

Učitel matematiky

Jan Fiala; Marika Hruběšová; Marek Šulista

Sonda do (ne)znalostí studentů v užívání aritmetického a geometrického průměru na vysoké škole

Učitel matematiky, Vol. 32 (2024), No. 1, 15–32

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152496>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

**SONDA DO (NE)ZNALOSTÍ STUDENTŮ
V UŽÍVÁNÍ ARITMETICKÉHO
A GEOMETRICKÉHO PRŮMĚRU
NA VYSOKÉ ŠKOLE**

JAN FIALA, MARIKA HRUBEŠOVÁ, MAREK ŠULISTA

Úvod

Geometrický průměr je matematické učivo, s nímž se žáci základních a středních škol ve výuce spíše nesetkávají. Pokud ano, pak je tomu tak ve výuce statistiky na střední škole. Většinou se jim dostane vysvětlení, že jde v případě geometrického průměru o jednu z možných tzv. středních hodnot statistického znaku, žáci se dozvědí, jak se geometrický průměr vypočítá, bohužel často bez následných aplikací. Na vysoké škole se s učivem o geometrickém průměru tedy studenti setkají většinou poprvé, a to především ve výuce statistiky či finanční matematiky, kde studenti řeší matematické aplikační úlohy zaměřené na výpočet různých ekonomických a finančních parametrů a ukazatelů (například inflace). Užití geometrického průměru ovšem vyžaduje prvotní porozumění jeho ekonomickému významu.

V příspěvku nejdříve představíme definici geometrického průměru, jeho některé vlastnosti, přiblížíme geometrický význam této střední hodnoty a uvedeme význam a možné aplikace geometrického průměru v ekonomii a finanční matematice. V druhé kapitole představíme dotazníkové šetření a jeho výsledky. Poslední kapitola obsahuje řadu úloh na užití geometrického průměru ve finanční matematice.

1. Geometrický průměr v matematice

1.1. Matematická definice

Definice 1. Geometrický průměr $\bar{x}_G$ (prostý) n nezáporných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$) je definován jako n -tá odmocnina součinu hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj.

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (1)$$

Po dosazení $n = 2$ do vzorce (1) dostaneme speciálně $\bar{x}_G = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$, což má jednoznačnou geometrickou interpretaci: geometrickým průměrem dvou kladných čísel x_1, x_2 (obecně dvou délek nenulových úseček) je délka výšky v sestrojené v dělicím bodu nad přeponou $x_1 + x_2$ v pravoúhlém trojúhelníku, kterému je opsána Thalétova kružnice τ sestrojená nad příslušným průměrem. Při konstrukci úsečky, jejíž délka je geometrickým průměrem dvou daných úseček, se využije Eukleidova věta o výšce. Geometrický význam geometrického průměru se využije při konstrukci úsečky délky $\sqrt{n}$, $n \in R^+$.

Ve statistice chápeme geometrický průměr jako jednu z tzv. středních hodnot (charakteristik polohy) statistického znaku (k dalším patří například aritmetický průměr, modus, medián aj.). Na rozdíl od aritmetického průměru neovlivňují extrémní hodnoty x_i geometrický průměr $\bar{x}_G$ tolik, jako je tomu u aritmetického průměru.

Definice 2. Geometrický průměr (vážený) n nezáporných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$) je definován jako n -tá odmocnina součinu hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$ umocněných na $n_1, n_2, \dots, n_k$, tj.

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_n^{n_k}}, \quad (2)$$

kde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ a kde $n_1, n_2, \dots$ jsou četnosti jednotlivých reálných čísel $x_1, x_2, \dots$.

1.2. Některé vlastnosti geometrického průměru

Geometrický průměr má řadu vlastností, z nichž uvedeme jen některé.

Na rozdíl od aritmetického průměru je geometrický průměr definován pouze pro nezáporná reálná čísla x_i . Pokud bude alespoň jeden z činitelů roven nule, bude geometrický průměr také roven nule.

Geometrický průměr nezáporných reálných hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$ je vždy menší nebo roven jejich aritmetickému průměru, tj. platí

$$\bar{x}_G \leq \bar{x}. \quad (3)$$

Jedná se o tzv. aritmeticko-geometrickou nerovnost, někdy též AG nerovnost. Platnost vztahu (3) pro $n = 2$ lze snadno ověřit řešením příslušné nerovnice či ověřit geometricky. Rovnost v (3) nastává, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Její důkaz pro n hodnot x lze nalézt například v (Navrátil, 2010, s. 17–18; Rolínek & Šalom, 2012, s. 17–18).

Nerovnost (3) lze rozšířit ještě o nerovnost vůči harmonickému průměru $\bar{x}_H$.

