Učitel matematiky

Milan Hejný

Metóda dokresľovania obrázka The method of suplementing a picture by drawing

Učitel matematiky, Vol. 1 (1993), No. 4, 8–15

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152227`

- Pronikání do (elementárně) matematického obsahu vyučování či možného obsahu vyučování s cílem zpřístupnit jej určité skupině žáků, studentů apod.,
- Kritické vyšetřování, resp. odůvodnění obsahů vyučování v rámci obecných cílů matematického vzdělávání,
- Výzkum předpokladů učení a procesů vyučování a učení,
- Vývoj vlastních vyučovacích jednotek a výzkum jejich praktické použitelnosti, zejména s ohledem na kvalitu indukovaných učebních procesů,
- Vývoj a evaluace kurikula,
- Vývoj metod přípravy, tvorby, pozorování a analýzy vyučování.

Práce na tomto jádru musí respektovat zkušenosti žáků a zkušenosti školské praxe, musí se vyvarovat úzkého pragmatismu, který by mohl být škodlivý. Práce v tomto jádru je "zarámována" hraničním oborem didaktiky matematiky a příbuzných disciplín jako jsou matematika, dějiny matematiky, pedagogika, psychologie, sociologie, ap. Přitom hranice mezi nimi není pevně stanovena. Jádro didaktiky matematiky je zaměřeno na interdisciplinární i integrační pohled různých aspektů a na konstruktivní návrhy (projekty). Hraniční obor je naopak silněji zaměřen na příslušné hraniční disciplíny.

Redakční poznámka: Znovu se otvřela diskuse o tom, zda didaktika matematiky (a další speciální didaktiky) je samostatnou vědní disciplínou. Tomuto tématu věnujeme prostor i v budoucnu.

Návodné situácie.
K úlohe 7: Nech E je bod súmerný s C podľa D. Do obrázku dokreslite trojuholníky AES a BCS.
K úlohe 8: Nakreslite kváder ABCDEFGH a do neho štvorsten ACFH.

Metóda dokresľovania obrázka

M. Hejný, PeF UK Praha

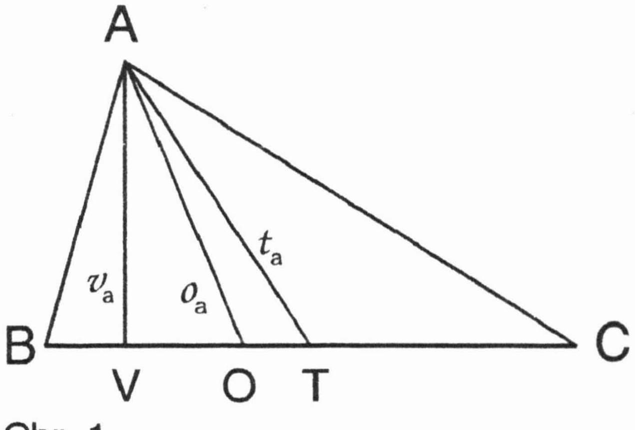
Tento článok je venovaný metóde dokresľovania obrázka, o ktorej sme sa úchytkom zmienili v knihe [1] na s.328. K napísaniu článku inšpirovala autora prívetivá knižka [3], ktorá poslúži aj čítateľovi ako dobrá surovina pre jeho prípadné pokračovanie v našich úvahách.

Keď som mal 13 rokov očarovali ma príbehy Toma Sawyera a konštrukčné úlohy, najmä konštrukcie trojuholníka z troch prvkov. Niektoré z úloh som vyriešil bez ťažkostí, iné až po opakovanom nájezde. Osobitne vzdorovitá sa ukázala:

Úloha 1. Zostrojte trojuholník ABC ak poznáte veľkosť jeho výšky v_a, ťažnice t_a a osi uhla o_a vychádzajúce z jedného vrchola A. Na obrázku 1 sú zvýraznené všetky tri dané prvky.

