Pavel Tlustý

Lichá čísla ve zlomcích ještě jednou

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 4, 39–43

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152003`

Lichá čísla ve zlomcích ještě jednou

Pavel Tlustý, Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Cílem příspěvku je ukázat jednoduchý způsob sčítání posloupností po sobě jdoucích lichých čísel. V článku [1] se takové identity dokazují manipulativně, tj. úpravou příslušných algebraických výrazů (konečných sum po sobě jdoucích lichých čísel). Podívejme se nyní, jak lze tytéž identity (a mnohé jiné) zdůvodnit pomocí vhodného obrázku.

V článku [1] jsou postupně dokázány následující identity:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \ldots = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{2n}(2k-1)} = \frac{1}{3}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{3+5} = \frac{1+3}{5+7+9+11} = \ldots = \frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{3n}(2k-1)} = \frac{1}{8}, \tag{2}$$

$$\frac{1+3}{5} = \frac{1+3+5+7}{9+11} = \ldots = \frac{\sum_{k=1}^{2n}(2k-1)}{\sum_{k=2n+1}^{3n}(2k-1)} = \frac{4}{5}, \tag{3}$$

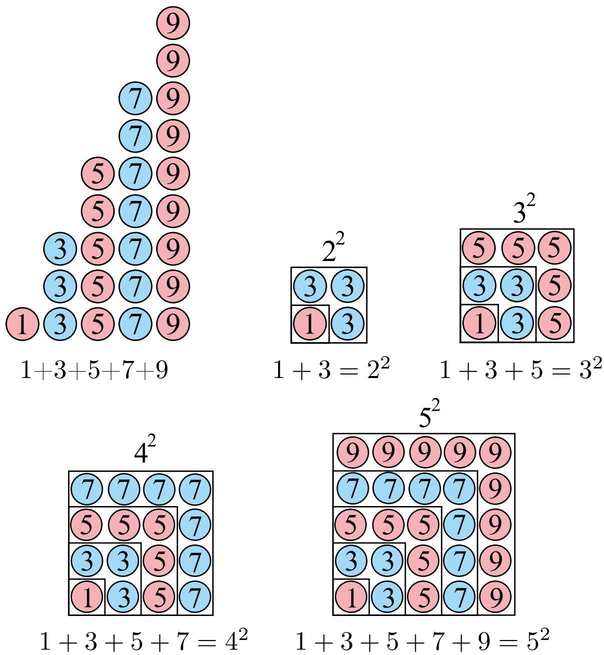
$$\frac{1+3+5+7+9}{11+13} = \frac{1+3+\ldots+19}{21+23+25+27} = \ldots = \frac{\sum_{k=1}^{5n}(2k-1)}{\sum_{k=5n+1}^{7n}(2k-1)} = \frac{25}{24}. \tag{4}$$

Ukažme si, jak lze pomocí obrázku ověřit jejich platnost.

Již od starověku je známo, že

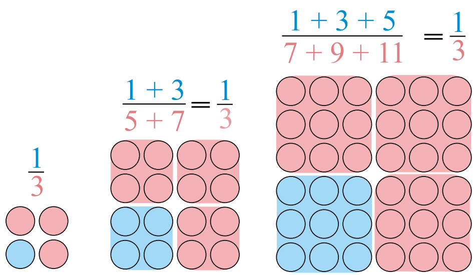
$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2. \tag{5}$$

Platnost (5) lze prokázat mnoha způsoby. Použijeme zdůvodnění, které uváděl již řecký matematik Nicomachus (60–120). Na obr. 1 vidíme, jak postupným „zalamováním“ jednotlivých sloupců z levého obrázku, dostaneme součty prvních pěti lichých čísel.



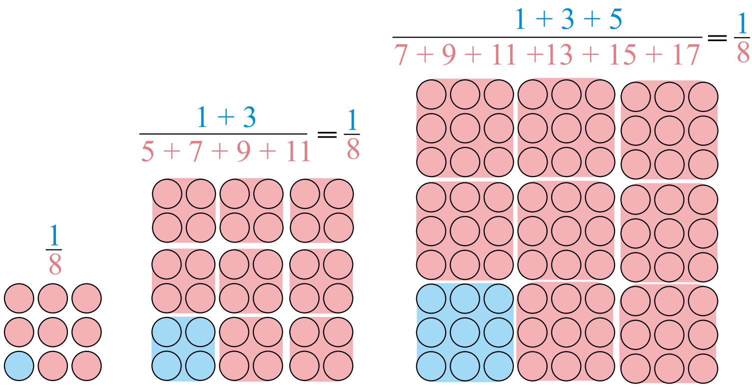
Obr. 1: Zdůvodnění rovnosti (5)

Podobně zdůvodníme identity (1)–(4). V rovnosti (1) je v každém čitateli stejný počet sčítanců jako ve jmenovateli. Hledáme tedy podíl součtů členů dvou stejně dlouhých konečných posloupností. Proto dělíme strany každého čtverce na dvě poloviny. Platnost (1) je zřejmá z následujícího obr. 2 (součet prvních n lichých čísel je vyznačen modře, součet následujících n lichých čísel je vyznačen červeně).



