

Eliška Hálová  
Problém čtyř bodů

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 68 (2023), No. 3, 137–155

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/151863>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2023

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*  
<http://dml.cz>

# Problém čtyř bodů

Eliška Hálová

*Abstrakt.* Článek se věnuje známé matematické úloze, která nese název problém čtyř bodů. Její řešení není jednoznačné, liší se podle volby pravděpodobnostního rozdělení bodů. Zde uvádíme řešení při volbě rovnoměrného rozdělení na množinách různých tvarů a porovnáváme jednotlivé výsledky.

## 1. Úvod

Jaká je pravděpodobnost, že čtyři náhodně zvolené body v rovině utvoří konvexní čtyřúhelník? Tak zní problém čtyř bodů, jehož autorem je britský matematik James Joseph Sylvester. Úloha je zajímavá především tím, že neexistuje její jednoznačné řešení. Hodnota pravděpodobnosti se totiž liší podle zvoleného rozdělení bodů. Uvedeme zde řešení při volbě rovnoměrného rozdělení, a to spojitého i diskrétního. Při spojitém rovnoměrném rozdělení se omezíme na konvexní kompaktní množiny různých tvarů, při diskrétním rovnoměrném rozdělení pak budeme pracovat na síti  $m \times n$  bodů. Vycházíme z bakalářské práce [3] na stejné téma.

## 2. Rovnoměrné rozdělení na čtverci

Uvažujme množinu  $K$  tvaru čtverce o straně délky 1. Budeme předpokládat, že náhodné body, označme je  $A, B, C, D$ , jsou vzájemně nezávislé a mají rovnoměrné rozdělení na  $K$ . Dále definujme náhodné jevy

$$\begin{aligned} CQ &:= [\text{zvolené body vytvořily konvexní čtyřúhelník}], \\ RQ &:= [\text{zvolené body vytvořily nekonvexní čtyřúhelník}] = CQ^c \end{aligned}$$

z anglického *convex quadrilateral* a *reentrant quadrilateral*. Potom můžeme psát

$$\begin{aligned} P(CQ) &= 1 - P(RQ) = \\ &= 1 - P([A \in \triangle_{BCD}] \cup [B \in \triangle_{ACD}] \cup [C \in \triangle_{ABD}] \cup [D \in \triangle_{ABC}]) = \\ &= 1 - 4 P(D \in \triangle_{ABC}) = 1 - 4 \frac{E[\lambda^2(\triangle_{ABC})]}{\lambda^2(K)} = 1 - 4 E[\lambda^2(\triangle_{ABC})], \end{aligned}$$

kde  $\lambda^2$  značí dvourozměrnou Lebesgueovu míru (tj. obsah rovinného útvaru). Při odvození rovnosti využíváme toho, že čtyřúhelník je nekonvexní tehdy, když se právě jeden z jeho vrcholů nachází uvnitř trojúhelníku utvořeného z vrcholů ostatních, a také geometrické interpretace pravděpodobnosti při rovnoměrném rozdělení. Vzorec

$$P(CQ) = 1 - 4 \frac{E[\lambda^2(\triangle_{ABC})]}{\lambda^2(K)} \quad (1)$$

navíc platí pro libovolnou konvexní kompaktní množinu  $K$  s kladnou mírou.

---

Bc. Eliška Hálová, Keplerova 30, 400 07 Ústí nad Labem, e-mail: [eliska.halova@gmail.com](mailto:eliska.halova@gmail.com)

Střední hodnotu obsahu trojúhelníku tvořeného body  $A, B, C$  můžeme vyjádřit jako

$$\mathbb{E}[\lambda^2(\triangle_{ABC})] = \iint_{A \in K} \iint_{B \in K} \iint_{C \in K} \lambda^2(\triangle_{ABC}).$$

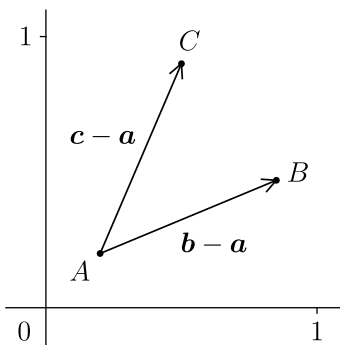
Pro vyjádření obsahu trojúhelníku pak použijeme známý vzorec

$$\lambda^2(\triangle_{ABC}) = \frac{1}{2} |\det(\mathbf{b} - \mathbf{a} \mid \mathbf{c} - \mathbf{a})| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \right|,$$

kde  $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$  a  $\mathbf{c} = (x_3, y_3)$  jsou vektory odpovídající bodům  $A, B, C$ . Obsah trojúhelníku totiž lze získat jako polovinu obsahu rovnoběžníku daného právě vektory  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  a  $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ . Dostáváme tedy rovnost

$$\mathbb{E}[\lambda^2(\triangle_{ABC})] = \iint_{A \in K} \iint_{B \in K} \iint_{C \in K} \frac{1}{2} |\det(\mathbf{b} - \mathbf{a} \mid \mathbf{c} - \mathbf{a})| \, dy_3 \, dx_3 \, dy_2 \, dx_2 \, dy_1 \, dx_1. \quad (2)$$

Další postup vyžaduje kvůli přítomnosti absolutní hodnoty rozdělení integrace na případy, kdy je determinant matice kladný a kdy záporný. Všimněme si, že determinant je kladný právě tehdy, když jsou vrcholy trojúhelníku pojmenovány proti směru pohybu hodinových ručiček, neboli když vektory  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  a  $\mathbf{c} - \mathbf{a}$  tvoří kladně orientovanou bázi  $\{\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}\}$  (viz obr. 1). Matice ve vzorci je totiž maticí přechodu od báze  $\{\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}\}$  ke kanonické bázi.



Obr. 1. Znáznorněná situace, kdy  $\{\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}\}$  tvoří kladně orientovanou bázi. Vidíme, že se z bodů vytvoří trojúhelník s vrcholy pojmenovanými proti směru pohybu hodinových ručiček

Rozdělíme integraci ve vzorci (2) na šest případů:

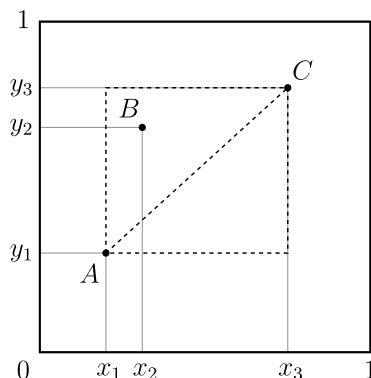
- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| (X1) $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ , | (X4) $x_2 \leq x_3 \leq x_1$ , |
| (X2) $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ , | (X5) $x_3 \leq x_1 \leq x_2$ , |
| (X3) $x_2 \leq x_1 \leq x_3$ , | (X6) $x_3 \leq x_2 \leq x_1$ . |

Každý ještě rozdělíme na šest podmnožností:

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| (Y1) $y_1 \leq y_2 \leq y_3$ , | (Y4) $y_2 \leq y_3 \leq y_1$ , |
| (Y2) $y_1 \leq y_3 \leq y_2$ , | (Y5) $y_3 \leq y_1 \leq y_2$ , |
| (Y3) $y_2 \leq y_1 \leq y_3$ , | (Y6) $y_3 \leq y_2 \leq y_1$ . |

Celkem dostáváme 36 různých kombinací nerovností. Chceme určit, ve kterých z těchto případů dostaneme kladný determinant a ve kterých naopak záporný. Zřejmě stačí vyřešit jen případ (X1) a jeho podmožnosti, ostatní případy dostáváme přejmenováním vrcholů trojúhelníku.