Definice 3. Harmonický průměr (vážený) n kladných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$) je definován jako podíl součtu všech četností (vah) n_i i -tého pozorování všech n hodnot pozorování a součtu součinů převrácených hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$ (tedy $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$) a příslušných četností n_i , tj.

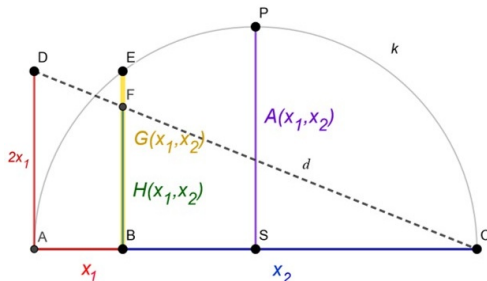
$$\bar{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^n n_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} n_i}. \quad (4)$$

Vztah mezi harmonickým (4), geometrickým (3) a aritmetickým průměrem vyjadřuje následující věta:

Věta 1. (Bez důkazu.) Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}. \quad (5)$$

Platnost vztahu (5) pro $n = 2$ lze snadno ověřit řešením příslušné soustavy nerovnic či geometricky. Rovnost v (5) nastává, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Geometrickou interpretaci nerovnosti všech tří průměrů pro dvě zvolená čísla x_1 a x_2 ukazuje obrázek 1.



Obr. 1: Geometrická interpretace průměrů dvou čísel x_1, x_2

Věta 2. (Bez důkazu.) Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ a pro základ logaritmu $a, a > 0, a \neq 1$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\log_a \bar{x}_G = \frac{1}{n} (\log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n). \quad (6)$$

Vztah (6) vyjadřuje, že logaritmus geometrického průměru kladných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ je aritmetický průměr logaritmů jednotlivých vstupních hodnot. Celý zápis ověření pro jednoduchost neuvádíme.

1.3. Geometrický průměr v ekonomii a finanční matematice

Přestože není využití geometrického průměru v ekonomii rozsáhlé (Hindls et al., 2018, s. 34), je tato střední hodnota ve specifickém využití nezastupitelná.

Geometrický průměr se používá k výpočtu řady ekonomických ukazatelů, nejčastěji k výpočtu průměrných hodnot růstových charakteristik v čase, tj. průměrného tempa růstu dané veličiny, např. pro průměrnou procentovou míru růstu (poklesu) ceny zboží, pro výpočet průměrné míry růstu ceny akcií či celého portfolia, pro výpočet průměrného tempa růstu HDP, nezaměst-

nanosti, průměrné míry inflace, průměrného tempa růstu hrubých mezd, devizového kurzu, zisku firmy apod.

V obecné rovině jde tedy o průměrnou návratnost investice v průběhu času, neboli o určitou metriku, kterou bychom využili k hodnocení výkonnosti jedné investice nebo celého investičního portfolia. Geometrický průměr se používá k řešení spojitých datových řad, které aritmetický průměr není schopen přesně odrážet.

Investicí rozumíme shromáždění nejrůznějších aktiv za účelem získání určitého zisku v budoucnosti (Šulista et al., 2014, s. 10). Ziskovost investice spočívá v ověření návratnosti neboli růstu vložené investice v současnosti nebo v budoucnosti. Konečná hodnota investice se vypočítá jako geometrický průměr růstových koeficientů větších (v případě růstu) či menších než 1 (v případě poklesu).

2. Znalosti studentů o geometrickém průměru

Ve výuce finanční matematiky ve druhém ročníku na Ekonomické fakultě Jihočeské univerzity se učitelé často setkávali s vysokou chybovostí užití geometrického průměru při řešení úloh. Autoři si dali za cíl identifikovat stav znalostí v této problematice u studentů prvních ročníků ještě v době, než se s geometrickým průměrem setkají ve výuce na vysoké škole v rámci různých vyučovacích předmětů.

2.1. Dotazníkové šetření a jeho výsledky

Online průzkum znalostí o geometrickém průměru byl realizován v aplikaci Office Forms v závěru zimního semestru akademického roku 2022/2023 a zúčastnilo se ho 202 studentů 1. ročníku různých studijních programů ze tří fakult: 130 studentů z Ekonomické fakulty, 37 studentů z Pedagogické fakulty a 35 studentů z Fakulty zemědělské a technologické Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Z celého vzorku bylo 63 studentů absolventy gymnázia, 43 studovalo obchodní akademii, 17 navštěvovalo lyceum, 73 chodilo na střední odbornou školu s maturitou, ostatní byli studenty jiného druhu střední školy.

