou L-systému z př. 1.

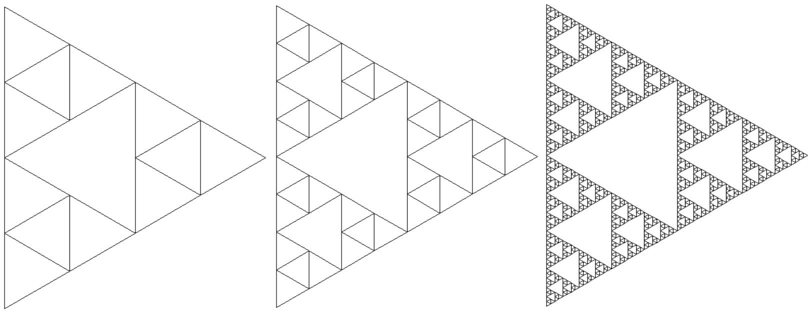


Obr. 3: Interpretace L-systému z př. 1. Zleva: pátá, sedmá a devátá věta

Příklad 2.

abeceda: $\{F; G; +; -\}$
axiom: $F--G--G$
gramatika: $\{F \mapsto F--G++F++G--F; G \mapsto GG\}$

Čtenář se může pokusit nakreslit axiom a první popř. druhou větu. Další věty může sestrojit počítač (viz obr. 4). Tento systém sestrojuje obvody trojúhelníků, které postupně odebírá Sierpińského konstrukce z předchozí kapitoly.

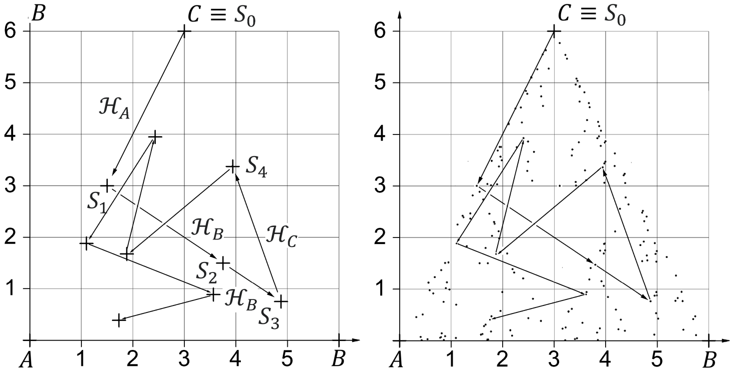


Obr. 4: Interpretace L-systému z př. 2. Zleva: druhá, třetí a šestá věta

L-systémy sestrojují tento trojúhelník jako křivku. To vypadá na první pohled velmi podivně, ale z topologického hlediska je Sierpińského trojúhelník skutečně křivka (viz např. Martišek 2022). L-systém z příkladu 2 a obr. 4 je jako „cesta z bludiště“ značně neefektivní. Želva se totiž stále častěji ocitá na stejném místě, protože její cesta stále častěji protíná sama sebe. Z topologického hlediska je ovšem velmi ilustrativní. Sierpińského trojúhelník je totiž křivka, která protíná sama sebe v každém svém bodě. Další magický kousek tohoto kouzelného geometrického útvaru.

