Rozhledy matematicko-fyzikální

Palindromy

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 1, 27–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152335

Palindromy

Milí čtenáři, tentokrát pro vás máme úkol z oblasti jazykových hříček. Palindrom, jak jistě víte, je slovo, které je stejné, ať ho čteme zepředu, nebo pozpátku. Známé palindromické věty v češtině jsou například:

Kobyla má malý bok.
Jelenovi pivo nelej!
Nevypusť supy ven!
Bažantu padá za záda putna žab.

U některých stačí vypustit mezery, někde i diakritiku, aby vznikl palindrom. Nejdelší, v běžné mluvě užívaný, palindrom je zřejmě finské slovo *saippuakauppias*, které označuje prodavače mýdla.

Ale zajímavé jsou i palindromy číselné, zvlášť když se k nim váže nějaké alespoň částečně doložené vysvětlení. Například s položením základního kamene Karlova mostu je spojován palindrom ze samých lichých čísel 135797531. Muzeum Karlova mostu ho použilo jako své logo. Podle astronoma a filozofa Zdeňka Horského mohl být základní kámen položen 9. července 1357 v 5.31. V tu chvíli prý byla příznivá konstelace Slunce a Saturnu. Palindrom je tedy sestaven z údajů: rok–den–měsíc–hodina–minuty.

Palindromy se zkoumají rovněž v matematické disciplíně zvané kombinatorika na slovech. Abychom mohli zformulovat otázku pro čtenáře, potřebujeme představit pár jednoduchých pojmů z této oblasti. *Abecedou* rozumíme libovolnou konečnou množinu. Jejím prvkům říkáme *písmena*. *Slovem* nad danou abecedou rozumíme libovolnou konečnou posloupnost písmen z abecedy. *Faktorem* slova rozumíme řetězec sousedících písmen obsažený v daném slově.

Příklad 1. Ilustrujme si uvedené pojmy na konkrétních příkladech. Uvažujme dvě slova $abaababaa$ a $abbabaabb$ délky 9 nad abecedou $\{a, b\}$, tedy složená z písmen a, b. Například $aabab$ je faktorem prvního slova, ale nikoliv druhého. Podívejme se na palindromické faktory těchto dvou slov.

- $abaababaa$ má 9 různých palindromických faktorů:
  $$a,\ b,\ aa,\ aba,\ bab,\ baab,\ ababa,\ abaaba,\ aababaa.$$
- $abbabaabb$ má 8 různých palindromických faktorů:
  $$a,\ b,\ aa,\ bb,\ aba,\ bab,\ abba,\ baab.$$

Nyní můžeme položit čtenáři dnešní otázku:
Kolik různých palindromických faktorů může obsahovat slovo o délce n? Vysvětlete, proč to tak je. A záleží na tom, zda je slovo sestaveno z písmen a, b nebo například z písmen a, b, c, tedy na velikosti abecedy?

Minule měli čtenáři za úkol dokázat následující kritérium dělitelnosti sedmi a nějaké vlastní kritérium vymyslet. Předkládáme řešení *Josého Marciala Nájarese Romera*, autora článku o dělitelnosti v předchozím čísle RMF:

Věta. *Nechť n je přirozené číslo s desítkovým zápisem $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)$, tj.*

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

pak n je dělitelné sedmi právě tehdy, když $m - 2a_0$ je dělitelné sedmi, kde m je číslo s desítkovým zápisem $(a_k a_{k-1} \dots a_1)$.

Důkaz. Není těžké se přesvědčit, že platí následující rovnosti:

$$n = 10m + a_0 = 7m + 7a_0 + 3m - 6a_0 = 7(m + a_0) + 3(m - 2a_0).$$

Nyní pokud je n dělitelné sedmi, pak i

$$n - 7(m + a_0) = 3(m - 2a_0)$$

je dělitelné sedmi. Jelikož 3 je číslo nesoudělné s číslem 7, musí být $m - 2a_0$ dělitelné sedmi. Naopak pokud je $m - 2a_0$ dělitelné sedmi, pak i

$$n = 7(m + a_0) + 3(m - 2a_0)$$

je evidentně dělitelné sedmi.

Druhou částí úkolu bylo vymyslet vlastní kritérium dělitelnosti sedmi. Ukážeme, jak zjistit zbytek čísla po dělení sedmi metodou, kterou nazveme „předávání zbytků“. Použijeme následující dvě pozorování, přičemž důkaz prvního necháme čtenáři.

Pozorování 1. Pokud v desítkovém zápisu přirozeného čísla nahradíme každou číslici $a_j \geq 7$ číslicí $a_j - 7$, pak výsledné číslo má stejný zbytek po dělení sedmi.

Příklad 2. Například čísla 784 592 156 890 a 14 522 156 120 mají stejný zbytek po dělení sedmi.

Pozorování 2. Nechť $n \in \mathbb{N}$ má desítkový zápis $(a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0)$. Pokud

$$a_k \cdot 10 + a_{k-1} = 7 \cdot q + r, \quad q \in \mathbb{N},\ r \in \{0, 1, \dots, 6\},$$

tj. r je zbytek $a_k \cdot 10 + a_{k-1}$ po dělení sedmi, pak číslo $m \in \mathbb{N}$ s desítkovým zápisem $(r a_{k-2} \dots a_1 a_0)$ má stejný zbytek po dělení sedmi jako n.

Důkaz. Tvrzení plyne z rovnosti

$$\begin{aligned} n &= a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= 7 \cdot q \cdot 10^{k-1} + r \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= 7(q \cdot 10^{k-1}) + m. \end{aligned}$$

Příklad 3. Aplikujme pozorování 2 opakovaně na číslo 14 522 156 120 z příkladu 2. Dostaneme, že následující čísla v levém sloupci mají stejný zbytek po dělení sedmi jako 14 522 156 120:

$$\begin{array}{rl} 522\,156\,120 & (14 = 2 \cdot 7 + 0) \\ 32\,156\,120 & (52 = 7 \cdot 7 + 3) \\ 4\,156\,120 & (32 = 4 \cdot 7 + 4) \\ 656\,120 & (41 = 5 \cdot 7 + 6) \\ 26\,120 & (65 = 9 \cdot 7 + 2) \\ 5\,120 & (26 = 3 \cdot 7 + 5) \\ 220 & (51 = 7 \cdot 7 + 2) \\ 10 & (22 = 3 \cdot 7 + 1) \\ 3 & (10 = 1 \cdot 7 + 3). \end{array}$$

Závěr zní, že zbytek po dělení čísla 14 522 156 120 sedmi je roven 3. Stejně tak je 3 zbytek po dělení sedmi čísla 784 592 156 890 (viz příklad 2).