Rozhledy matematicko-fyzikální

Kritérium dělitelnosti sedmi

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 4, 48–51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152005

MATEMATICKÉ OŘÍŠKY

Kritérium dělitelnosti sedmi

Tentokrát úkol pro čtenáře souvisí s článkem Josého Marciala Nájarese Romera: *Zobecnění kritéria dělitelnosti třemi a devíti* (strana 43). Konkrétně máme pro čtenáře za úkol:

Dokažte následující kritérium dělitelnosti sedmi!

Věta. *Nechť n je přirozené číslo s desítkovým zápisem $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)$, tj.*

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

pak n je dělitelné sedmi právě tehdy, když $m - 2a_0$ je dělitelné sedmi, kde m je číslo s desítkovým zápisem $(a_k a_{k-1} \dots a_1)$.

Příklad. Použijme kritérium dělitelnosti sedmi. Číslo 976 781 260 je dělitelné sedmi, právě když je sedmi dělitelné číslo

$$97\,678\,126 - 2 \cdot 0 = 97\ 678\,126.$$

Použijeme kritérium znovu. Číslo 97 678 126 je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi

$$9\,767\,812 - 2 \cdot 6 = 9\,767\,800.$$

Znovu použijeme kritérium: 9 767 800 je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi 976 780, a to je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi 97 678. A to je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi

$$9\,767 - 2 \cdot 8 = 9\,751.$$

A to je dělitelné sedmi, právě když je sedmi dělitelné $975 - 2 \cdot 1 = 973$. A to je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi $97 - 2 \cdot 3 = 91$. A to je dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi $9 - 2 \cdot 1 = 7$. Jelikož výsledek je dělitelný sedmi, je sedmi dělitelné i původní číslo 976 781 260.

A ještě navazující úkol: *Vymyslete nějaké vlastní šikovné kritérium dělitelnosti sedmi!*

* * * * *

Minule měli čtenáři za úkol vysvětlit, proč najde Mařenka i Jeníček v následující hře poklad.

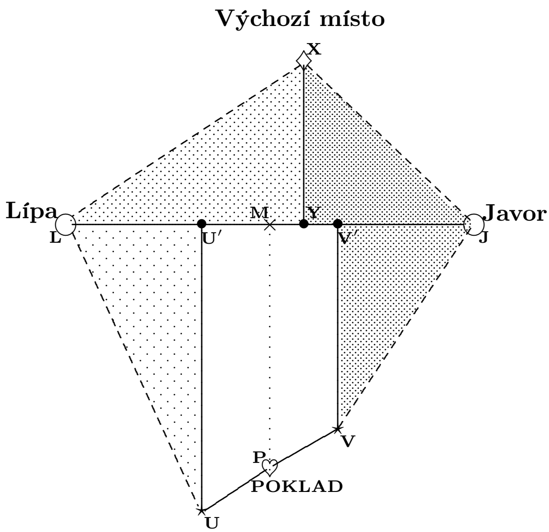
Na louce je lípa a javor, vzdálené od sebe 30 metrů. Instrukce jsou následující:

- Zaujmi libovolné místo.
- Z tohoto místa vykroč přímo k lípě.
- Tam se otoč doleva o 90° a přímočaře pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od lípy.
- Toto místo označ kolíkem.
- Vrať se do výchozího místa.
- Odtud vykroč přímo k javoru.
- Tam se otoč doprava o 90° a pokračuj v chůzi, až dosáhneš vzdálenosti rovné vzdálenosti výchozího místa od javoru.
- Toto místo označ kolíkem.
- Poklad nalezneš na půlicím bodě úsečky spojující oba kolíky.

Jeníček a Mařenka si vybrali dva různé výchozí body. Přesto našli poklad oba dva. *Jak je to možné?*

Řešení:

Úloha je adresována základním školám. Jednoduchý rozbor úlohy dává okamžité elementární řešení dostupné žákům těchto škol. Následující obrázek situaci ilustruje (viz též: `https://www.geogebra.org/m/eddqnpgr` nebo `https://www.geogebra.org/m/sfzyhdm2`).