Nejprve vyřešíme kombinaci (X1) a (Y1). Determinant může být v tomto případě kladný i záporný. Kladný je, pokud se bod  $B$  nachází pod úhlopříčkou obdélníku  $[x_1, x_3] \times [y_1, y_3]$ , v opačném případě je pak záporný (viz obr. 2).



Obr. 2. Znázorněný případ (X1) a (Y1). Bod  $B$  se může nacházet nad i pod úhlopříčkou ohraničené oblasti. Podle toho se potom odvíjí znaménko determinantu

V případě kladného determinantu dostáváme integrál

$$\int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \int_{y_1}^1 \int_{y_1}^{y_1 + (x_2 - x_1) \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}} \frac{1}{2} \det(\mathbf{b} - \mathbf{a} \mid \mathbf{c} - \mathbf{a}) dy_2 dy_3 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1 =$$

$$= \int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \int_{y_1}^1 \frac{(x_2 - x_1)^2 (y_3 - y_1)^2}{4(x_3 - x_1)} dy_3 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1 = \dots = \frac{1}{1728},$$

pro záporný determinant bychom obdobně spočítali integrál

$$\int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \int_{y_1}^1 \int_{y_1 + (x_2 - x_1) \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}}^{y_3} -\frac{1}{2} \det(\mathbf{b} - \mathbf{a} \mid \mathbf{c} - \mathbf{a}) dy_2 dy_3 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1$$

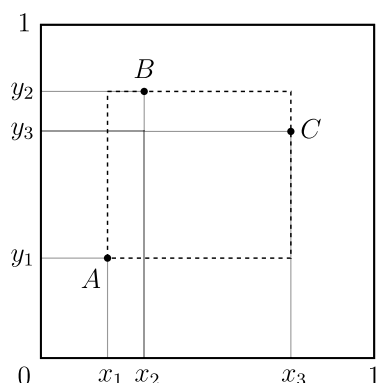
a obdrželi stejný výsledek. Dohromady dostáváme pro případ (X1) a (Y1) hodnotu  $2/1728 = 1/864$ .

Dále vyřešíme případ (X1) a (Y2). Při této kombinaci je determinant záporný (viz obr. 3), dostáváme tedy integrál

$$\int_0^1 \int_{x_1}^1 \int_{x_1}^{x_3} \int_0^1 \int_{y_1}^1 \int_{y_1}^{y_2} -\frac{1}{2} \det(\mathbf{b} - \mathbf{a} \mid \mathbf{c} - \mathbf{a}) dy_3 dy_2 dy_1 dx_2 dx_3 dx_1 = \frac{1}{384}.$$

Podobně v případech (X1) a (Y3), (Y4) nebo (Y5) dostáváme hodnotu  $1/384$ , v případech (X1) a (Y6) pak opět  $1/864$ . Celkem tedy získáváme

$$\mathbb{E}[\lambda^2(\triangle_{ABC})] = 6 \left( \frac{2}{864} + \frac{4}{384} \right) = \frac{11}{144}.$$



Obr. 3. Znázorněný případ (X1) a (Y2). Vidíme, že touto kombinací vzniká trojúhelník s vrcholy pojmenovanými po směru pohybu hodinových ručiček

Pravděpodobnost, že body  $A, B, C, D$  s rovnoměrným rozdělením na jednotkovém čtverci utvoří konvexní čtyřúhelník, je potom rovna

$$P(CQ) = 1 - 4 E[\lambda^2(\triangle_{ABC})] = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36} \doteq 0,694.$$

### 3. Další tvary množiny a Croftonův vzorec

Jaká by byla hodnota pravděpodobnosti pro jiné tvary množiny  $K$ ? Nejprve si všimneme, že prosté afinní zobrazení  $f$  zachovává poměry měr množin. Pokud tedy  $f$  aplikujeme na množinu  $K$ , zjišťujeme ze vzorce (1), že pro množinu  $K$  a množinu  $f(K)$  se pravděpodobnost  $P(CQ)$  neliší. Jelikož již známe hodnotu pravděpodobnosti pro  $K$  tvaru čtverce, získáváme tak hodnotu pravděpodobnosti pro  $K$  tvaru libovolného rovnoběžníku.

Dále, pro  $K$  tvaru čtverce jsme spočítali pravděpodobnost přímo z definice střední hodnoty. Tento postup ale není pro jiné mnohoúhelníky ideální. Místo toho se využívá takzvaného Croftonova vzorce (viz [7], kap. 5). Uvádíme verzi upravenou pro náš případ.

**Tvrzení 1** (Crofton). *Nechť  $K \subset \mathbb{R}^2$  je konvexní kompaktní množina s kladnou mírou. Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na  $K$  a  $H$  je jev, který závisí na poloze  $X_1, \dots, X_n$ . Potom platí*

$$P(H) = P(H \mid X_1 \in \partial K),$$

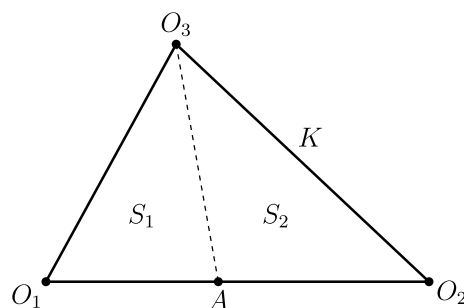
kde  $\partial K$  značí hranici množiny  $K$ .

V našem případě tvoří náhodný výběr body  $A, B, C, D$  a jevem  $H$  je utvoření konvexního čtyřúhelníku, tedy jev  $CQ$ . Croftonův vzorec potom říká, že pravděpodobnost jevu  $CQ$  je rovna pravděpodobnosti jevu  $CQ$  za podmínky, že bod  $A$  leží na hranici

množiny  $K$ . Dále stejně jako při odvození rovnosti (1) dostáváme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(CQ) &= \mathbf{P}(CQ \mid A \in \partial K) = 1 - \mathbf{P}(RQ \mid A \in \partial K) = \\
 &= 1 - \mathbf{P}([B \in \triangle_{ACD}] \cup [C \in \triangle_{ABD}] \cup [D \in \triangle_{ABC}] \mid A \in \partial K) = \\
 &= 1 - 3 \mathbf{P}(D \in \triangle_{ABC} \mid A \in \partial K) = \\
 &= 1 - 3 \frac{\mathbf{E}[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid A \in \partial K]}{\lambda^2(K)}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Nyní ukážeme náznak postupu s využitím Croftonova vzorce pro  $K$  tvaru trojúhelníku. Postup přebíráme z knihy [7], str. 101–108. Předpokládáme, že bod  $A$  leží na hranici  $K$ , množinu pak můžeme rozdělit na dvě podmnožiny podle úsečky spojující  $A$  a protilehlý vrchol trojúhelníku. Podmnožiny označíme  $S_1$  a  $S_2$ , vrcholy trojúhelníku  $K$  označíme  $O_1, O_2, O_3$ . Vše je znázorněno na obr. 4.