Z výsledků dotazníku vyplynulo, že 51 % studentů se s geometrickým průměrem setkalo ve výuce již na střední škole, ovšem pouze 9 % (19¹ z celkových 202 studentů) studentů si je jisto správným užitím geometrického průměru při řešení úloh, 49 % si správným užitím geometrického průměru jisto není, zbylých 42 % neumí geometrický průměr použít.

Tab. 1: Poměrné zastoupení studentů v závislosti znalosti použití geometrického průměru na skutečnosti, že se s ním studenti setkali ve výuce na střední škole

GP na střední škole/Znalost použití	Ano	Ne	Nejsem si jistý	Celkem
Setkal jsem se s GP	9,4 %	10,9 %	31,2 %	51,5 %
Nesetkal jsem se s GP	0,0 %	31,2 %	17,3 %	48,5 %
Celkem	9,4 %	42,1 %	48,5 %	100,0 %

Tabulka 1 ukazuje procentuální zastoupení studentů v závislosti na skutečnosti, že se s geometrickým průměrem setkali na střední škole, a tím, že si jsou (či nejsou) jisti jeho užitím při řešení úloh.

2.1.1. Úlohy v dotazníku

V dotazníku bylo studentům předloženo celkem pět matematických úloh z běžného života, které nebylo cílem přímo vyřešit, ale studenti měli za úkol pouze rozhodnout, zda by k řešení využili aritmetický, či geometrický průměr.

Úloha 1. V letech 2018–2020 činila inflace v ČR 2,1 %, 2,8 % a 3,2 %. Určete průměrnou roční inflaci za tyto tři roky.

Úloha 2. V letech 2018–2020 byla míra nezaměstnanosti v ČR 2,6 %, v roce 2019 2,4 % a v roce 2020 3,4 %. Určete průměrnou roční nezaměstnanost za tyto tři roky.

¹Hodnota 19 je výchozí pro hlubší analýzu úspěšnosti v tabulce 3.

Úloha 3. Účast ve volbách byla v roce 2018 38,2 %, v roce 2019 42,4 % a v roce 2020 dokonce 53,7 %. Určete průměrnou roční účast ve volbách za tyto tři roky.

Úloha 4. Kurz koruny byl v roce 2017 27,3 Kč/EUR, v roce 2021 byl kurz 24,6 Kč/EUR. Určete průměrné roční posilování koruny vůči euru.

Úloha 5. HDP rostlo v roce 2018 o 2,9 %, v roce 2019 o 2,4 % a v roce 2020 došlo k poklesu o 5,6 %. Určete průměrný růst HDP za tyto tři roky.

Řešení. K řešení úloh 1, 4 a 5 je potřeba využít geometrický průměr, úlohy 2 a 3 se řeší pomocí aritmetického průměru.

2.1.2. Analýza úspěšnosti řešení úloh z dotazníku

Tabulka 2 ukazuje celkovou úspěšnost všech respondentů při rozhodování o využití geometrického či aritmetického průměru u jednotlivých úloh z dotazníku.

Tab. 2: Úspěšnost řešení úloh dotazníku u všech dotazovaných studentů (údaje v procentech jsou vztaheny k celému rozsahu vzorku)

Úloha/ Volba řešení	Správná volba	Chybná volba	Nejsem si jistý
Úloha 1	25 (12,4 %)	125 (61,9 %)	52 (25,7 %)
Úloha 2	92 (45,5 %)	49 (24,3 %)	61 (30,2 %)
Úloha 3	38 (18,8 %)	104 (51,5 %)	60 (29,7 %)
Úloha 4	87 (43,1 %)	53 (26,2 %)	62 (30,7 %)
Úloha 5	74 (36,6 %)	55 (27,2 %)	73 (36,2 %)

Značnou chybovost volby studentů vykazují úlohy 1 a 3. U úlohy 1 nerozpoznali studenti typickou úlohu na řešení pomocí geometrického průměru, v úloze 3 ovšem rovněž nepoznali typickou úlohu, kterou je potřeba řešit aritmetickým průměrem. Ani

ve zbylých úlohách nebyli studenti ve svých volbách příliš úspěšní, průměrná úspěšnost byla pouze 42 %. Potvrzuje se tak, že znalosti užívání aritmetického a geometrického průměru nemají studenti upevněné a správně zažité. To podporují i všechny údaje z posledního sloupce v tabulce 2, podle kterých si vždy zhruba třetina všech studentů nebyla svou volbou jista, tedy studenti nevěděli, jak by úlohu řešili.