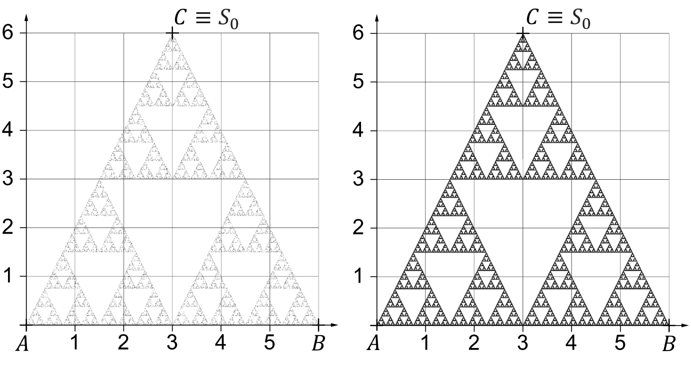
Tvořivá náhoda

V rovinné souřadnicové soustavě sestrojme body $A[0;0]$, $B[6;0]$, $C[3;6]$ a uvažujme stejnolehlosti $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_C$ se středy v bodech A, B, C, všechny s koeficientem 0,5. Jeden z bodů A, B, C (kterýkoliv) považujme za startovací a označme ho S_0. Hoďme obyčejnou hrací kostkou. Sestrojme bod S_1 takto: jestliže padla jednička nebo dvojka, je bod S_1 obrazem bodu S_0 ve stejnolehlosti $\mathcal{H}_A$, pokud to byla trojka nebo čtyřka, použijeme stejným způsobem stejnolehlost $\mathcal{H}_B$; ve zbylých dvou případech je $S_1 = \mathcal{H}_C(S_0)$. Hoďme znovu a stejným způsobem sestrojme bod S_2 jako obraz bodu S_1. Takto pokračujme libovolně dlouho. Dostaneme náhodnou posloupnost bodů S_n, pro kterou platí $S_{n+1} = \mathcal{H}_A(S_n)$ s pravděpodobností $1/3$, $S_{n+1} = \mathcal{H}_B(S_n)$ s pravděpodobností $1/3$ a $S_{n+1} = \mathcal{H}_C(S_n)$ s pravděpodobností $1/3$. Na obr. 5 vlevo vidíme posloupnost bodů generovanou hody $2; 3; 4; 6; 1; 5; 2; 4; 1$. Vpravo tatáž posloupnost po sto hodech.



Obr. 5: Bod zobrazovaný ve třech stejnolehlostech náhodně vybíraných hrací kostkou

Počítač může sestrojit desetitisíce či statisíce členů této posloupnosti a poskytnout zajímavý výsledek. Na obr. 6 vlevo prvních 20 000 členů, vpravo prvních 500 000 členů.



Obr. 6: Posloupnost bodů generovaná třemi stejnolehlostmi a hrací kostkou dle obr. 5

Útvar na obr. 6 vpravo připomíná Sierpińského trojúhelník, ale není to Sierpińského trojúhelník. Je to jen jeho konečná podmnožina – půl milionu izolovaných bodů. Tento útvar má nulový nejen obsah, ale i délku. Pravděpodobnost, že se nám stejným způsobem podaří podruhé sestrojit tutéž množinu, je $3^{-500000} \approx 10^{-238560}$.

Struktury skryté v Pascalově trojúhelníku

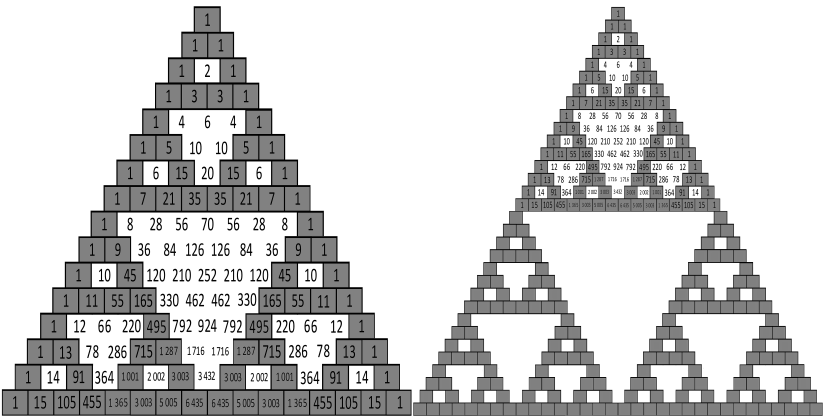
Pascalův trojúhelník tvoří, jak známo, koeficienty binomického rozvoje