Obr. 4. Množina  $K$  tvaru trojúhelníku rozdělená na dvě podmnožiny  $S_1, S_2$

Zafixujeme bod  $A$  a označíme střední hodnotu a pravděpodobnost při pevně zvoleném  $A$  jako  $\mathbf{E}_A$  a  $\mathbf{P}_A$ . Z věty o úplné střední hodnotě pak dostáváme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_A[\lambda^2(\triangle_{ABC})] &= \mathbf{E}_A[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B, C \in S_1] \mathbf{P}_A(B, C \in S_1) + \\
 &+ \mathbf{E}_A[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B \in S_1, C \in S_2] \mathbf{P}_A(B \in S_1, C \in S_2) + \\
 &+ \mathbf{E}_A[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B \in S_2, C \in S_1] \mathbf{P}_A(B \in S_2, C \in S_1) + \\
 &+ \mathbf{E}_A[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B, C \in S_2] \mathbf{P}_A(B, C \in S_2),
 \end{aligned}$$

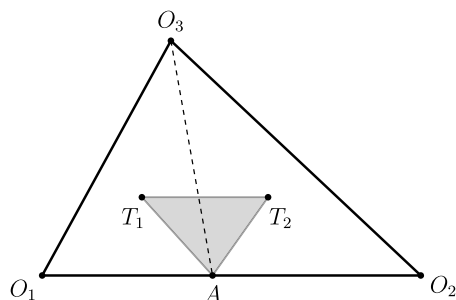
což je rovno

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{E}_A[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B, C \in S_1] \left( \frac{\lambda^2(S_1)}{\lambda^2(K)} \right)^2 + \\
 &+ 2 \mathbf{E}_A[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B \in S_1, C \in S_2] \frac{\lambda^2(S_1) \lambda^2(S_2)}{(\lambda^2(K))^2} + \\
 &+ \mathbf{E}_A[\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B, C \in S_2] \left( \frac{\lambda^2(S_2)}{\lambda^2(K)} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Dále je nutné vypočítat jednotlivé podmíněné střední hodnoty, například v případě  $B \in S_1$  a  $C \in S_2$  lze ukázat, že platí rovnost

$$\mathbb{E}_A [\lambda^2(\triangle_{ABC}) \mid B \in S_1, C \in S_2] = \lambda^2(\triangle_{AT_1T_2}) = \frac{1}{9}\lambda^2(K),$$

kde  $T_1$  a  $T_2$  jsou po řadě těžiště trojúhelníků  $S_1$  a  $S_2$  (viz obr. 5). Podrobné odvození této i ostatních středních hodnot může čtenář nalézt v práci [3], kap. 1.



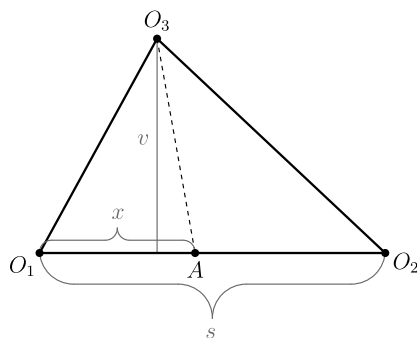
Obr. 5. Množina  $K$  s vyznačeným trojúhelníkem  $\triangle_{AT_1T_2}$

Celkem získáme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_A [\lambda^2(\triangle_{ABC})] &= \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2(S_1))^3}{(\lambda^2(K))^2} + \\ &+ \frac{2}{9} \frac{\lambda^2(S_1) \lambda^2(S_2)}{\lambda^2(K)} + \\ &+ \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2(S_2))^3}{(\lambda^2(K))^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Označme  $s$  délkou strany  $O_1O_2$ ,  $x$  vzdálenost bodů  $O_1$  a  $A$ , a  $v$  vzdálenost vrcholu  $O_3$  a strany  $O_1O_2$  (viz obr. 6). Zřejmě platí

$$\lambda^2(K) = \frac{1}{2} sv, \quad \lambda^2(S_1) = \frac{1}{2} xv, \quad \lambda^2(S_2) = \frac{1}{2} (s-x)v.$$



Obr. 6. Množina  $K$  s vyznačenými vzdálenostmi  $s = \|O_2 - O_1\|$ ,  $x = \|A - O_1\|$  a vzdáleností  $v = \text{dist}(O_3, O_1O_2)$

Pokud vše dosadíme do rovnosti (4), získáme

$$\mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})] = \frac{2v}{27s^2} (x^3 + (s-x)^3) + \frac{v}{9s} x(s-x).$$

Do této chvíle jsme uvažovali zafixovaný bod  $A$ . Nyní budeme opět brát bod  $A$  jako náhodnou veličinu. Abychom získali  $\mathbf{E} [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid A \in \partial K]$ , musíme spočítat střední hodnotu z  $\mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})]$ , tedy

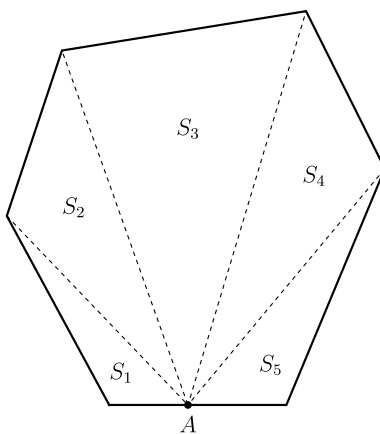
$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid A \in \partial K] &= \mathbf{E} \left[ \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})] \right] = \\ &= \int_0^s \frac{1}{s} \left( \frac{2v}{27s^2} (x^3 + (s-x)^3) + \frac{v}{9s} x(s-x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{18} sv = \frac{1}{9} \lambda^2(K). \end{aligned}$$

Výsledek dosadíme do rovnosti (3), odkud dostaneme

$$\mathbf{P}_\Delta(CQ) = 1 - 3 \frac{\frac{1}{9} \lambda^2(K)}{\lambda^2(K)} = \frac{2}{3} \doteq 0,667.$$

Stejný postup lze aplikovat na  $K$  tvaru obecného konvexního  $n$ -úhelníku. Nejprve uvažujeme pevně zvolené  $A \in \partial K$ , podle kterého rozdělíme  $K$  na  $n-1$  trojúhelníků  $S_1, \dots, S_{n-1}$  (viz obr. 7). Vyjádříme střední hodnotu  $\mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})]$  pomocí věty o úplné střední hodnotě jako

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B, C \in S_i] \mathbf{P}(B, C \in S_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} 2 \mathbf{E}_A [\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid B \in S_i, C \in S_j] \mathbf{P}(B \in S_i, C \in S_j) \end{aligned}$$