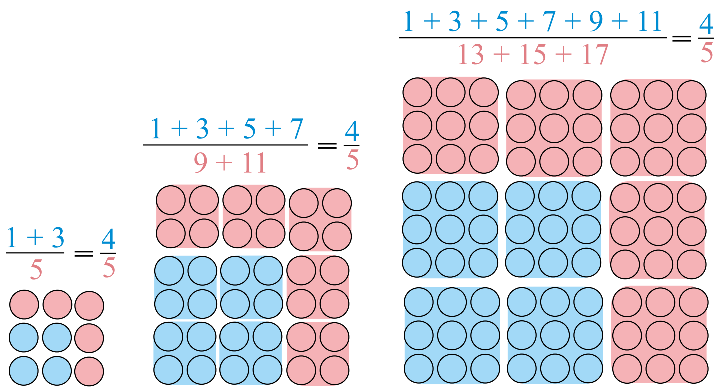
Obr. 2

V rovnostech (2), resp. (3), je v každém čitateli resp. jmenovateli dvojnásobný počet sčítanců než ve jmenovateli resp. čitateli. Strany každého čtverce tedy budeme dělit na tři stejné části. Platnost rovnosti (2) vyplývá z obr. 3:



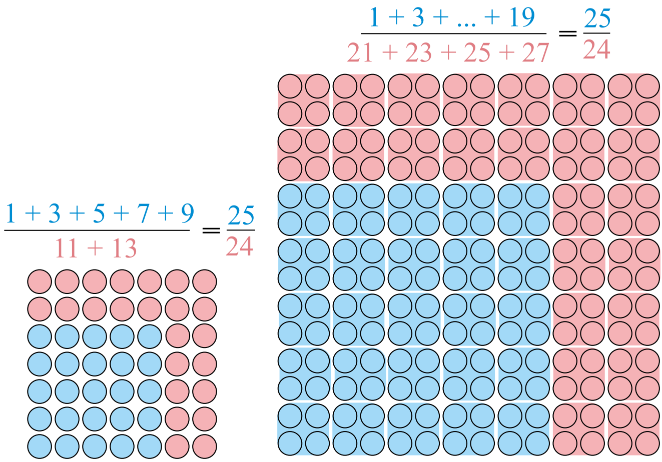
Obr. 3

zatímco zdůvodněním rovnosti (3) je obr. 4:



Obr. 4

V rovnosti (4) je poměr počtu sčítanců v čitateli a jmenovateli 5 : 2. Proto budeme každý čtverec rozdělovat na čtverečky 7×7, viz obr. 5, který zároveň ukazuje, proč je uvedená rovnost pravdivá.



Obr. 5

Jiné „vybarvení“ čtverečků ve čtverci 7×7 vede např. ke zlomkům $\frac{1}{48}$, $\frac{4}{45}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{16}{33}$, čímž dostaneme identity:

$$\frac{1}{3+5+7+9+11+13}=\frac{1+3}{5+7+\ldots+25+27}=\ldots=$$
$$=\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{7n}(2k-1)}=\frac{1}{48},$$

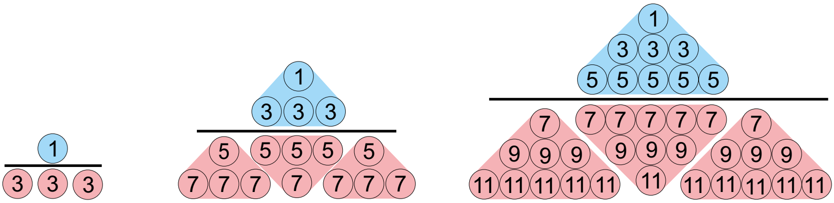
$$\frac{1+3}{5+7+9+11+13}=\frac{1+3+5+7}{9+11+\ldots+25+27}=\ldots=$$
$$=\frac{\sum_{k=1}^{2n}(2k-1)}{\sum_{k=2n+1}^{7n}(2k-1)}=\frac{4}{45},$$

$$\frac{1+3+5}{7+9+11+13}=\frac{1+3+\ldots+11}{13+15+\ldots+25+27}=\ldots=$$
$$=\frac{\sum_{k=1}^{3n}(2k-1)}{\sum_{k=3n+1}^{7n}(2k-1)}=\frac{9}{40},$$

$$\frac{1+3+5+7}{9+11+13}=\frac{1+3+\ldots+17}{19+\ldots+25+27}=\ldots=\frac{\sum_{k=1}^{4n}(2k-1)}{\sum_{k=4n+1}^{7n}(2k-1)}=\frac{16}{33}.$$

Analogickým způsobem je možné odvodit celou řadu dalších (i mnohem komplikovanějších) identit, jejichž důkaz obvyklým způsobem (formální úpravou konečných sum) by byl pracný a zdlouhavý.

Poznamenejme ještě, že v [2] najdeme jiné zdůvodnění rovnosti (1), které vychází z obr. 6.



Obr. 6

Čtenář si může vyzkoušet, jak by zdůvodnil výše uvedené identity pomocí takových „trojúhelníkových“ obrázků.

Literatura

[1] Čerňanová, V.: Nepárne čísla v zlomkoch. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 2, s. 1–6.

[2] Nelsen, R. B.: *Proofs Without Words*. The Mathematical Association of America, Washington, 1993.

Zobecnění kritéria dělitelnosti třemi a devíti

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova Praha 10

Kritéria dělitelnosti daného přirozeného čísla n prvočíslem 3 či číslem 9 jsou známá již ze základní školy:

Věta 1. *Číslo n, zapsané v desítkové soustavě, je dělitelné třemi (devíti) právě tehdy, když je součet všech jeho cifer dělitelný třemi (devíti).*

Tedy, je-li

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{1}$$

pak n je dělitelné třemi (devíti) právě tehdy, když součet $\sum_{t=0}^{k} a_t$ je dělitelný třemi (devíti).