Bez problémov možno zostrojiť trojúholník AVT i bod O. Pre body B a C potom platia dve podmineky:

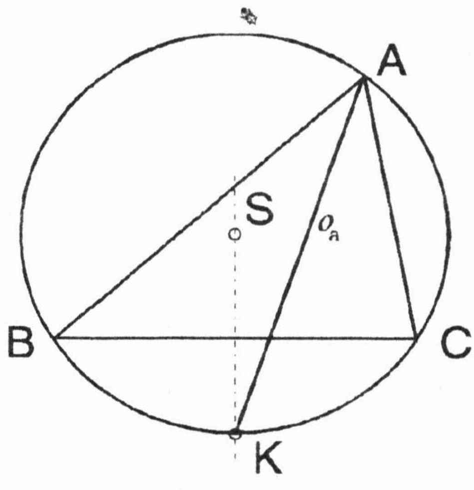
1. T = B -•- C ,
2. | ∢BAO | = | ∢CAO |.



Obr. 1

(Tu i ďalej X -•- Y označuje stred dvojice bodov X,Y.) Zosúladiť oba tieto vzťahy a nájsť trik ako body B a C zostrojiť sa mi vôbec nedarilo. Neúspešný boj s úlohou mi trval dlho možno i mesiac. Potom som kdesi uvidel obrázok 2 a naraz sa mi rozjasnilo.

Do obrázku 1 som dokreslil kružnicu k a na nej bod K, v ktorom sa pretína priamka AO s osou úsečky BC. Z takto dokresleného obrázka ihneď vidieť celú konštrukciu: zostrojí sa bod K, potom stred S a napokon kružnica k . Dlho hľadané riešenie bolo sprevádzané radostným vzrušením objaviteľa. Geometrický vzťah, znázornený obrázkom 2 mi pevne utkvel v pamäti a podnes je pre mňa prvoradým nápadom pri konštruovaní trojúholníka keď je daný prvok o_a. Dodajme, že prvok o_a patrí k najzáludnejším prvkom trojuholníka. Poučné čítanie o ňom je v knižke [2], str. 144-148.



Obr. 2

Na skúsenosť z detstva som si vzpomenul po mnohých rokoch, keď som sa zamýšľal nad tým, ako budem v experimentálnom vyučovaní v 5. až 8. ročníku učiť geometrické konštrukcie. Rozhodol som sa, že sa pokúsim sprostredkovať žiakom rovnako radostné objaviteľské zážitky, aké som mal šťastie zažiť ja. Zámer som chcel uskutečniť následujúcim štvorkrokovým postupom:

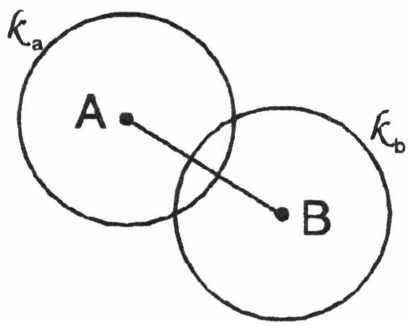
1. Učiteľ zadá žiakom náročnú *vstupnú úlohu* a
2. nechá ich niekoľko dní s úlohou zápasiť. Ak žiaci úlohu nevyriešia,
3. ukáže učiteľ žiakom *návodný obrázok*, ktorý je kľúčom k riešeniu úlohy. Obrázok predloží v takom kontexte, aby nebolo ihneď jasné, že ide o návod ku vstupnej úlohe. Najlepšie, ak novým kontextom bude opäť úloha - *návodná*.
4. Žiaci, ktorí v návodnom obrázku spoznajú kľúč k riešeniu vstupnej úlohy, zažijú vzrušenie objaviteľa.

Všeobecný scenár bolo treba naplniť konkrétnym obsahom. Prezrel som viaceré učebnice geometrie a pripravil si vyše tucta vhodných dvojúloh: vstupná + návodná. Tri z nich uveďme. Úlohy 2 a 3 sprostredkujú objav myšlienky osovej a stredovej súmernosti, úloha 4 navodzuje objav polohového vzťahu medzi ťažnicami a stranami trojuholníka.

Úloha 2a (vstupná). Daná je priamka b a mimo nej bod A. Použitím iba pravítka a kružítka (teda bez trojuholníka) zostroj kolmicu c z A ku b.