Obr. 7. Nepravidelný konvexní šestiúhelník rozdělený spojením bodu  $A$  na hranici s protilehlými vrcholy na pět trojúhelníků  $S_1, \dots, S_5$



a dopočítáme jednotlivé případy. Střední hodnotu  $E[\lambda^2(\Delta_{ABC}) \mid A \in \partial K]$  pak spočítáme jako

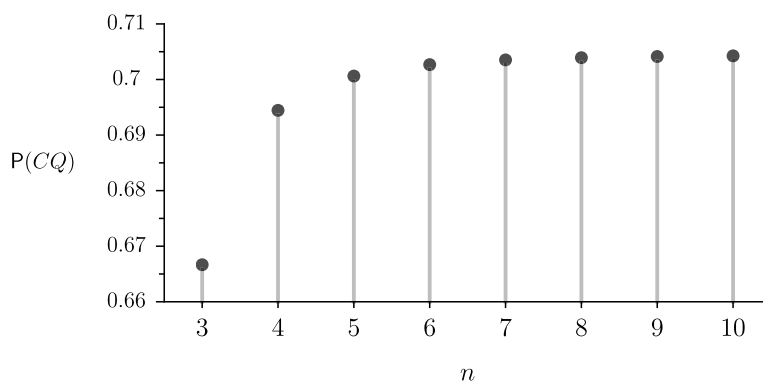
$$E \left[ E_A [\lambda^2(\Delta_{ABC})] \right],$$

výsledek nakonec dosadíme do rovnosti (3) a získáme  $P(CQ)$ .

Pro  $K$  tvaru pravidelného  $n$ -úhelníku odvodil astronom H. A. Alikoski vzorec

$$P(CQ) = 1 - \frac{9 \cos^2 \phi + 52 \cos \phi + 44}{9n^2 \sin^2 \phi}, \quad \phi = \frac{2\pi}{n},$$

jeho odvození lze nalézt v knize [7], str. 109–113. Můžeme si všimnout, že s rostoucím  $n$  se hodnota pravděpodobnosti zvětšuje (viz obr. 8).



Obr. 8. Graf znázorňující hodnotu pravděpodobnosti  $P(CQ)$  pro  $K$  tvaru pravidelného  $n$ -úhelníku pro několik možných hodnot  $n$

Pokud bychom pak chtěli získat pravděpodobnost  $P(CQ)$  pro  $K$  tvaru kruhu, zřejmě stačí uvažovat

$$\begin{aligned} P_{\circ}(CQ) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{9 \cos^2 \phi + 52 \cos \phi + 44}{9n^2 \sin^2 \phi} \right) = \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cos^2 \phi + 52 \cos \phi + 44}{9n^2 \sin^2 \phi} = \\ &= 1 - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (9 \cos^2 \phi + 52 \cos \phi + 44)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 9n^2 \sin^2 \phi} = \\ &= 1 - \frac{9 \cos^2 0 + 52 \cos 0 + 44}{9 \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \phi} = 1 - \frac{105}{9(2\pi)^2} = 1 - \frac{35}{12\pi^2} \doteq 0,704. \end{aligned}$$

Matematik W. Blaschke potom dokázal platnost následujícího tvrzení, které se neomezuje na pravidelné  $n$ -úhelníky. Jeho důkaz lze nalézt v článku [6], sekce 3.

**Tvrzení 2** (Blaschke). *Nechť  $K \subset \mathbb{R}^2$  je konvexní kompaktní množina s kladnou mírou. Označme  $P_K(CQ)$  pravděpodobnost, že čtyři nezávislé stejně rozdělené náhodné body s rovnoměrným rozdělením na  $K$  utvoří konvexní čtyřúhelník. Potom platí*

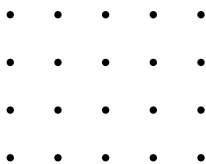
- $P_K(CQ) \geq P_{\Delta}(CQ)$ , přičemž rovnost nastává právě tehdy, když je  $K$  tvaru trojúhelníku,
- $P_K(CQ) \leq P_{\circ}(CQ)$ , přičemž rovnost nastává právě tehdy, když je  $K$  tvaru kruhu nebo elipsy.

#### 4. Diskrétní rovnoměrné rozdělení

Nyní uvažujme síť  $m \times n$  bodů, tedy množinu

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \{1, \dots, m\}, y \in \{1, \dots, n\}\}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Pro  $m = n = 1$  je  $1 \times 1$  síť zřejmě množina obsahující pouze bod  $(1, 1)$ , na obr. 9 pak můžeme vidět  $5 \times 4$  síť.



Obr. 9. Ukázka  $5 \times 4$  sítě

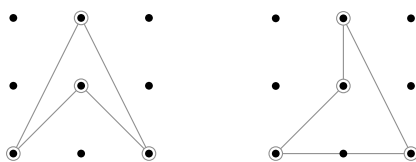
Předpokládejme dále, že body  $A, B, C, D$  jsou vzájemně nezávislé a mají diskrétní rovnoměrné rozdělení na dané  $m \times n$  síti. Zřejmě se může stát, že některé z bodů budou totožné, případně že budou ležet na jedné přímce. Tyto jevy mají při spojitém rovnoměrném rozdělení nulovou pravděpodobnost, proto jsme se jimi doposud nemuseli zabývat, ale při diskrétním rovnoměrném rozdělení tomu tak již není. Nebudeme tedy hledat odpověď k původnímu problému čtyř bodů, ale k jeho následující modifikované formě:

*Jaká je pravděpodobnost, že body  $A, B, C, D$  na  $m \times n$  síti vytvoří konvexní objekt?*

Pojem *konvexní objekt* nám objasní následující definice.

**Definice 1.** Řekneme, že body  $A, B, C, D$  ležící na  $m \times n$  síti vytvořily *nekonvexní objekt*, jestliže je některý z nich vnitřním bodem konvexního obalu bodů ostatních. V opačném případě řekneme, že  $A, B, C, D$  vytvořily *konvexní objekt*.

Je dobré si uvědomit, že při vytvoření nekonvexního objektu nezáleží na tom, jakým způsobem mezi body položíme strany, záleží pouze na dané kombinaci bodů. Znázorňuje to obr. 10.



Obr. 10. Vidíme dva různé způsoby umístění stran mezi body  $3 \times 3$  sítě. Ačkoliv se výsledné čtyřúhelníky liší, jde o stejnou kombinaci bodů, jedná se tedy o tentýž nekonvexní objekt

Definujme opět náhodné jevy

$$CO := [\text{zvolené body vytvořily konvexní objekt}],$$

$$RO := [\text{zvolené body vytvořily nekonvexní objekt}] = CO^C.$$

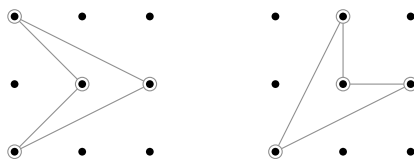
Pravděpodobnost, že na  $m \times n$  síti vytvoří body konvexní objekt, lze potom vyjádřit jako

$$P(CO) = 1 - P(RO) = 1 - \frac{24 S_{m \times n}}{(mn)^4},$$

kde  $S_{m \times n}$  značí počet všech různých nekonvexních objektů v  $m \times n$  síti vytvořených čtyřmi body bez ohledu na pojmenování vrcholů. Číslo  $24 = 4!$  pak reprezentuje počet všech způsobů, kterými lze ve čtyřúhelníku vrcholy pojmenovat. Pro získání pravděpodobnosti tedy stačí určit hodnotu  $S_{m \times n}$ .

