Vlastimil Dlab

Využijme Pythagorovu větu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 1, 10–14

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152331`

základě jeho vhodnosti, zejména v ekonomických, politických, ale i zdravotnických otázkách.

Literatura

[1] Axelrod, R.: *Evolution of cooperation.* Basic books, New York, 1984.

[2] Berec, L.: *Matematické modelování v ekologii a epidemiologii.* Matematika pro život, Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2023, [online přednáška] `https://www.youtube.com/watch?v=zaWORgv3RIg`.

[3] Case, N.: *Evolution of trust.* `https://ncase.me/trust/`.

[4] Čapková, T.: *Web Creation of trust.* `https://creationoftrust.capek.io/`.

[5] Čapková, T., Roskovec, T.: *Short sequence iterated prisoner's dilemma in simulations and applications.* In: 16th International Scientific Conference Inproforum, roč. 16 (2022), s. 215–221.

[6] Kruml, D.: *Vězeň to má spočítané.* Masarykova univerzita, Brno, 2018.

[7] Levínský, R., Neyman, A., Zelený, M.: Should I remember more than you? Best responses to factored strategies. *International Journal of Game Theory*, roč. 49 (2020), s. 1105–1124.

[8] von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton, 1944.

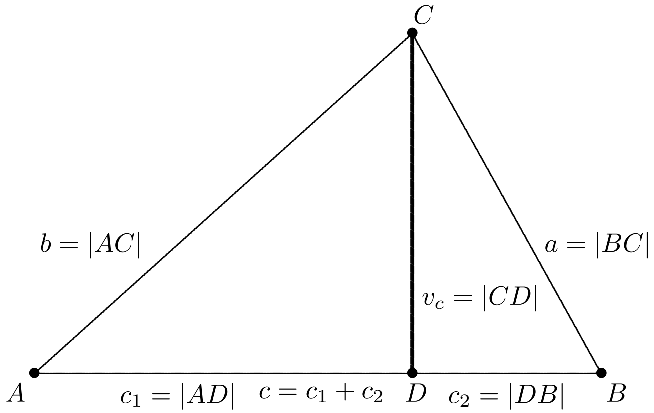
[9] Xu, B., Zhou, H.-J., Wang, Z.: Cycle frequency in standard Rock–Paper–Scissors games: Evidence from experimental economics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, roč. 392 (2013), č. 20, s. 4997–5005.

Využijme Pythagorovu větu

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

V literatuře, ať už v učebnicích či časopisech pro školy, se často setkáváme s důkazy jednoduchých tvrzení, která používají pojmy a znalosti nepřiměřené dané úloze. Nezřídka to souvisí s aplikací nabiflovaných vzorečků. Typické je užívání kosinové věty Al Kašího (1380–1429) v případech, kdy plně a s větším porozuměním postačí jednoduchá aplikace podobnosti trojúhelníků a nebo věta Pythagorova. Takových příležitostí lze nalézt v literatuře nadmíru (viz [2]). Zde je třeba zdůraznit, že aplikace jednoduchých a pro žáky nižších ročníků přístupných metod přináší do výuky porozumění a jako důsledek zájem o matematiku.

Ilustrujme tuto skutečnost na jednoduché úloze vyjádřit závislost délky výšky trojúhelníku na délce jeho stran. Vysvětlení nám umožní obr. 1 (který už obsahuje hledaná vyjádření pro výšku z bodu C na stranu c).



$$v_c = \frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}}{2c} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^4+b^4+c^4-(a^2-b^2)^2-(b^2-c^2)-(c^2-a^2)}}{2c} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c}$$

Obr. 1

Obr. 1 obsahuje dva pravoúhlé trojúhelníky ΔADC a ΔBDC. Užitím Pythagorovy věty dostáváme

$$v_c^2 = b^2 - c_1^2 \tag{1}$$

a

$$v_c^2 = a^2 - c_2^2 = a^2 - (c - c_1)^2 = a^2 - c^2 - c_1^2 + 2cc_1. \tag{2}$$

Po dosazení do (2) za v_c^2 z (1) a po jednoduché úpravě máme

$$c_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \tag{3}$$

a po dosazení za c_1 z (3) do (1) máme

$$v_c^2 = \frac{4b^2c^2 - (-a^2+b^2+c^2)^2}{4c^2}. \tag{4}$$

Zde je užitečné zmínit příslušné vyjádření obsahu $\mathcal{S}$ trojúhelníku ABC:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}cv_c = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}}{4}.$$

Zapíšeme-li tento výraz ve tvaru $4\mathcal{S} = \sqrt{V}$, můžeme vyjádřit V v různých formách. Kromě tvarů, které obdržíme záměnou stran a, b, c, totiž

$$V = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \quad \text{a} \quad V = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2,$$

máme

$$V = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4,$$
$$V = a^4 + b^4 + c^4 + (a^2 - b^2)^2 - (b^2 - c^2)^2 - (c^2 - a^2)^2,$$
$$V = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$$

a tvar připomínající Heronův vzorec:

$$V = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

Potřebná odvození vzorců ponechme čtenáři. Zde stručně odvodíme vzorec poslední, neboť poskytuje velmi jednoduchý důkaz Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku. Pišme

$$\begin{gathered}
[(a + b + c)(-a + b + c)][(a - b + c)(a + b - c)] = \\
= [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2] = \\
= a^2[(b + c)^2 + (b - c)^2] - a^4 - (b^2 - c^2)^2 = \\
= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4.
\end{gathered}$$