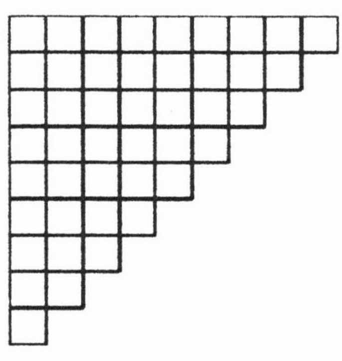
Úloha 2b (návodná). Na obrázku 3 zostroj os úsečky AB.

Keď žiak dokreslí v obrázku 3 spojnicu priesečníkov oboch kružníc, díva sa na návod riešenia úlohy 2a. Uvidí ho?

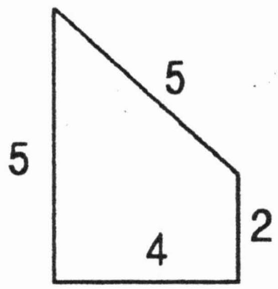


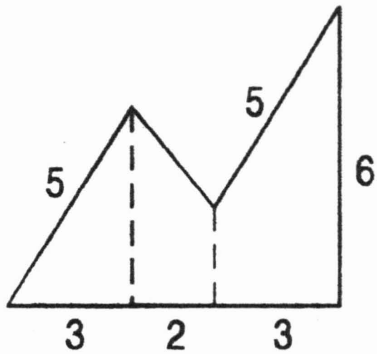
Obr. 3

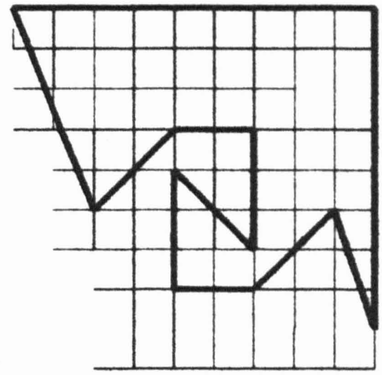
Úloha 3a (vstupná). Zisti aký je obsah "zubatého trojuholníka" na obrázku 4. Rovnakú úlohu vyrieš v prípade, že zubatý trojuholník bude mať stranu dlhú nie 9 , ale 17, alebo dokonca 76.


Obr. 4

Úloha 3b (návodná). Vystrihni dva rovnaké exempláre útvaru nakresleného na obrázku 5a. Zlož z nich obdĺžnik a vypočítaj obsah tohto obdĺžnika, aj obsah útvaru na obrázku 5a. Rovnakú úlohu vyrieš pre útvary nakreslené na obrázkoch 5b aj 5c.







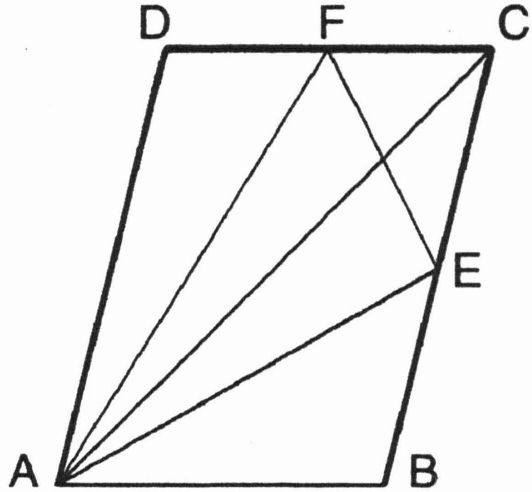
Obr. 5a Obr. 5b Obr. 5c

Úloha 4a (vstupná). Zostrojte trojuholník, ak poznáte dĺžky všetkých troch jeho ťažníc.

Úloha 4b (návodná). Daný je rovnobežník ABCD a body E = B -•- C a F = C -•- D. Dokážte, že strany trojuholníka AEF sú zhodné s ťažnicami trojuholníka ABC. Ďalej zistite pomer obsahov oboch uvedených trojuholníkov. Pozri obrázok 6.

Úloha 4b príliš otvorene poukazuje na príbuznosť s úlohou 4a. Druhá časť úlohy 4b má za cieľ zamaskovať trochu túto návodnosť, odlákaním pozornosti žiaka.

Skúsenosti, ktoré sme nadobudli s metódou dokresľovania obrázku sformulujeme do 5 bodov.