Pokud  $m$  nebo  $n$  nabývá hodnoty 1 nebo 2, zřejmě platí  $S_{m \times n} = 0$ , tedy  $P(CO) = 1$ . Pro  $m = n = 3$  již nacházíme celkem osm kombinací bodů tvořících nekonvexní objekt (viz obr. 11), neboli  $S_{3 \times 3} = 8$ , odkud potom

$$P(CO) = 1 - \frac{24 S_{3 \times 3}}{9^4} = \frac{2\,123}{2\,187} \doteq 0,971.$$



Obr. 11. Znázorněny jsou jediné dvě kombinace bodů (až na rotaci) ve  $3 \times 3$  síti, které vytvoří nekonvexní objekt

Pro obecná  $m, n > 2$  odvodíme vzorec pro výpočet  $S_{m \times n}$ . Nejprve ale definujeme potřebné pojmy.

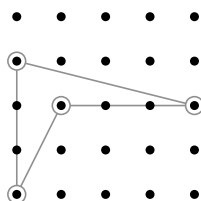
**Definice 2.** Uvažujme objekt tvořený body  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , z  $m \times n$  sítě. Definujme *šířku* objektu jako

$$\max \{ |x_i - x_j| + 1 \mid i, j \in \{1, \dots, k\} \}$$

a *výšku* objektu jako

$$\max \{ |y_i - y_j| + 1 \mid i, j \in \{1, \dots, k\} \}.$$

Každý nekonvexní objekt na  $m \times n$  síti má nějakou šířku  $s \in \{3, \dots, m\}$  a výšku  $v \in \{3, \dots, n\}$  (viz obr. 12). Projdeme postupně všechny hodnoty  $s, v$  a určíme, kolik nekonvexních objektů se šířkou  $s$  a výškou  $v$  se v  $m \times n$  síti nachází. K tomu zřejmě stačí určit, kolik nekonvexních objektů se šířkou  $s$  a výškou  $v$  se nachází v  $s \times v$  síti, a příslušné číslo potom vynásobit počtem možných umístění  $s \times v$  sítě do  $m \times n$  sítě.



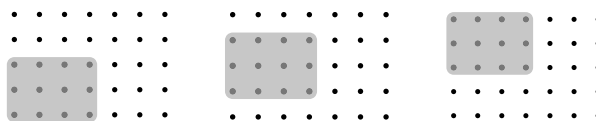
Obr. 12. Nekonvexní objekt v  $5 \times 5$  síti, jehož šířka je 5 a výška 4

Označme tedy  $B_{s \times v}$  počet všech nekonvexních objektů v  $s \times v$  síti, které mají šířku  $s$  a výšku  $v$ , a  $a_{s \times v}$  počet všech možných umístění  $s \times v$  sítě do  $m \times n$  sítě. Celkem dostáváme

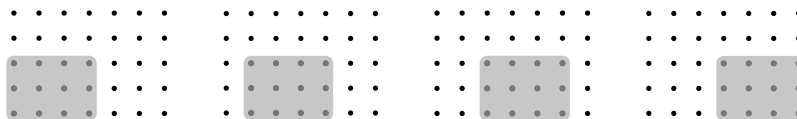
$$S_{m \times n} = \sum_{s=3}^m \sum_{v=3}^n a_{s \times v} B_{s \times v}.$$

Nejprve určíme hodnotu  $a_{s \times v}$ . Pokud umístíme  $s \times v$  síť do levého dolního rohu  $m \times n$  sítě, můžeme ji zřejmě  $(m-s)$ -krát posunout o jeden bod doprava a  $(n-v)$ -krát o jeden bod nahoru (viz obr. 13). Dohromady pak

$$a_{s \times v} = (m-s+1)(n-v+1), \quad s \in \{3, \dots, m\}, \quad v \in \{3, \dots, n\}.$$



(i) Posun  $4 \times 3$  sítě ve vertikálním směru

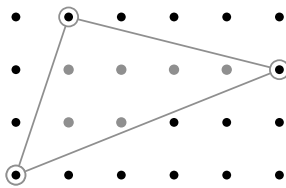


(ii) Posun  $4 \times 3$  sítě v horizontálním směru

Obr. 13. Ukázka možných vertikálních a horizontálních posunutí  $4 \times 3$  sítě v  $7 \times 5$  síti, pokud je počáteční poloha v levém dolním rohu. Dohromady dostáváme  $3 \cdot 4 = 12$  možných umístění  $4 \times 3$  sítě do  $7 \times 5$  sítě

Dále chceme určit hodnotu  $B_{s \times v}$  pro  $s \in \{3, \dots, m\}$  a  $v \in \{3, \dots, n\}$ . Uvažujme tedy  $s \times v$  síť. Hodnotu  $B_{s \times v}$  odvodíme tak, že nalezneme všechny trojúhelníky v  $s \times v$  síti se šířkou  $s$  a výškou  $v$  a následně spočítáme body sítě nacházející se uvnitř daných trojúhelníků (viz obr. 14).

Aby měl trojúhelník v  $s \times v$  síti šířku  $s$  a výšku  $v$ , zřejmě se alespoň jeden z jeho vrcholů musí nacházet v rohu sítě. Nechť se jedná o roh  $(1, 1)$ , umístění do ostatních rohů získáme případným zrcadlením. Další postup rozdělíme na čtyři možnosti (až na případná zrcadlení) podle polohy zbylých dvou vrcholů trojúhelníku:



Obr. 14. Tři body na  $6 \times 4$  síti tvořící trojúhelník se šířkou 6 a výškou 4. Uvnitř trojúhelníku leží 6 bodů, přidáním každého z nich k dané trojici bodů dostáváme 6 různých nekonvexních objektů

(i) Jako druhý vrchol zvolíme bod  $(1, v)$ . Třetí vrchol volíme z množiny

$$\{(s, j) \mid j \in \{2, \dots, n-1\}\}.$$

(ii) Jako druhý vrchol zvolíme bod  $(s, 1)$ . Třetí vrchol volíme z množiny

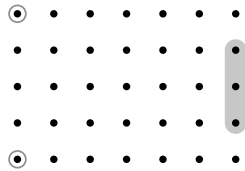
$$\{(i, v) \mid i \in \{2, \dots, m-1\}\}.$$

(iii) Druhý vrchol volíme z množiny  $\{(s, j) \mid j \in \{2, \dots, n-1\}\}$ , třetí vrchol z množiny  $\{(i, v) \mid i \in \{2, \dots, m-1\}\}$ .