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

zapsané pro jednotlivá $n = 0, 1, 2, \ldots$ do řádků pod sebou. Každý řádek začíná a končí jedničkou, vnitřní čísla řádků $n = 2, 3, 4, \ldots$ dostaneme jako součet dvou nejbližších čísel v předchozím řádku, neboť pro $n > 1$, $1 \le k \le n-1$ platí

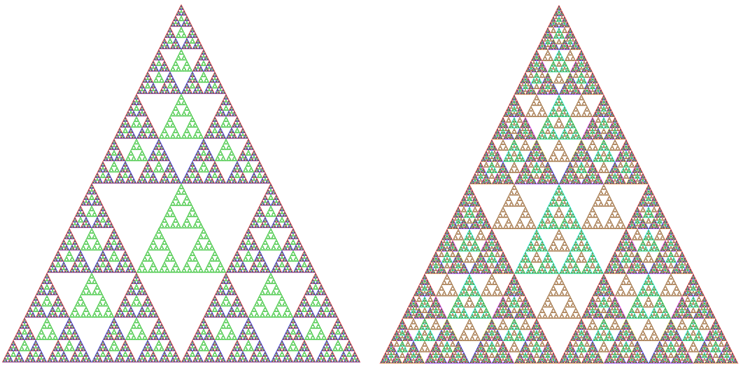
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

To ovšem není ani zdaleka jediná zajímavost tohoto trojúhelníku. Na obr. 7 vidíme šestnáct, resp. třicet dva řádků Pascalova trojúhelníku s odlišenými lichými a sudými koeficienty.



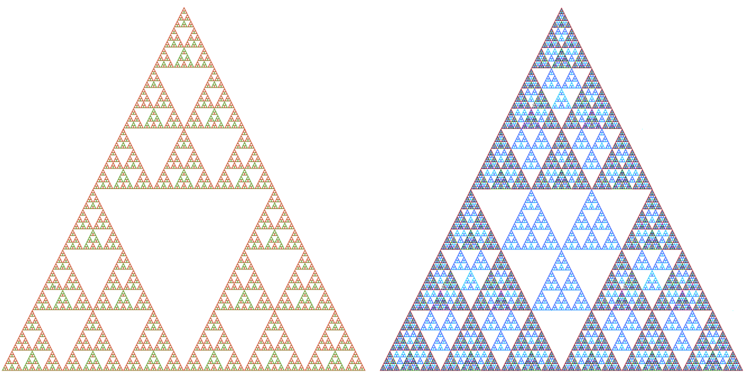
Obr. 7: Liché a sudé koeficienty Pascalova trojúhelníku. Vlevo 16 řádků, vpravo 32 řádků

Na obr. 8 vidíme 1024 řádků Pascalova trojúhelníku s vyznačenými zbytky po dělení koeficientů čtyřmi (vlevo) a osmi (vpravo). Liché zbytky po vydělení čtyřmi, resp. osmi, reprezentují liché koeficienty, prvních šestnáct, resp. třicet dva řádků, se tedy rovná množinám na obr. 7. Sudé zbytky tvoří nové struktury – další a další „Sierpińského trojúhelníky“ (uvozovky jsou zde namístě – tyto struktury tvoří samozřejmě vždy jen konečný počet koeficientů).



Obr. 8: 1024 řádků Pascalova trojúhelníku. Vlevo: zbytky po dělení čtyřmi (1; 2; 3). Vpravo: zbytky po dělení osmi (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7)

Na obr. 9 máme zbytky koeficientů po dělení třemi (vlevo) a devíti (vpravo).



Obr. 9: 1458 řádků Pascalova trojúhelníku. Vlevo zbytky po dělení třemi (1; 2), vpravo po dělení devíti (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8)

Vidíme další zajímavé variace na téma Sierpińského trojúhelník. Tyto útvary sestrojil počítač. Může zkonstruovat i složitější útvary využívající dělitelnosti dalšími čísly. Bude pak generovat stále složitější sestavy zobecněných Sierpińského trojúhelníků, které jsou zajímavým geometrickým ztvárněním jednoduchých vět o dělitelnosti.