Tabulka 3 ukazuje absolutní a poměrné zastoupení úspěšných řešitelů jednotlivých úloh z dotazníku s ohledem na skutečnosti, že se tito studenti setkali ve výuce na střední škole s geometrickým průměrem a současně tvrdili, že jej umí správně použít. Ačkoliv bylo těchto studentů pouze 19 (z toho deset studovalo gymnázium, čtyři lyceum, jeden student obchodní akademii a čtyři střední odbornou školu), provádíme analýzu jejich úspěšnosti v jednotlivých úlohách. Poměrové četnosti uvedené po zaokrouhlení na jedno desetinné místo se vztahují k počtu všech studentů, kteří se s geometrickým průměrem setkali na střední škole.

Tab. 3: Úspěšnost řešení úloh dotazníku u studentů, kteří se s geometrickým průměrem setkali na střední škole a současně uvedli, že jej umí správně použít

Úloha/ Volba řešení	Správná volba	Chybná volba	Nejsem si jistý
Úloha 1	3 (3,0 %)	16 (15,8 %)	0
Úloha 2	9 (8,9 %)	10 (9,9 %)	0
Úloha 3	11 (10,9 %)	8 (7,9 %)	0
Úloha 4	10 (9,9 %)	8 (7,9 %)	1
Úloha 5	10 (9,9 %)	9 (8,9 %)	0

Z tabulky 3 vyplývá, že především úloha 1 byla značně obtížná i pro studenty, kteří se s geometrickým průměrem na střední škole setkali a mysleli si, že jej umí správně použít. Jak je ale patrné z celé tabulky 3, úspěšnost této skupiny studentů se pohybovala pouze mírně nad 50 %.

Provedme dále analýzu úspěšnosti studentů ve vztahu k typu studované střední školy. Tabulka 4 ukazuje četnosti úspěšných studentů v jednotlivých úlohách s ohledem na typ studované střední školy. Z analýzy byla s ohledem na nízký počet respondentů vyloučena střední odborná učiliště, střední průmyslové školy, zahraniční střední školy, střední zdravotní školy a jazykové školy. Pouze dva studenti (jeden z gymnázia a jeden ze střední odborné školy) vybrali správné odpovědi u všech pěti úloh.

Tab. 4: Absolutní a poměrové četnosti správných odpovědí při řešení jednotlivých úloh dotazníku studenty z různých typů škol

Typ školy/ Úloha	1.	2.	3.	4.	5.
Gymnázium	9 (14,29 %)	32 (50,79 %)	40 (63,49 %)	31 (49,21 %)	25 (39,68 %)
Lyceum	2 (11,76 %)	8 (47,06 %)	8 (47,06 %)	6 (35,29 %)	6 (35,29 %)
Obchodní akademie	3 (6,98 %)	18 (41,86 %)	20 (46,51 %)	22 (18,60 %)	16 (37,21 %)
Střední odborná škola	9 (12,33 %)	31 (42,47 %)	33 (45,21 %)	26 (20,55 %)	24 (32,88 %)

Z tabulky 4 je patrné, že v některých případech existují významné rozdíly v poměrové četnosti správných odpovědí u studentů gymnázií a studentů z ostatních středních škol, což se dalo očekávat, neboť například na gymnáziích bývá úroveň výuky matematiky vyšší než například na odborných učilištích.

Dále se budeme zabývat určením průměrné úspěšnosti studentů z jednotlivých typů škol (viz tabulka 5). Nejdříve určíme četnosti studentů, kteří odpověděli určitý počet správných odpovědí. Budeme určovat tzv. čistou úspěšnost, kterou rozumíme poměr mezi počtem správně zodpovězených úloh a počtem všech úloh v dotazníku. Mají-li studenti například správnou právě jednu

odpověď, je jejich úspěšnost v testu $\frac{1}{5} = 0,2$, tj. 20 %, pro dvě správné odpovědi je úspěšnost 40 %, pro tři správné odpovědi je úspěšnost 60 %, pro čtyři, resp. pět správných odpovědí je úspěšnost 80 %, resp. 100 % (viz tabulka 5). Tamtéž jsou v posledním sloupci uvedeny hodnoty průměrné čisté úspěšnosti (*average success rate*, označíme s_a) libovolného studenta z příslušného typu školy. Určujeme ji jako aritmetický průměr všech čistých úspěšností jednotlivých studentů. Hodnoty v procentech se tedy vztahují k celkovému počtu studentů z daného typu školy.