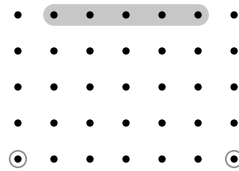
(iv) Jako druhý vrchol zvolíme bod  $(s, v)$ . Třetí vrchol volíme z množiny

$$\left\{ (i, j) \mid i \in \{2, \dots, m\}, j \in \left\{ 1, \dots, \left\lceil (v-1) \frac{(i-1)}{(m-1)} \right\rceil \right\} \right\}.$$

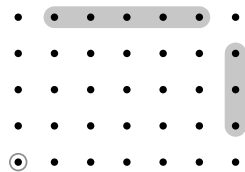
Jednotlivé možnosti můžeme vidět na obr. 15. Označme postupně  $M_{s \times v}^1, M_{s \times v}^2, M_{s \times v}^3$  a  $M_{s \times v}^4$  počet nekonvexních čtyřúhelníků při možnostech (i), (ii), (iii) a (iv). Z obr. 15



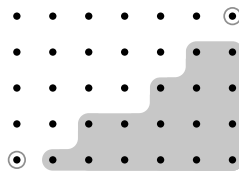
(i) Vyznačené vrcholy  $(1, 1)$ ,  $(1, v)$  a množina, ze které vybíráme třetí vrchol



(ii) Vyznačené vrcholy  $(1, 1)$ ,  $(s, 1)$  a množina, ze které vybíráme třetí vrchol



(iii) Vyznačený vrchol  $(1, 1)$  a množiny, ze kterých vybíráme druhý a třetí vrchol



(iv) Vyznačené vrcholy  $(1, 1)$ ,  $(s, v)$  a množina, ze které vybíráme třetí vrchol

Obr. 15. Jednotlivé možnosti (až na zrcadlení) umístění vrcholů trojúhelníku do  $7 \times 5$  sítě tak, aby měl trojúhelník šířku 7 a výšku 5

také vidíme, že při možnosti (i) lze každý nekonvexní objekt zrcadlit podle vertikální osy, při možnosti (ii) pak podle horizontální osy. Při možnostech (iii) a (iv) můžeme nekonvexní objekty zrcadlit podle vertikální i horizontální osy. Dohromady tedy dostáváme

$$B_{s \times v} = 2M_{s \times v}^1 + 2M_{s \times v}^2 + 4M_{s \times v}^3 + 4M_{s \times v}^4.$$

Zbývá určit hodnotu  $M_{s \times v}^k$  pro jednotlivá  $k = 1, 2, 3, 4$ . K výpočtu využijeme takzvaný Pickův vzorec. Díky němu lze lehce spočítat obsah složitých mnohoúhelníků s vrcholy ležícími na síti bodů. Důkaz následujícího tvrzení a jeho zajímavou aplikaci lze nalézt v článku [4].

**Tvrzení 3 (Pick).** *Nechť  $M$  je mnohoúhelník s vrcholy ležícími na nějaké síti bodů. Označme  $u$  počet bodů sítě, které jsou vnitřními body  $M$ , a  $h$  počet bodů sítě, které leží na některé ze stran mnohoúhelníku  $M$ . Potom platí*

$$\lambda^2(M) = u + \frac{h}{2} - 1.$$

V našem případě vzorec říká, že počet bodů sítě, které se nacházejí uvnitř trojúhelníku  $\Delta$  daného třemi body sítě, je roven

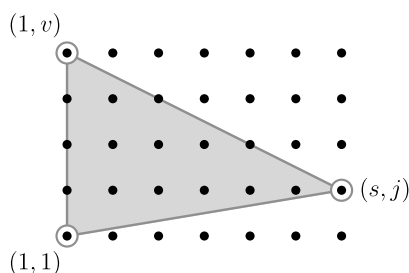
$$u = \lambda^2(\Delta) + 1 - \frac{h}{2}.$$

Tuto rovnost budeme využívat při dalších výpočtech. Dále si také všimneme, že pro body  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  ležící na síti obsahuje úsečka mezi těmito dvěma body právě

$$\text{NSD}(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) + 1$$

bodů sítě.

Nyní uvažujme možnost (i) rozložení vrcholů trojúhelníku na  $s \times v$  síti. Hledáme hodnotu  $M_{s \times v}^1$ . Vrcholy trojúhelníku jsou body  $(1, 1), (1, v)$  a  $(s, j)$  pro nějaké  $j \in \{2, \dots, v-1\}$  (viz obr. 16).



Obr. 16. Trojúhelník na  $s \times v$  síti daný body  $(1, 1), (1, v)$  a  $(s, j)$  pro nějaké  $j \in \{2, \dots, v-1\}$

Obsah trojúhelníku je  $\frac{1}{2}(s-1)(v-1)$ . Dále potřebujeme zjistit, kolik bodů sítě leží na hranici trojúhelníku, tuto hodnotu označíme  $h_j^1$ . Víme, že na úsečce spojující body  $(1, 1), (s, j)$  leží celkem  $\text{NSD}(s-1, j-1) + 1$  bodů, na úsečce spojující body

$(1, v)$ ,  $(s, j)$  leží celkem  $\text{NSD}(s-1, v-j) + 1$  bodů a na úsečce spojující body  $(1, 1)$ ,  $(1, v)$  leží zřejmě  $v$  bodů. Dohromady

$$h_j^1 = \text{NSD}(s-1, j-1) + \text{NSD}(s-1, v-j) + v - 1.$$

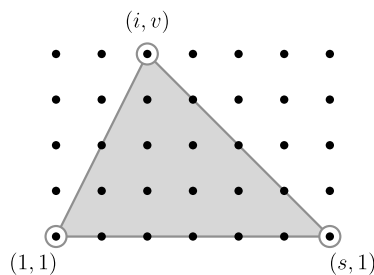
Počet bodů sítě, které leží uvnitř trojúhelníku, potom dle Pickova vzorce spočítáme jako

$$u_j^1 = \frac{1}{2} (s-1)(v-1) + 1 - \frac{h_j^1}{2}.$$

Celkem dostáváme

$$M_{s \times v}^1 = \sum_{j=2}^{v-1} u_j^1.$$

Dále uvažujme možnost (ii) rozložení vrcholů trojúhelníku na  $s \times v$  síti. Chceme spočítat hodnotu  $M_{s \times v}^2$ . Vrcholy trojúhelníku jsou body  $(1, 1)$ ,  $(s, 1)$  a  $(i, v)$  pro nějaké  $i \in \{2, \dots, s-1\}$  (viz obr. 17).



Obr. 17. Trojúhelník na  $s \times v$  síti daný body  $(1, 1)$ ,  $(s, 1)$  a  $(i, v)$  pro nějaké  $i \in \{2, \dots, s-1\}$

Obsah trojúhelníku je opět  $\frac{1}{2}(s-1)(v-1)$ . Obdobně jako při možnosti (i) odvodíme

$$h_i^2 = \text{NSD}(i-1, v-1) + \text{NSD}(s-i, v-1) + s - 1,$$

$$u_i^2 = \frac{1}{2}(s-1)(v-1) + 1 - \frac{h_i^2}{2}.$$

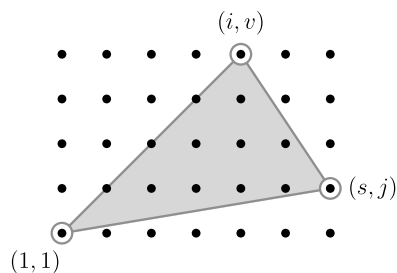
Celkem dostáváme

$$M_{s \times v}^2 = \sum_{i=2}^s u_i^2.$$

Nyní uvažujme možnost (iii) rozložení vrcholů trojúhelníku na  $s \times v$  síti. Hledáme hodnotu  $M_{s \times v}^3$ . Vrcholy trojúhelníku jsou body  $(1, 1)$ ,  $(i, v)$  a  $(s, j)$  pro nějaké  $i \in \{2, \dots, s-1\}$  a  $j \in \{2, \dots, v-1\}$  (viz obr. 18).