Hanojské věže – mýtus, anebo skutečnost?

Někde v džungli jihovýchodní Asie stojí tajemný klášter se třemi věžemi – věží stvoření, věží života a věží zkázy. V okamžiku zrození světa bylo v první věži naskládáno na sobě 64 zlatých kotoučů od největšího po nejmenší. Tamní mnichové přenášejí denně jeden kotouč tak, aby všechny kotouče dostali do věže zkázy. Protože musejí pokládat vždy menší kotouč na větší, mohou používat věž života jako „mezisklad“. V okamžiku, kdy dostanou všechny kotouče do věže zkázy, nastane konec světa. Postupovat mají co nejrychleji. Za každé „zbytečné“ prodloužení lidské existence (například přenesením jednoho kotouče tam a zpět) zaplatí lidstvo nějakým neštěstím.

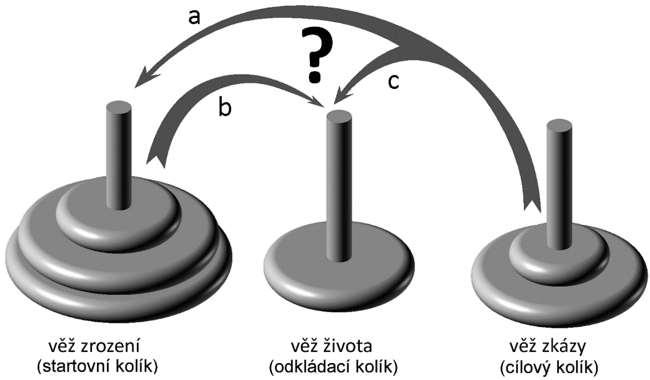
Tuto pověst dával k lepšímu jeden nejmenovaný člen francouzské společnosti pro pokrok v přírodních vědách na jejím zasedání v roce 1891. Matematik Édouard Lucas, který byl rovněž přítomen, se mu vysmál. Tuto báchorku si prý vymyslel on, a to jako reklamu na svůj hlavolam se 3 kolíky a několika kotouči různých velikostí, který nazval Hanojské věže.

Společnost pak zasedla ke slavnostní večeři. Jeden z číšníků při Lucasově obsluze rozbil nádobí tak nešťastně, že jeden střep zasáhl matematika do tváře. Zranění se druhý den zanítilo a Lucas za několik dní zemřel. Okolnosti jeho smrti dodnes nebyly přesvědčivě vysvětleny. Jedna z verzí je poněkud děsivá: svět dostal jeden den existence navíc a Lucas několik dni utrpení a smrt za pohrdání legendami.

Řešení hlavolamu Édouarda Lucase krok po kroku

Na obr. 10 vidíme jednu z možných pozic tohoto hlavolamu se šesti kotouči. Šipky naznačují tři možné legální kroky, tj. možná přemístění menšího kotouče na větší. Který krok v této pozici je optimální, tj. vede k nejrychlejšímu řešení?

První krok začíná vždy přemístěním nejmenšího kotouče z věže zrození (startovního kolíku). Je-li počet kotoučů sudý, první krok končí na věži života (odkládacím kolíku), je-li počet kotoučů lichý, končí na věži zkázy (cílovém kolíku). Druhý (a pak každý další sudý) krok je v každém případě „vynucený“ – nemáme-li opět přemisťovat nejmenší kotouč zpět, můžeme přemístit jediný další kotouč, a to jediným způsobem. V každém dalším lichém kroku opět přemisťujeme nejmenší kotouč. Pokud je to možné, ve stejném směru o stejnou délku, jako v předchozím lichém kroku, pokud to možné není, změníme směr a délku kroku.