Tab. 5: Četnosti studentů s konkrétním počtem správných odpovědí a průměrná čistá úspěšnost s_a

Typ školy/Počet správných odpovědí	1	2	3	4	5	s_a
Gymnázium	3	12	6	15	1	34,92 %
Lyceum	2	5	2	2	0	30,59 %
Obchodní akademie	0	9	8	4	0	26,98 %
Střední odborná škola	2	8	9	10	1	24,66 %

Z výše uvedeného vyplývá, že testovaní studenti bez ohledu na typ střední školy nevykazují uspokojivé znalosti v užívání geometrického a aritmetického průměru při řešení úloh. Lze říci, že pouze zhruba každý třetí až čtvrtý libovolně zvolený student je při řešení některé z pěti úloh úspěšný. Zjištěná úspěšnost kopíruje očekávání, že například studenti z gymnázií budou úspěšnější než studenti lycea, obchodní akademie či střední odborné školy, kde matematice není většinou věnována srovnatelná pozornost jako například na gymnáziích.

Jako reakci na zjištěnou nízkou úspěšnost studentů při řešení úloh s využitím aritmetického a geometrického průměru uvádíme v poslední kapitole článku celkem čtrnáct typických úloh s řešeními, kde je využit geometrický průměr, jako vzor učitelům pro zařazení do výuky.

3. Úlohy z finanční matematiky řešené pomocí geometrického průměru

Následující řešené úlohy jsou určeny především učitelům na středních školách, kteří do své výuky matematiky zařazují geometrický průměr. Učitelé vysokých škol mohou úlohy využít při opakování učiva o geometrickém průměru.

Úloha 1. Obchodník prodával v lednu 1 kus daného zboží za 1 000 Kč. V únoru zboží zdražil o 15 % a v březnu o další 4 % z aktuální ceny. O kolik průměrně obchodník zdražil zboží při jednom zdražení během dvou měsíců, tj. jaká byla průměrná procentová míra zdražení?

Řešení. Při řešení úlohy bez využití geometrického průměru nejdříve vypočítáme, kolik stálo zboží po všech zdraženích: cena po prvním zdražení byla 1 150 Kč, neboť 115 % z 1 000 Kč je 1 150 Kč. Po druhém zdražení dostáváme po zaokrouhlení 1 196 Kč.

První koeficient růstu byl 1,15 a druhý 1,04. Průměrný koeficient vypočítáme řešením rovnice

$$1\,000 \cdot x \cdot x = 1\,196,$$

$$x^2 = 1,196 \Rightarrow x = \sqrt{1,196} \doteq 1,093\,6.$$

Průměrná procentová míra zdražení je tedy po zaokrouhlení 9,4 %. Konečnou cenu můžeme ověřit zpětným dosazením: $1,093\,6 \cdot 1,093\,6 \cdot 1\,000 \text{ Kč} \doteq 1\,196 \text{ Kč}$.

Řešení úlohy s využitím geometrického průměru:

$$\bar{x}_G = \sqrt{1,15 \cdot 1,04} = \sqrt{1,196} \doteq 1,093\,6.$$

Úloha 2. Vývoj HDP v ČR za posledních šest let ukazuje tabulka 6. Jaký byl růst (pokles) HDP v ČR za rok 2016, jestliže byl průměrný roční růst HDP za posledních šest let 3,51 %?

Tab. 6: Změny HDP oproti předchozímu roku v % (zdroj dat: ČSÚ, 25. 7. 2022)

Rok	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Změna HDP [%]	y	+4,5	+3,0	+2,4	+5,6	+3,3

Řešení. Tempa růstu za jednotlivé roky jsou: $1 + \frac{y}{100}$; 1,045; 1,03; 1,024; 1,056; 1,033. Průměrný roční procentní růst (míra) HDP činil 3,51 %, tzn. průměrné tempo růstu je hodnota 1,035 1. Platí rovnice:

$$(1,035 \text{ } 1)^6 = \left(1 + \frac{y}{100}\right) \cdot 1,045 \cdot 1,03 \cdot 1,024 \cdot 1,056 \cdot 1,033.$$

Po úpravách a zaokrouhlení je hledanou hodnotou HDP v roce 2016 2,3 %.

Úloha 3. 1. května 2016 byl kurz 34,47 CZK/GBP, na konci roku 2016 pak 32,35 CZK/GBP. Kolik bylo průměrné měsíční posilování koruny?

Řešení. $\sqrt[8]{\frac{32,35}{34,47}} \doteq 0,992097$ vyjadřuje průměrný koeficient posilování, tedy průměrné měsíční posilování koruny bylo asi o $1 - 0,992097 = 0,007903$, tj. 0,79 %.

Úloha 4. Cena akcie vzrostla v prvním čtvrtletí o 6 %, v druhém čtvrtletí klesla o neznámý počet procent a ve třetím čtvrtletí pak vzrostla o 20 %. Jaký byl procentní pokles ceny akcie ve druhém čtvrtletí, víme-li, že průměrná procentová míra zdražení za všechna tři čtvrtletí činila 4,2 %?