Obsah trojúhelníku získáme tak, že od hodnoty  $(s-1)(v-1)$  odečteme obsahy trojúhelníků daných dvěma vrcholy a příslušným rohem sítě. Dostáváme hodnotu

$$(s-1)(v-1) - \left( \frac{1}{2}(s-1)(j-1) + \frac{1}{2}(i-1)(v-1) + \frac{1}{2}(s-i)(v-j) \right).$$



Obr. 18. Trojúhelník na  $s \times v$  síti daný body  $(1, 1)$ ,  $(i, v)$  a  $(s, j)$  pro nějaké  $i \in \{2, \dots, s-1\}$  a  $j \in \{2, \dots, v-1\}$

Dále spočítáme body na hranici trojúhelníku, tuto hodnotu označíme  $h_{i,j}^3$ . Platí

$$h_{i,j}^3 = \text{NSD}(s-1, j-1) + \text{NSD}(i-1, v-1) + \text{NSD}(s-1, v-j).$$

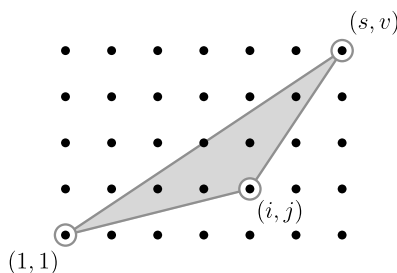
Z Pickova vzorce potom dostáváme

$$u_{i,j}^3 = (s-1)(v-1) - \frac{1}{2}((s-1)(j-1) + (i-1)(v-1) + (s-i)(v-j)) + 1 - \frac{h_{i,j}^3}{2}.$$

Celkem

$$M_{s \times v}^3 = \sum_{i=2}^{s-1} \sum_{j=2}^{v-1} u_{i,j}^3.$$

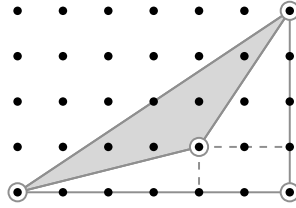
Nakonec uvažujme možnost (iv) rozložení vrcholů trojúhelníku na  $s \times v$  síti. Zbývá určit hodnotu  $M_{s \times v}^4$ . Vrcholy trojúhelníku jsou body  $(1, 1)$ ,  $(s, v)$  a  $(i, j)$  pro nějaké  $i \in \{2, \dots, s\}$  a  $j \in \left\{1, \dots, \left\lceil (v-1) \frac{(i-1)}{(m-1)} \right\rceil\right\}$  (viz obr. 19).



Obr. 19. Trojúhelník na  $s \times v$  síti daný body  $(1, 1)$ ,  $(s, v)$  a  $(i, j)$  pro nějaké  $i \in \{2, \dots, s\}$  a  $j \in \left\{1, \dots, \left\lceil (v-1) \frac{(i-1)}{(m-1)} \right\rceil\right\}$

Obsah trojúhelníku získáme tak, že od hodnoty  $\frac{1}{2}(s-1)(v-1)$  odečteme obsah objektu daného vrcholy trojúhelníku a příslušným rohem sítě. Tento objekt lze jednoduše rozdělit na tři části (viz obr. 20).





Obr. 20. Trojúhelník společně s objektem daným body  $(1, 1)$ ,  $(i, j)$ ,  $(s, v)$  a  $(s, 1)$ . Ten lze rozdělit na tři části, jejichž obsah již snadno spočítáme

Obsah trojúhelníku je tedy

$$\frac{1}{2}(s-1)(v-1) - \left( \frac{1}{2}(i-1)(j-1) + \frac{1}{2}(s-i)(v-j) + (s-i)(j-1) \right).$$

Počet bodů na hranici trojúhelníku, který označíme  $h_{i,j}^4$ , spočítáme jako

$$h_{i,j}^4 = \text{NSD}(s-1, v-1) + \text{NSD}(i-1, j-1) + \text{NSD}(s-i, v-j),$$

z Pickova vzorce potom

$$u_{i,j}^4 = \frac{1}{2}(s-1)(v-1) - \left( \frac{1}{2}(i-1)(j-1) + \frac{1}{2}(s-i)(v-j) + (s-i)(j-1) \right) + 1 - \frac{h_{i,j}^4}{2}.$$

Dohromady

$$M_{s \times v}^4 = \sum_{i=2}^s \sum_{j=1}^{\lfloor (v-1) \frac{(i-1)}{(m-1)} \rfloor} u_{i,j}^4.$$

Získali jsme předpis pro všechna  $M_{s \times v}^k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , tedy i vzorec pro výpočet  $S_{m \times n}$  pro libovolná  $m, n > 2$ . Výsledný vzorec pro  $m, n \in \mathbb{N}$  má pak tvar

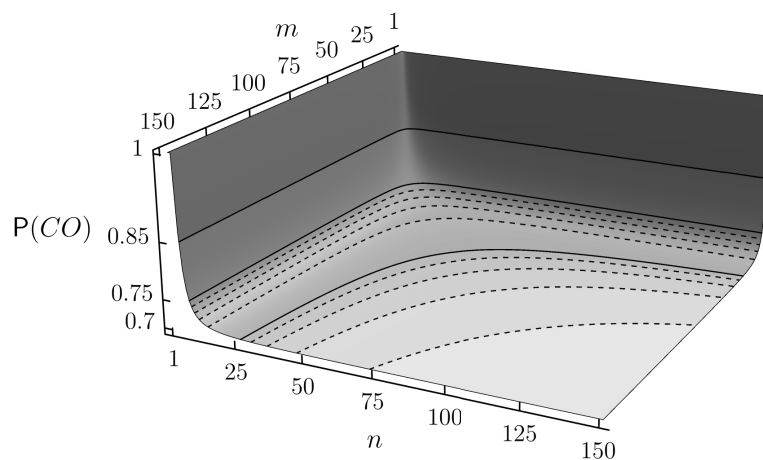
$$S_{m \times n} = \begin{cases} 0, & m \in \{1, 2\} \text{ nebo } n \in \{1, 2\}, \\ \sum_{s=3}^m \sum_{v=3}^n a_{s \times v} B_{s \times v}, & m, n > 2, \end{cases}$$