Obr. 10: Hanojské věže se 6 kotouči (hlavolam matematika Édouarda Lucase)

Celé řešení tak zcela určuje „cyklický“ pohyb nejmenšího kotouče v lichých krocích, a to v případě sudého počtu kotoučů:

startovní → odkládací → cílový → startovní ...

v případě lichého počtu kotoučů:

startovní → cílový → odkládací → startovní ...

Tento cyklus funguje bez ohledu na pořadí, v jakém jsou kolíky fyzicky uspořádány[1)]. V pozici na obr. 10 tak můžeme okamžitě vyloučit šipku c, neboť při sudém počtu kotoučů končí optimální krok nejmenšího kotouče z cílového kolíku na kolíku startovním. Zbývá rozhodnout, zda k této pozici vede lichý či sudý počet kroků, tj. zda je na řadě nejmenší, anebo větší (druhý nejmenší) kotouč. K tomu můžeme zrekonstruovat posloupnost kroků vedoucích ze startovní pozice, například následujícím schématem:

[1)] Pro čtenáře znalého modulární aritmetiky poznamenejme, že při pořadí kolíků („startovní; odkládací; cílový“) = (0;1;2) je pozice K nejmenšího kotouče po jeho k-tém přemístění dána vztahem $K = k \bmod 3$ (při sudém počtu kotoučů), resp. vztahem $K = (3 - k) \bmod 3$ (při lichém počtu kotoučů). V pozici na obr. 10 je $k \bmod 3 = 2 \Rightarrow (k+1) \bmod 3 = 0$, takže nejmenší kotouč z této pozice půjde na startovní kolík.

$$\begin{pmatrix} 1 & \square & \square \\ 2 & \square & \square \\ 3 & \square & \square \\ 4 & \square & \square \\ 5 & \square & \square \\ 6 & \square & \square \end{pmatrix} \overset{1}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ 2 & \square & \square \\ 3 & \square & \square \\ 4 & \square & \square \\ 5 & \square & \square \\ 6 & 1 & \square \end{pmatrix} \overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 3 & \square & \square \\ 4 & \square & \square \\ 5 & \square & \square \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 3 & \square & \square \\ 4 & \square & \square \\ 5 & \square & 1 \\ 6 & \square & 2 \end{pmatrix} \overset{4}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 4 & \square & \square \\ 5 & \square & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{5}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 1 & \square & \square \\ 4 & \square & \square \\ 5 & \square & \square \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{6}{\sim}$$

$$\overset{6}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 1 & \square & \square \\ 4 & \square & \square \\ 5 & 2 & \square \\ 6 & 3 & \square \end{pmatrix} \overset{7}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 4 & 1 & \square \\ 5 & 2 & \square \\ 6 & 3 & \square \end{pmatrix} \overset{8}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & 1 & \square \\ 5 & 2 & \square \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{9}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{10}{\sim} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 2 & \square & \square \\ 5 & \square & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{11}{\sim} \dots$$