Řešení. Průměrné tempo růstu $1,042 = \sqrt[3]{1,06 \cdot x \cdot 1,2}$, odtud po zaokrouhlení $x \doteq 0,889$, z čehož vyplývá, že ve druhém čtvrtletí klesla cena akcie o 11,1 %.

Úloha 5. Ceny bytů rostly v období čtyř po sobě jdoucích měsíců postupně o 5 %, 10 %, 7 % a 8 %. Vypočítejte průměrnou hodnotu koeficientu růstu cen bytů.

Řešení. $\bar{x}_G = \sqrt[4]{1,05 \cdot 1,1 \cdot 1,07 \cdot 1,08} \doteq 1,075$, tj. po zaokrouhlení 7,5 %.

Úloha 6. Úspory a vložené do banky se úročí v prvním roce úrokovou mírou ve výši 2 %, ve druhém 3,5 % a ve třetím 5 %. Jaká konstantní výše úrokové míry p by v každém roce zajistila stejný zisk?²

²Neuvažujte žádné bankovní poplatky ani daň z příjmu.

Řešení. S měnící se hodnotou úrokové míry bude výsledná hodnota vloženého kapitálu $1,02 \cdot 1,035 \cdot 1,05 \cdot a$. Při konstantní hodnotě p úrokové míry po dobu všech tří let to je $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$. Ze zadání předpokládáme rovnost výsledného kapitálu na konci tří let: $1,02 \cdot 1,035 \cdot 1,05 \cdot a = x^3 \cdot a$, přičemž $x = 1 + \frac{p}{100}$. Dostáváme $x = \sqrt[3]{1,108485} \doteq 1,034927$, tedy $p \doteq 3,49\%$.

Úloha 7. Banka nabízí spořicí produkt na pět let se zhodnocením vložených finančních prostředků ve výši a o 12 %. Jaká je roční úroková míra nabízená bankou? Jaký by byl zisk z investice 100 000 Kč do tohoto spořicího produktu po pěti letech?³

Řešení. Po pěti úrokovacích obdobích bude celková částka $1,12 \cdot a$. Označme x průměrné zhodnocení za jedno úrokovací období. Pak platí rovnost

$$1,12 \cdot a = x^5 \cdot a,$$

$$x = \sqrt[5]{1,12} \doteq 1,02292.$$

Roční úroková míra činí po zaokrouhlení 2,29 %.

Po pěti letech bude zisk z investice $((\sqrt[5]{1,12})^5 - 1) \cdot 100\,000 \text{ Kč} \doteq 12\,000 \text{ Kč}$. Jinak také $100\,000 \cdot 0,12 = 12\,000$.

Úloha 8. Vývoj počtu nezaměstnaných v ČR v roce 2021 ukazuje tabulka 7. Určete průměrný měsíční růst (pokles) nezaměstnaných za rok 2021.

Tab. 7: Změna počtu nezaměstnaných oproti předchozímu měsíci v % (po zaokrouhlení na desetiny, zdroj dat: ČSÚ, 25. 7. 2022)

Měsíc	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Změna počtu [%]	+5,8	+0,8	-1,6	-2,9	-4,0	-4,1
Měsíc	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Změna počtu [%]	-0,7	-1,5	-2,2	-4,0	-2,4	-3,7

³Neuvažujte daň z příjmu.

Řešení. Tempa růstu (poklesu) za jednotlivé měsíce jsou: 1,058; 1,008; 0,984; 0,971; 0,96; 0,959; 0,993; 0,985; 0,978; 0,96; 0,976; 0,963.

Průměrný měsíční procentní pokles: $\bar{x}_G \doteq 0,983$. Průměrná procentová míra poklesu počtu nezaměstnaných: 1,7 %.

Úloha 9. Účet byl první dva roky úročen 1,2 % p.a., pak byl tři roky úročen 1,5 % p.a. Jaká byla průměrná výnosnost tohoto účtu?

Řešení. Buď z řešení rovnice $(1 + 0,012)^2 \cdot (1 + 0,015)^3 = (1 + x)^5$ vypočítáme $x \doteq 0,38$, tedy hledaná průměrná roční výnosnost bankovního účtu je asi 1,38 %, nebo k řešení využijeme vážený geometrický průměr $\sqrt[5]{(1,012)^2 \cdot (1,015)^3} \doteq 1,38$.

Úloha 10. Počet obyvatel obce se od konce roku 2014 do konce roku 2021 zvýšil z 2 050 na 4 175. Jaký byl průměrný roční přírůstek obyvatel obce v %?