Obr. 6

A. Metóda navodzujúca akt objavu v štvorkrokovom postupe:
náročná vstupná úloha -> pokusy žiaka o jej vyriešenie -> návodná situácia v inom kontexte -> objav riešenia
sa neobmedzuje iba na geometriu. Jej použitie je podstatne širšie. Môže byť (a aj bola) použitá pri aritmetike, algebre, kombinatorike,...

Z uvedených dôvodov sme upravili terminológiu. Pomenovanie *Metóda dokresľovania obrázku* sme vyhradili pre postup, keď sa určitá geometrická väzba, ukrytá v obrázku manifestuje tým, že sa do obrázku niečo dokreslí.

Výukovú technológiu opísanú hornou schémou pracovne voláme *Metóda inokontextového návodu.*

B. Najnáročnejšou úlohou učiteľa pri používaní metódy inokontextové ho návodu je uskutečniť bod 2. Ak sa do riešenia úlohy samostatne pustí iba jeden či dvaja žiaci, nesplní metóda želaný účel. Ako ale docieliť to, aby sa čo najviac, dajme tomu aspoň 8-10 žiakov samostatne pustilo do riešenia? Podľa našich skúseností učiteľ k tomu môže prispieť dvomi spôsobmi, uvedenými v nasledujúcich dvoch bodoch.

C. Prvý spôsob môžeme pomenovať *Metaprezentácia úlohy*. Rozumieme tým postup v ktorom učiteľ, skôr ako úlohu sformuluje, rozpovie žiakom svoju osobnú skúsenosť s riešením úlohy.

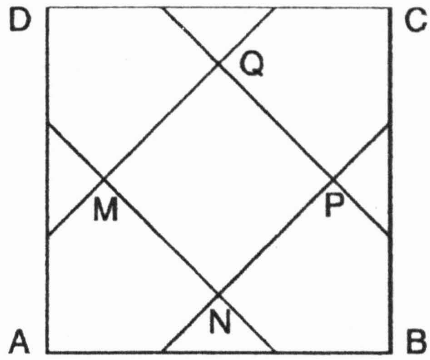
V našom prípade učiteľ žiakom porozpráva, ako sa kedysi sám s úlohou mocoval a ako náhodne raz uvidel obrázok, ktorý mu vnukol myšlienku riešenia.
Učiteľ zdôrazní, že silný pocit radosti, ktorý pri objave riešenia zažil, bol odmenou za mnohodenné úsilie. Potom učiteľ ozrejmí žiakom myšlienku metódy a povie, že teraz im dá náročnú vstupnú úlohu; po niekoľkých dňoch ,ak nevyriešia, ukáže im i návodnú situáciu, ale neupozorní ich na to.

D. Druhý spôsob, ako docieliť, aby úlohu samostatne riešilo čo najviac žiakov, je zadať ju vo viacerých náročnosťou odstupňovaných variantách, aby každý žiak dostal úlohu primeranú jeho úrovni. Nie je ľahké také úlohy vytvoriť a často sa to učiteľovi nepodarí. Námaha vynaložená na hľadanie úloh nebola zbytočná. Zúročí sa v tom, že učiteľ hlboko prenikne do didaktickej podstaty skúmanej matematickej myšlienky. Dakedy sa podarí vytvoriť aspoň gradované návodné úlohy. To sme videli na úlohe 3b.

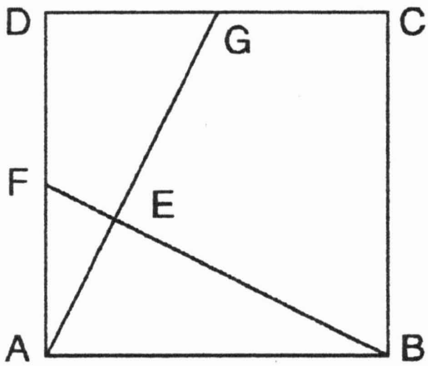
Autorovi sa podarilo v niekoľkých prípadoch vytvoriť gradovanú dvojicu či dokonce trojicu vstupných úloh. Príkladom je dvojica úloh 5a a 6a, ktoré uvádzame hlavne v súvislosti s iným javom, opísaným v nasledujúcom bode.