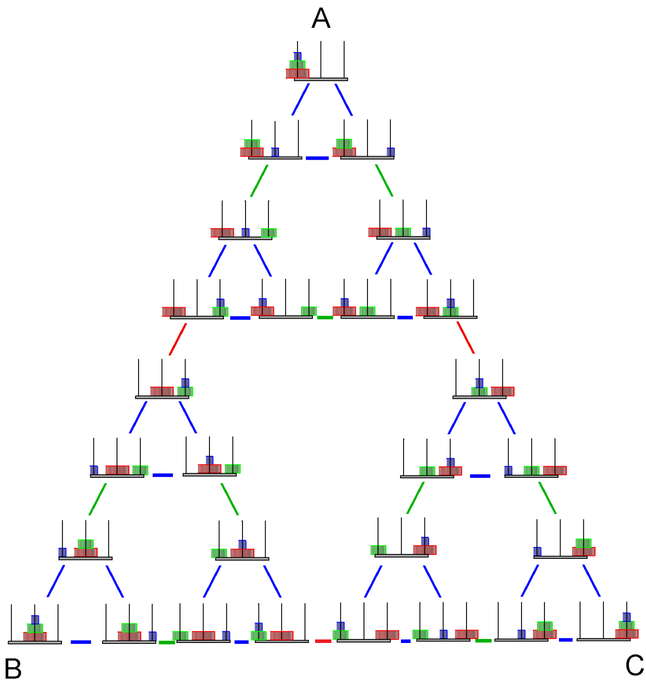
Sloupce v jednotlivých závorkách značí kolíky, čísla velikosti kotoučů. Vlnovka značí jeden krok. Z tohoto schématu je zřejmé, že desátým krokem vedoucím do pozice na obr. 10 bylo přenesení kotouče č. 2 z odkládacího na startovní kolík. Na řadě je tedy jedenáctý krok – šesté přemístění nejmenšího kotouče a šipka označená na obr. 10 písmenem a.

Stavový prostor hanojských věží

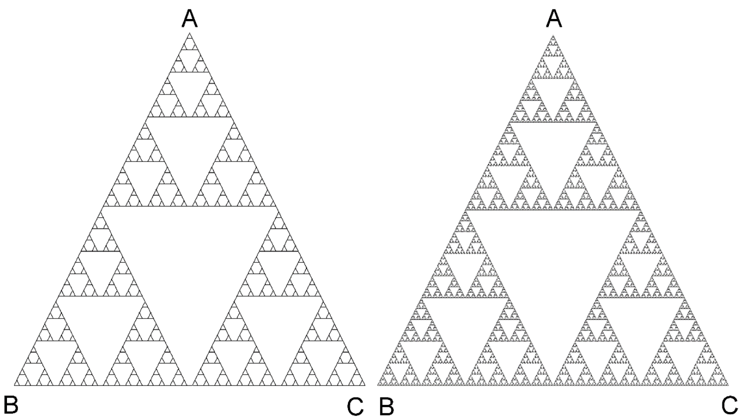
Každá posloupnost legálních kroků určuje legální pozici hlavolamu, je tedy možné sestrojit tzv. stavový prostor, tj. množinu všech legálních kroků a pozic. Na obr. 11 vidíme stavový prostor pro tři kotouče, na obr. 12 pak pro šest a dvanáct kotoučů. Stavovým prostorem pro počet kotoučů $n \to \infty$ je Sierpińského trojúhelník.

Ze stavových prostorů pro jednotlivá n je zřejmé, že nejrychlejší cesta z prvního na třetí kolík vede po straně AC trojúhelníku ABC. Každá „odbočka" dovnitř trojúhelníku znamená zbytečný krok. Na druhou stranu – stavový prostor obsahuje všechny legální stavy i cesty mezi nimi a umožňuje tak „optimálně vyřešit" nejen startovní, ale jakoukoliv (i neoptimální) legální pozici.

Rovněž stavový prostor obsahuje řešení úlohy při libovolném uspořádání kolíků na skutečném hlavolamu. Z trojúhelníku ABC totiž můžeme vyčíst nejen optimální cestu z prvního kolíku na třetí ($A \to C$), ale také cestu opačnou – ze třetího kolíku na první ($C \to A$). Zbývající dvě strany obsahují optimální cesty z prvního na prostřední kolík a zpět ($A \leftrightarrow B$), resp. z prostředního na pravý a zpět ($B \leftrightarrow C$).