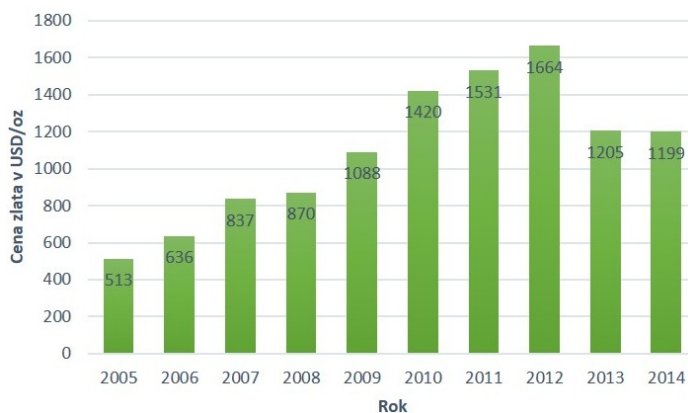
Řešení. Nárůst počtu obyvatel za sedm let byl $\frac{4\,175}{2\,050} = 2,3$, tj. 230 %. Průměrný přírůstek je $\sqrt[7]{2,3} \doteq 1,126$, tj. po zaokrouhlení 12,6 %.

Úloha 11. Tramvaj s pořizovací cenou 65 700 000 Kč má životnost 10 let a bude se odepisovat pomocí metody klesající bilance. Určete odpisovou míru, pokud zůstatková cena po čtyřech letech činí 9 708 052 Kč.

Řešení. Platí: $65\,700\,000 \cdot (1 - r_d)^4 = 9\,708\,052$, z toho $r_d = 1 - \sqrt[4]{\frac{9\,708\,052}{65\,700\,000}} \doteq 0,38$, tj. asi 38 %.

Úloha 12. Na vývoji ceny zlata se podepisují různé faktory, např. finanční krize, výše úrokových sazeb aj. Obrázek 2 ukazuje ceny zlata v amerických dolarech za trojskou uncii⁴ na konci daného roku v letech 2005–2014. Jaká byla průměrná cena zlata v tomto období a jaké bylo průměrné tempo růstu ceny mezi lety 2006–2014?

⁴Trojská unce je základní váhová jednotka, která se používá na trzích se zlatem, stříbrem, drahými kovy či drahokamy.



Obr. 2: Cena zlata v USD/oz na konci daných roků

Řešení. Průměrnou cenu zlata vypočítáme s využitím aritmetického průměru:

$$\frac{513 + 636 + 837 + 870 + 1088 + 1420 + 1531 + 1664 + 1205 + 1199}{10} = 1096,3.$$

Průměrná cena zlata byla v letech 2005–2014 1 096,3 USD/oz.

Tempa růstu (poklesu) za jednotlivé roky od roku 2006 do roku 2014 po zaokrouhlení na čtyři desetinná místa jsou: 1,239 8; 1,316 0; 1,039 4; 1,250 6; 1,305 1; 1,078 2; 1,086 9; 0,724 2 a 0,995 0. Průměrný měsíční procentní růst: $\bar{x}_G \doteq 1,098 9$. Průměrná roční procentová míra růstu ceny zlata: 9,89 %.

Úloha 13. Vývoj počtu cizinců z hlediska trvalého pobytu na území České republiky ukazuje tabulka 8. Určete průměrnou hodnotu koeficientu růstu počtu cizinců v letech 2012–2021.

Tab. 8: Změna počtu cizinců na území ČR oproti předchozímu roku v % (zdroj dat: ČSÚ, 25. 7. 2022)

Rok	2012	2013	2014	2015	2016
Změna počtu [%]	+8,2	+11,8	+5,5	+4,0	+4,6
Rok	2017	2018	2019	2020	2021
Změna počtu [%]	+3,3	+2,8	+3,5	+3,0	+4,2

Řešení. K řešení můžeme využít geometrický průměr:

$\sqrt[10]{1,082 \cdot 1,118 \cdot 1,055 \cdot 1,04 \cdot 1,046 \cdot 1,033 \cdot 1,028 \cdot 1,035 \cdot 1,03 \cdot 1,042} \doteq$
 $\doteq 1,0506$ po zaokrouhlení, tj. průměrný roční růst odpovídá hodnotě 5,06 %.

Úloha 14. S přibývajícím věkem dochází zpravidla ke zhoršení zdravotního stavu člověka, a s tím i ke zvýšení výdajů na zdravotní péči. Podle ČSÚ ve většině věkových skupin (kromě kategorie 95+) od 65 let výše převažují výdaje na léčbu jednoho muže nad výdaji na jednu ženu (viz tabulka 9). Jaký byl průměrný roční růst výdajů zdravotních pojišťoven na léčbu jednoho muže, resp. jedné ženy, v období 2018–2020? Kolik zaplatily pojišťovny v průměru v roce 2020 v přepočtu na jednoho seniora staršího 65 let (včetně) bez ohledu na pohlaví, víte-li, že žen tohoto věku bylo v České republice 1 248 395 a mužů 909 807?