E. Stáva sa, že vstupnú úlohu, pripravenú ako cestu k objavu X, vyriešia žiaci objavom Y. Také úlohy sme si ukladali do "zlatého fondu úloh" a k objavu X,sme hľadali inú cestu. Uvedenú skúsenosť nadobudol autor, keď v 6.ročníku chcel žiakov doviesť k objavu metódy porovnávania obsahov pomocou "dláždenia". Vstupná i návodná úloha bola pripravená v ľahšom (úlohy 5) i ťažšom (úlohy 6) variante.

Úloha 5a (vstupná). Štvorec ABCD na obrázku 7 je rozdelený na 9 častí. Pritom každá strana je deliacími bodmi rozdelená na tretiny. Zisti, akú časť štvorca ABCD zaberá štvorec MNPQ.

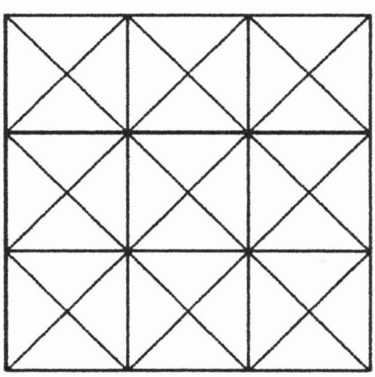


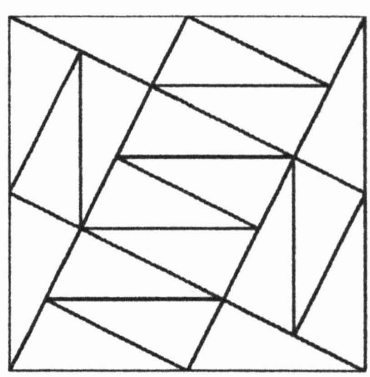
Obr. 7



Obr. 8

Úloha 6a (vstupná). Štvorec ABCD na obrázku 8 je rozdelený na 4 časti, pričom F = A-•-D, G = C-•-D. Zisti, koľko percent štvorca ABCD zaberá trojuholník AEF. Predpokladaný kľúč k riešeniu je naznačený na obrázkoch 9 a 10. Je založený na"dláždení"veľkého štvorca rovnakými dlaždicami.


Obr. 9


Obr. 10

V úlohe 5 ide o jednoduché pravidelné dláždenie rovnoramennými pravouhlými trojuholníkmi. V úlohe 6 ide o trikovejšie dláždenie trojuholníkmi zhodnými s trojuholníkom AEF. Z týchto obrázkov ihneď vidieť odpovede na obe úlohy:

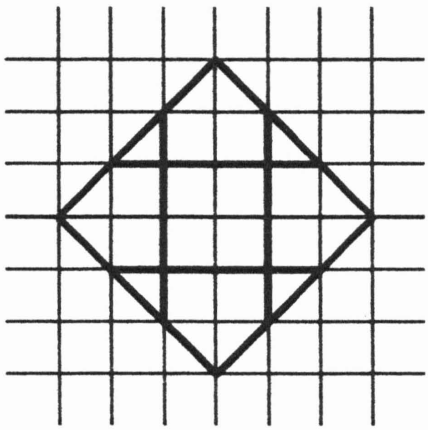
2/9 - úloha 5a, resp. 5% - úloha 6a.

Pripravené návodné úlohy, ktoré mali žiakov doviesť k obrázkom 9 a 10 vyzerali takto:

Úloha 5b (návodná). Z 36 rovnakých rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov zostroj štvorec.

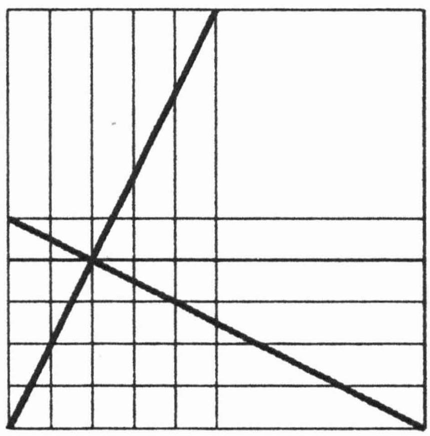
Úloha 6b (návodná). Z 20 rovnakých pravouhlých trojuholníkov s dĺžkami odvesien 2 a 1 zostroj štvorec.