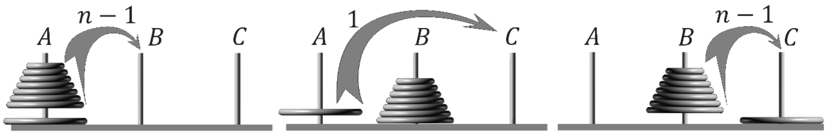
Obr. 11: Možné pozice hanojských věží pro tři kotouče



Obr. 12: Možné pozice hanojských věží pro šest (vlevo) a dvanáct (vpravo) kotoučů

Rekurzivní řešení hanojských věží aneb rozděl a panuj

Toto řešení je založeno na velmi jednoduché úvaze. Na cílový kolík je třeba jako první umístit největší kotouč. K tomu je ovšem potřeba $n-1$ kotoučů, které jsou nad ním, nějak přenést na kolík odkládací (opět v pořadí od největšího po nejmenší), viz obr. 13 vlevo. Po přenesení největšího kotouče na cílový kolík (obr. 13 uprostřed) pak znovu přenést $n-1$ kotoučů tentokrát z odkládacího kolíku na cílový (obr. 13 vpravo). Původní úlohu o n kotoučích jsme tak rozdělili na dvě stejné úlohy s menším počtem kotoučů. Ty řešíme stejným způsobem. Původní úlohu tak rozdělujeme na stále větší počet stále jednodušších úloh, které jednoduše „opanujeme“ – každou nakonec vyřešíme přesunutím jediného kotouče.



Obr. 13: Rekurzivní řešení hanojských věží

Tento rekurzivní postup je pro lidský mozek velmi obtížný a pro větší počet kotoučů nerealizovatelný. Člověk není schopen držet v paměti lavinovitě rostoucí počet úloh typu „čtyři kotouče přenes z C na A“. Pro paměť počítače je to však hračka. Krátký pseudokód příslušné rekurzivní procedury vypadá takto:

```
Procedura Přenes n {kotoučů}; {z kolíku} A; {na kolík} B; {odkládej na kolík} C
Když je n >1, pak
    Přenes n-1 {kotoučů}; {z kolíku} A; {na kolík} C; {odkládej na kolík} B
    Napiš zprávu „přenes kotouč z“ A „na“ B
    Přenes n-1 {kotoučů}; {z kolíku} C; na kolík B; {odkládej na kolík} A
```

Pak už v programu stačí jediný řádek – procedura, ve které zadáme počet kotoučů a kolíky v pořadí startovací, cílový, odkládací, tedy např.

Přenes 6 *{kotoučů}*; *{z kolíku}* A; *{na kolík}* B; *{odkládej na kolík}* C

a program napíše řešení po jednotlivých krocích:

přenes kotouč z A na C
přenes kotouč z A na B
přenes kotouč z C na B
. . . . . .
přenes kotouč z C na B.

Pořadí kolíků v zápisu procedury *Přenes* opět nemusí nijak korespondovat se skutečným uspořádáním kolíků na hlavolamu – kolík A nemusí být vlevo, může být i uprostřed, anebo vpravo; podobně kolíky B; C. Kolík A navíc nemusí být startovní, ale opět libovolný. Zavoláme-li proceduru ve tvaru *Přenes 7; B; A; C*, přenášíme sedm kotoučů z kolíku B na kolík A, odkládáme na C, přitom tyto kolíky mohou být na skutečném hlavolamu kdekoliv. Konečně – rekurzivní postup nikde a nijak explicitně neřeší paritu počtu kotoučů. Tato otázka se vyřeší zcela přirozeně sama paritou potřebné rekurze, která nemusí programátora vůbec zajímat.

Rekurzivní algoritmy se pro svoji efektivitu používají v programátorské praxi velmi často, například pro násobení mnohaciferných činitelů (Karatsuba 1962), uspořádání řady čísel podle velikosti či jmen podle abecedy (quick sort), v grafických programech při vyplňování oblastí zadanou barvou (seed fill) apod.

Kdy nastane konec světa?