Tab. 9: Výdaje zdravotní pojišťovny na léčbu seniorů ve věku 65+ na jednoho obyvatele v Kč podle pohlaví v období 2017–2020 (Rolínek & Šalom, 2012)

Rok	2017	2018	2019	2020
Výdaje [Kč] na jednoho muže	60 371	64 479	69 886	81 226
Změna hodnoty [%] oproti předchozímu roku	—	+6,8	+8,4	+16,2
Rok	2017	2018	2019	2020
Výdaje [Kč] na jednu ženu	50 270	53 256	57 627	64 643
Změna hodnoty [%] oproti předchozímu roku	—	+5,9	+8,2	+12,2

Řešení. S využitím geometrického průměru dostáváme průměrné tempo růstu u mužů 1,10991, u žen 1,08736, tj. průměrná procentová míra růstu je u mužů po zaokrouhlení 11 %, u žen 8,7 %. Částku, kterou zaplatily pojišťovny v roce 2020 za jednoho seniora

staršího 65 let (včetně) bez ohledu na pohlaví, vypočítáme:

$$\frac{(909\,807 \cdot 81\,226) + (1\,248\,395 \cdot 64\,643)}{909\,807 + 1\,248\,395} = 71\,634.$$

V průměru na jednu osobu zaplatily pojišťovny v roce 2020 částku 71 634 Kč.

4. Závěr

Geometrický průměr hraje v ekonomii, statistice, ekonometrii či finanční matematice sice marginální roli, má však své nezastupitelné místo při řešení úloh s výpočtem průměrných hodnot růstových koeficientů, a měl by tedy být součástí uceleného znalostního portfolia absolventa ekonomicky zaměřeného vysokoškolského studia. Důležitost znalosti správného využití aritmetického a geometrického průměru nabývá na významu v souvislosti s tím, že se žáci i studenti ve svém životě stále častěji setkávají s údaji založenými na těchto středních hodnotách v různých analýzách prezentovaných v médiích, a jejich porozumění je proto nezbytné pro pochopení prezentovaných dat a schopnost kriticky na data nahlížet.

Podle výsledků realizovaného dotazníku nepřicházejí studenti ze středních škol na vysoké školy s dostatečným znalostním vybavením o správném užívání geometrického (ale často i aritmetického) průměru při řešení úloh. Nedostatečná znalost se týká všech typů středních škol. Za vhodnou cestu k nápravě považují autoři více se žáky již na základních a především středních školách řešit úlohy na užití těchto středních hodnot, zvláště pak podrobně se studenty tato řešení diskutovat a analyzovat jejich případné chyby.

Literatura

- [1] Hindls, R., Arltová, M., Hronová, S., Malá, I., Marek, L., Pecáková, I., & Řezanková, H. (2018). *Statistika v ekonomii*. Professional Publishing.
- [2] Navrátil, J. (2010). *AG–nerovnost v příkladech*. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Brno. <https://is.muni.cz/th/sf147/diplomka.pdf>

- [3] Rolínek, M., & Šalom, P. (2012). *Zdolávání nerovností*. Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta.
- [4] Šulista, M., Nýdl, V., & Moore, G. (2014). *Úvod do finanční a pojistné matematiky*. Jihočeská univerzita, Ekonomická fakulta.
- [5] Webové stránky ČSÚ [online]. 25. července 2022, [cit. 2022-07-25]. <https://www.czso.cz/>

Abstract

The article deals with using arithmetic and geometric mean in financial mathematics at university. The questionnaire results show a significant error rate of students when choosing the arithmetic or geometric mean as a mathematical tool when solving problems. The mathematical definition, statistical significance and basic properties of the geometric mean are given. To show how geometric mean can be used, the article contains several typical problems from financial mathematics, the solution of which can significantly contribute to a deeper understanding of mean values and, thus, to the higher success of students in the subject of Financial Mathematics at university.

Jan Fiala

e-mail: fiala@ef.jcu.cz

Marek Šulista

e-mail: sulista@ef.jcu.cz

Katedra aplikované matematiky a informatiky

Ekonomická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Studentská 13

370 05 České Budějovice

Marika Hruběšová

Katedra matematiky

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Jeronýmova 10

371 15 České Budějovice

e-mail: mhrubesova@ef.jcu.cz