kde

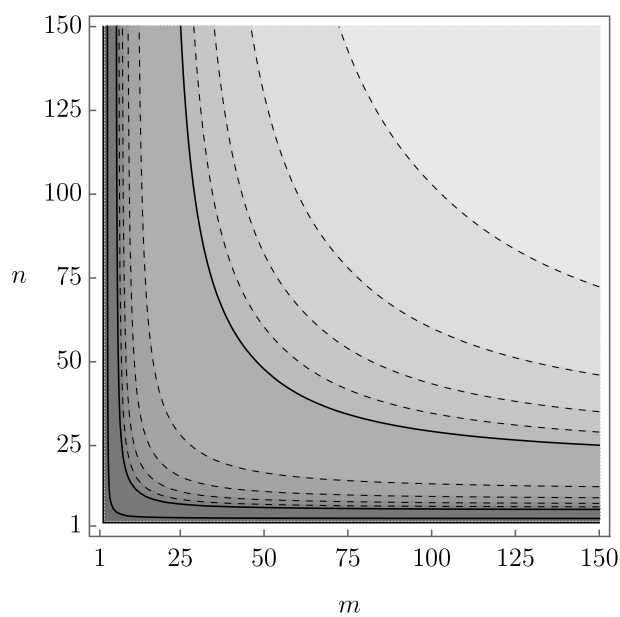
$$a_{s \times v} = (m-s+1)(n-v+1), \\ B_{s \times v} = 2M_{s \times v}^1 + 2M_{s \times v}^2 + 4M_{s \times v}^3 + 4M_{s \times v}^4.$$

Dokážeme tedy spočítat pravděpodobnost  $P(CO)$  pro libovolnou  $m \times n$  síť. Obr. 21 znázorňuje graf hodnot pravděpodobnosti  $P(CO)$  pro  $m \times n$  síť,  $m, n \in \{1, \dots, 150\}$ . Na obr. 22 pak můžeme vidět vrstevnice této funkce.

Všimněme si, že s rostoucí dimenzí sítě se pravděpodobnost  $P(CO)$  zmenšuje. Dále se domníváme, že pokud bychom uvažovali  $n \times n$  síť,  $n \in \mathbb{N}$ , pak by se pravděpodobnost  $P(CO)$  pro  $n \rightarrow \infty$  limitně blížila pravděpodobnosti  $P(CQ)$  utvoření konvexního čtyřúhelníku při rovnoměrném rozdělení  $\mathcal{R}(K)$  pro množinu  $K$  tvaru čtverce. Ta má hodnotu  $P(CQ) \doteq 0,694$ . V tab. 1 uvádíme vybrané hodnoty  $P(CO)$  pro  $n \times n$  síť.



Obr. 21. Graf zobrazující hodnoty pravděpodobnosti  $P(CO)$  pro rozměry sítě  $m, n \in \{1, \dots, 150\}$ . Jednotlivé hodnoty jsou mezi sebou interpolované



Obr. 22. Na grafu můžeme vidět vrstevnice funkce udávající pravděpodobnost  $P(CO)$  pro hodnoty  $m, n \in \{1, \dots, 150\}$

$n$	3	10	50	100	150
$P(CO) \doteq$	0,9707	0,7656	0,6998	0,6960	0,6952

Tab. 1. Pravděpodobnost  $P(CO)$  pro vybrané hodnoty  $n$

## 5. Závěr

Přesvědčili jsme se o tom, že problém čtyř bodů nemá jednoznačné řešení. Odvodili jsme hned několik možných výsledků, které se nyní pokusíme shrnout a porovnat.

Při uvážení spojitého rovnoměrného rozdělení na nějaké konvexní kompaktní množině  $K$  s kladnou mírou se hodnota výsledku odvíjí od tvaru dané množiny (viz tab. 2). Pokud se omezíme pouze na pravidelné  $n$ -úhelníky, pak se pravděpodobnost  $P(CQ)$  zvětšuje s rostoucím  $n$ . Pro obecný tvar množiny  $K$  se pak může hodnota pravděpodobnosti nacházet pouze v intervalu, jehož dolní a horní hranici tvoří po řadě pravděpodobnosti pro množinu tvaru trojúhelníku a kruhu, tedy v intervalu  $[\frac{2}{3}, 1 - \frac{35}{12\pi^2}]$ .

	Trojúhelník	Čtverec	Pětiúhelník	Šestiúhelník	Kruh
$P(CQ)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{36-2\sqrt{5}}{45}$	$\frac{683}{972}$	$1 - \frac{35}{12\pi^2}$
$\doteq$	0,667	0,694	0,701	0,703	0,704

Tab. 2. Pravděpodobnost  $P(CQ)$  pro vybrané tvary množiny  $K$

Pro diskrétní rovnoměrné rozdělení na  $m \times n$  síti se s rostoucí dimenzí sítě pravděpodobnost  $P(CO)$  zmenšuje (viz obr. 21). Pokud se omezíme na  $n \times n$  síť čtvercového tvaru, pak se domníváme, že s rostoucím  $n$  se pravděpodobnost  $P(CO)$  limitně blíží pravděpodobnosti  $P(CQ)$  pro  $K$  tvaru čtverce, tedy hodnotě  $25/36$  (viz tab. 1).

Pro zajímavost uvedeme i výsledek problému, pokud bychom uvažovali, že body jsou vzájemně nezávislé a mají nedegenerované dvourozměrné normální rozdělení na  $\mathbb{R}^2$ . V tom případě dostáváme hodnotu

$$P(CQ) = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{1}{3} \doteq 0,649.$$

Můžeme si všimnout, že tato hodnota je dokonce menší, než nejmenší možná hodnota při spojitém rovnoměrném rozdělení. Výsledek pro normální rozdělení je přebrán ze článku [1] a jeho důkladné odvození lze nalézt v práci [3], kap. 3.

Existuje mnoho různých modifikací a rozšíření problému čtyř bodů, rozsah článku nám je však neumožňuje zahrnout. Některé zajímavé modifikace problému lze nalézt v článku [2], rozšíření problému do tří dimenzí pak uvádí český matematik B. Hostinský v knize [5].

**Poděkování.** Autorka děkuje především doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., za cenné rady a značnou trpělivost, a dále doc. RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D., za vedení bakalářské práce [3], ze které článek vychází.

## L i t e r a t u r a

- [1] BLATTER, C.: *Four shots for a convex quadrilateral*. Amer. Math. Monthly 115 (2008), 837–843.
- [2] EISENBERG, B., SULLIVAN, R.: *A modification of Sylvester's four point problem*. Math. Mag. 84 (2011), 173–184.

- [3] HÁLOVÁ, E.: *Problém čtyř bodů*. Bakalářská práce. Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Praha, 2023.  
Dostupné z: <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/182890>
- [4] HOLÍKOVÁ, M.: *O Pickově vzorci a rozměňování peněz*. PMFA 61 (2016), 312–322.
- [5] HOSTINSKÝ, B.: *Geometrické pravděpodobnosti*. Jednota čs. matematiků a fyziků, Praha, 1926.
- [6] PFIEFER, R. E.: *The historical development of J. J. Sylvester's four point problem*. Math. Mag. 62 (1989), 309–317.
- [7] SOLOMON, H.: *Geometric probability*. SIAM, Philadelphia, 1978.