Jestliže v návodu pro šest kotoučů spočítáme instrukce, zjistíme, že je jich 63 (toto počítání můžeme samozřejmě rovněž svěřit počítači). Po několika dalších pokusech s různým počtem kotoučů můžeme vyslovit domněnku, že počet přenesení pro n kotoučů je $2^n - 1$. Důkaz, který tuto domněnku změní v matematickou větu, je hezké a jednoduché cvičení na matematickou indukci: Je-li na kolících jen jeden kotouč, je počet přenesení $2^1 - 1 = 1$. Předpokládejme, že pro n kotoučů je třeba $2^n - 1$ přenesení. $n + 1$ kotoučů pak přeneseme tak, že nejdříve přeneseme n kotoučů ze startovního kolíku na kolík odkládací (viz obr. 13) – to je podle indukčního předpokladu $2^n - 1$ přenesení, pak přeneseme největší kotouč ze startovního kolíku na cílový, a pak opět n kotoučů, tentokrát z odkládacího na cílový, tj. dalších $2^n - 1$ přenesení. Celkem tak dostáváme $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$ přenesení. Pro tajemné mnichy to znamená $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ přenesení a pro lidstvo právě tolik dnů existence. Představme si, že budeme chtít pro mnichy vytisknout návod s jednotlivými instrukcemi, jak disky přenášet. Každá instrukce bude na jednom řádku, na stránce dejme tomu šedesát řádků, tiskárna nechť chrlí jednu stránku za sekundu. Pak jen tisk tohoto návodu bude trvat téměř deset miliard let. Kdybychom začali tisknout v okamžiku, kdy vznikla naše Země, nebudeme dnes s návodem ani v polovině.

Závěr

Mnoho matematických objevů nese jméno jednoho člověka. Většina z nich však zrála delší dobu v hlavách mnoha matematiků. A tak například Eulerovo číslo e není tak docela Eulerovo a Cardanovy vzorce objevili zřejmě nezávisle na sobě Scipione del Ferro a Nicolo Fontana zvaný Tartaglia. Gaussovu křivku poprvé sestrojil Abraham de Moivre půl století před Gaussovým narozením, Pythagorovu větu znali a používali Babyloňané, Indové a Číňané nejméně tisíc let před Pythagorem.

Ani Sierpińského trojúhelník není v tomto směru výjimkou. Už půl století před Sierpińským si ho nejspíš všiml Édouard Lucas, když promýšlel svoje hanojské věže, a možná, že o něm věděl už Blaise Pascal, když studoval vlastnosti binomických koeficientů. Ostatně i jejich uspořádání do trojúhelníku bylo známo indickým a perským matematikům několik století před Pascalem.

Sierpińského trojúhelník je však přece jen něčím výjimečný. Objevuje se ve značně překvapivých souvislostech a díky hanojským věžím je i součástí na první pohled děsivé, ve skutečnosti však až příliš optimistické pověsti. Číslo $2^{64} - 1$ navíc vyjadřuje nejen počet dnů, které má podle legendy lidstvo dáno ke své existenci, ale i počet zrn pšenice, která žádal Sissa ben Dahir na indickém králi Šahramovi jako odměnu za vynález šachové hry. Náhoda? Na to nechť si odpoví každý sám.

Literatura

[1] Dlab, V.: Kouzlo Sierpińského trojúhelníku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 97 (2022), č. 2, s. 1–5.

[2] Karatsuba, A., Ofman, Y.: Multiplication of Many-Digital Numbers by Automatic Computers. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, roč. 145 (1962), s. 293–294.

[3] Lindenmayer, A.: Mathematical models for cellular interaction in development. *J. Theoret. Biology*, roč. 18 (1968), s. 280–315.

[4] Martišek, D.: Jak to vlastně je? Fraktály. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 3, s. 15–33.

[5] Panešová, K.: Hausdorffova dimenze fraktálních množin. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 3, s. 1–7.

[6] Sierpiński, W.: Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris.*, roč. 160 (1915), s. 302–305.