Označíme-li $a + b + c = 2s$, dostáváme

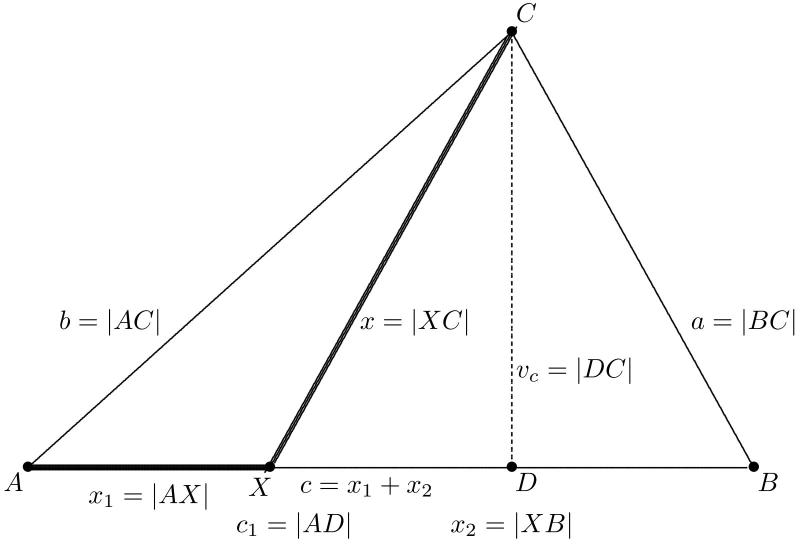
$$-a + b + c = 2(s - a), a - b + c = 2(s - b), a + b - c = 2(s - c),$$

a tedy

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4}\sqrt{V} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Odvození tohoto vzorce je nezávislé na tvaru trojúhelníků. Ponecháváme úkolem pro čtenáře přepsat výpočet pro trojúhelník, jehož úhel při vrcholu A nebo B je tupý.

Obraťme nyní pozornost na obecnější situaci, totiž na výpočet délky spojnice vrcholu C a zvoleného bodu X na straně c. Tuto spojnici popíšeme pomocí vzdálenosti bodu X od vrcholu A; označíme ji x_1 (viz obr. 2).



$$a^2x_1 + b^2x_2 = (x_1 + x_2)(x_1x_2 + x^2) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{(a^2 - x_2^2)x_1 + (b^2 - x_1^2)x_2}{x_1 + x_2}}$$

Obr. 2

Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ΔXDC spolu s výrazy (3) a (4) dostáváme

$$x^2 = (c_1 - x_1)^2 + v_c^2 =$$
$$= \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2 - 2cx_1}{2c}\right)^2 + \frac{4b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2}{4c^2} =$$
$$= \frac{4b^2c^2 + 4c^2x_1^2 - 4cx_1(-a^2 + b^2 + c^2)}{4c^2},$$

a tedy

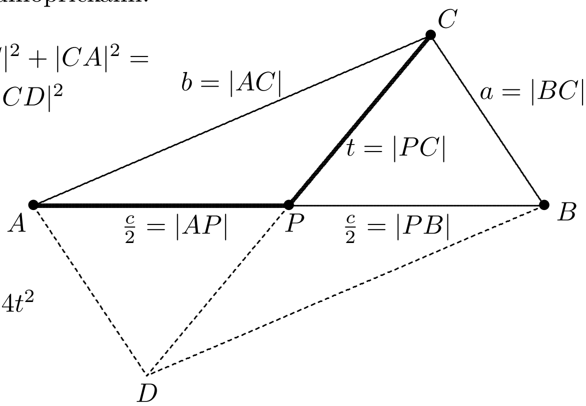
$$x^2 = \frac{b^2c + cx_1^2 - x_1(-a^2 + b^2 + c^2)}{c}.$$

Toto vyjádření lze přepsat do „symetrického“ tvaru, v jakém se Stewartova věta všeobecně prezentuje (viz [1]) a který je v obr. 2 zaznamenán. Anglický matematik Matthew Stewart (1717–1785) se touto větou řadí mezi ty, kteří přispěli do okruhu otázek, jež jsou charakterizovány větou italského inženýra Giovanniho Cevy (1648–1737); elementární důkaz viz např. v [3]. Věta Cevova je duálním tvrzením antické věty Meneláovy (okolo 100 našeho letopočtu); vysvětlení je možno nalézt v [4] či [5].

Stewartův výsledek se redukuje ve speciálním případě $x_1 = x_2$ na větu Apolloniovu týkající se délky těžnice. Ta se v případě rovnoramenného trojúhelníku redukuje dále na větu Pythagorovu. Apolloniovo vyjádření $t = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$ délky těžnice $|CP|$ (viz obr. 3) ovšem plyne zcela bezprostředně z *rovnoběžníkové rovnosti*, tj. ze vztahu mezi stranami rovnoběžníku a jeho úhlopříčkami:

$$|AD|^2 + |DB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 = \\ = |AB|^2 + |CD|^2$$

$$2(a^2+b^2) = \\ = c^2 + 4t^2$$



Obr. 3

Literatura

[1] Calda, E.: Stewartova věta a příčky v trojúhelníku. *Rozhledy matematicko--fyzikální*, roč. 86 (2011), č. 2, s. 1–5.

[2] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, roč. 17 (2009), č. 3, s. 169–182.

[3] Dlab, V.: Připomeňme si podobnost trojúhelníků. *Rozhledy matematicko--fyzikální*, roč. 97 (2022), č. 1, s. 18–28.

[4] Dlab, V.: II. Barycentrické souřadnice v rovině. *Rozhledy matematicko--fyzikální*, roč. 91 (2016), č. 2, s. 1–10.

[5] Silvester, J. R.: The famous dual theorems of Ceva and Menelaus. *The Mathematical Gazette*, roč. 84 (2000), s. 268–271.