Na obrázku jsou vyznačeny 4 pravoúhlé trojúhelníky: Trojúhelníky LYX a $UU'L$ jsou shodné, neboť ramena úhlů $\sphericalangle ULU'$ a $\sphericalangle LXY$ jsou na sebe kolmá a délky stran LU a XL se rovnají. Ze stejného důvodu jsou shodné trojúhelníky JXY a VJV'. Proto

$$|LU'| = |XY| = |V'J|,$$

odkud

$$|LM| = |JM| = \frac{1}{2}|LJ|$$

a

$$|MP| = \frac{1}{2}(|UU'| + |VV'|) = \frac{1}{2}(|LY| + |JY|) = \frac{1}{2}|LJ|.$$

Středoškoláci se znalostí základů analytické geometrie mohou úlohu vyřešit následujícím způsobem.

Bez újmy na obecnosti označíme souřadnice lípy $L = (0, 0)$ a javoru $J = (d, 0)$. Výchozí bod je $X = (x, y)$. Otočit se doleva o $90°$ u lípy a jít od ní stejnou vzdálenost znamená přičíst k L vektor kolmý na $X - L$ a stejné velikosti jako $X - L$. Tím se dostaneme do bodu

$$U = (0, 0) + (y, -x) = (y, -x).$$

Podobně otočit se doprava o $90°$ u javoru a jít od něj stejnou vzdálenost znamená přičíst k J vektor kolmý na $X - J$ a stejné velikosti jako $X - J$. Tím se dostaneme do bodu

$$V = (d, 0) + (-y, x - d) = (d - y, x - d).$$

Poklad leží na půli cesty mezi U a V, což je bod o souřadnicích

$$\frac{U + V}{2} = \frac{1}{2}\left[(y, -x) + (d - y, x - d)\right] = \frac{1}{2}(d, -d).$$

Středoškoláci se znalostí komplexních čísel mohou využít faktu, že násobení komplexní jednotkou i znamená otočení roviny kolem bodu $(0, 0)$ o $90°$ v kladném smyslu, viz níže.

Řešení Pavla Pokorného, člena redakční rady:

Situaci v rovině lze popsat komplexními čísly. Rozdíl $A - B$ dvou komplexních čísel je komplexní číslo, které vyjadřuje krok (posunutí, translaci, vektor) od bodu B do bodu A. Vynásobení kroku komplexní jednotkou i otočí tento krok o 90 stupňů proti směru hodinových ručiček, vynásobení číslem $-\mathrm{i}$ otočí o 90 stupňů ve směru hodinových ručiček.

Označme výchozí polohu komplexním číslem X, polohu lípy číslem L a polohu javoru číslem J. Krok od lípy do výchozí polohy je $X-L$. Tento krok otočený o 90 stupňů ve směru hodinových ručiček je $-\mathrm{i}\,(X-L)$. Když tento krok uděláme od lípy, dostaneme se do bodu $L-\mathrm{i}\,(X-L)$. Podobně když půjdeme od javoru dostaneme se do bodu $J+\mathrm{i}\,(X-J)$. A půlicí bod úsečky spojující oba kolíky je

$$\frac{L-\mathrm{i}\,(X-L)+J+\mathrm{i}\,(X-J)}{2}=\frac{L+J}{2}+\mathrm{i}\,\frac{L-J}{2},$$

tedy bod, do kterého se dostaneme, když ze středu úsečky LJ půjdeme kolmo s délkou kroku polovina této úsečky, nezávisle na výchozím bodu X.

* * * * *

SKALÁRY A VEKTORY

Jednou večer, když na gauči
sektorovém,
přemítal jsem o prostoru
vektorovém
a mocně jsem nad problémem
namáhal svůj um,
pohled se mi svezl náhle
na akvárium.
V jeho vodách zcela jako
na potvoru
nebyla pražádná stopa
po vektoru,
skaláry tam jenom
v hejnu plavaly,
vektorové rozjímání
ignorovaly.
Od té doby netajím se
názorem:
Akvárium je skalárním
prostorem!

Emil Calda[*)]

[*)] *Úvod do obecné teorie prostoru,* Karolinum, Praha, 2003