Učiteľov zámer sa nevydaril, pretože žiaci obe úlohy vyriešili bez návodu a to inak ako učiteľ predpokladal. Úlohu 5a vyriešila Dada spôsobom, ktorý sama opísala slovami (pozri obrázok 11): "obrázok 9 som pootočene položila na štvorčekový papier a zistila som obsahy". Tento trik, ktorým sme neskôr riešili viaceré úlohy, sme nazvali *metóda vkladania obrázka na štvorčekový papier.*



Obr. 11

Edo, riešiteľ úlohy 6a, opísal svoj postup takto (obrázok 12): "Najprv som krížom cez F a G rozdelil štvorec na 4 štvorce. Potom som skúšal štvorčekovú sieť zahustiť tak, aby bod E bol mrežový bod. Keď som to zahustil trojnásobne, tak to nevyšlo. Ani štvornásobne nie. Ale vyšlo to päťnásobne. Teraz vidím, že trojuholník má obsah 5 štvorčekov a celý štvorec 100 štvorčekov. Teda je to 5%.". Edov postup, tiež neskôr viackrát použitý, sme pomenovali *zahusťovanie* štvorčekovej siete.



Obr. 12

Čitateľovi, ktorý sa rozhodne opísanú metodiku odskúšať, odporúčame pokúsiť sa vytvoriť vlastný scenár opísaného postupu pre svojich žiakov. Ako rozcvička môžu poslúžiť dve vstupné úlohy . Návodné situácie k nim nájdete na strane 8.

Úloha 7. Nech S je stred kružnicového oblúka AB a nech C je bod vnútri oblúka SB. Nech konečne D je päta kolmice spustenej z bodu S na AC. Potom $|AD| = |DC| + |CB|$. Dokážte.

Úloha 8. Tri priečky spájajúce stredy protiľahlých hrán štvorstena sú na sebe popár kolmé. Poznáme dĺžky týchto priečok. Vypočítajte objem štvorstena.

Literatúra:
[1] Hejný,M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2, SPN Bratislava, 1991.
[2] Kuřina,F.: Umění vidět v matematice, SPN Praha, 1989.
[3] Molnár,J.: Planimetrie. Informačně vzdělávací pedagogické centrum, Hradec Králové, 1992.

Konkrétní vyučování matematiky

M. Volfová, VŠP Hradec Králové

Stále znovu je pozorováno, že mnohé partie učiva (a to nejen matematiky) jsou brzy u řady žáků z velké části zapomenuty nebo jsou nepoužitelné k aplikaci a to i tehdy , když jejich výkladu a procvičování bylo věnováno nemálo pozornosti, času a úsilí.

Teorie konkrétního vyučování matematiky odkrývá jako jednu z příčin nedostatky v samém procesu poznávání a to v té části, kterou Hejný [viz 1] nazývá "tvorba separovaných modelů" - získávání zkušeností. Nejde tedy o věc zcela neznámou. Již adepti učitelství ve své učebnici teorie vyučování matematice jsou upozorňováni na to, že i kvantita zkušeností je nutným předpokladem toho, aby žák k okamžiku poznání vůbec dospěl, že zanedbání některých etap poznávacího procesu (nejčastěji to bývá právě tvorba separovaných modelů nebo nedostatky v motivaci) vede k deformaci poznávacího procesu, že pak dochází jen k formálnímu poznání. Ztráta konkrétní zkušenosti vzhledem k osvojované látce bývá též nejčastějším důvodem nedbalého, nekritického žákovského zacházení s čísly, s početními operacemi, uvádění nesmyslných odpovědí typu "chodec šel rychlostí 320 km/h" atp.

Konkrétní vyučování matematiky se zaměřuje právě na tuto část poznávacího procesu a lze jej definovat jako souvislou, trpělivou výstavbu zkušenostního oboru žáků.

Jde v něm o to, aby studovaná část matematiky byla žákovi vlastní, aby v ní viděl použitelný obsah, aby se do ní z vlastního rozhodnutí chtěl vnořit, nalézat smysl každého tématu. To má být pro něj stále spojeno s nějakým konkrétním cílem, např.: