Vlastimil Dlab

Rovnoběžník ve čtverci

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 3, 6–14

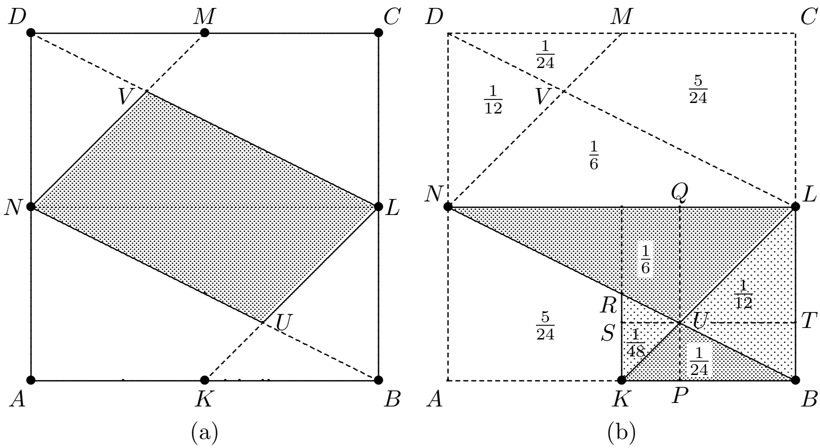
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151842`

Rovnoběžník ve čtverci

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

S touto úlohou jste se patrně už setkali:

Ve čtverci $ABCD$ označme písmeny K, L, M, N středy jeho stran. Dále označme písmenem U průsečík úseček KL a BN a písmenem V průsečík úseček MN a DL (viz obr. 1(a)). *Úkolem je určit poměr obsahů rovnoběžníku $ULVN$ a daného čtverce $ABCD$.*



Obr. 1: Úloha (a) a řešení (b)

Řešení je jednoduché, neboť obsah geometrických útvarů vyznačených na obr. 1(a) s výjimkou trojúhelníku KBU (a tedy i sousedních čtyřúhelníku $AKUN$ a trojúhelníku BLU) je snadné bezprostředně vyčíslit. Výpočet obsahů trojúhelníků KBU a BLU je vyznačen na obr. 1(b). Využívá podobnosti trojúhelníků KBU a LNU a trojúhelníků BLU a RKU s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$. Tedy

$$|PU| = \frac{1}{2}|QU| = \frac{1}{3}|PQ| = \frac{1}{6}|AB|,$$

a podobně

$$|TU| = \frac{1}{3}|AB|.$$

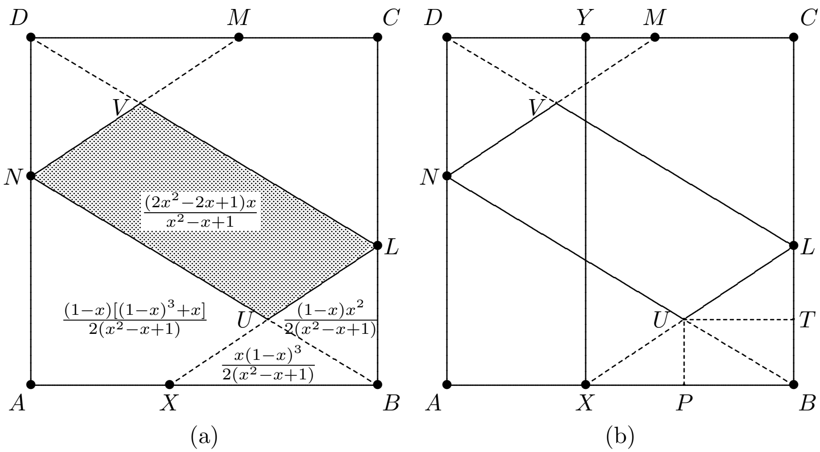
Nyní je snadné poměry všech vyznačených útvarů k obsahu čtverce $ABCD$ vyčíslit tak, jak je uvedeno na obr. 1(b). Označíme-li $|AB| = a$, je obsah rovnoběžníku $ULVN$

$$\mathbf{S}(ULVN) = \mathbf{S}(BLDN) - 2\,\mathbf{S}(BLU) = \frac{1}{2}a^2 - 2 \cdot \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Poměr obsahů rovnoběžníku $ULVN$ a čtverce $ABCD$ je tedy $\frac{1}{3}$.

Poznamenejme, že posloupnost obsahů trojúhelníků RKU, KBU, BLU a LNU tvoří geometrickou posloupnost.

Tato úloha nás vede k obecné otázce: *Jaký je poměr obsahů rovnoběžníku a čtverce v případě, že bod K je na straně AB zvolen libovolně (viz obr. 2, kde je tento bod označen písmenem X).*



Obr. 2: Obecná úloha

Označme opět $|AB| = a$ a (proměnnou) délku $|AX| = |BL| = |CM| = |DN| = xa$, $0 \leq x \leq 1$. Obsah $\mathbf{S}(BLDN)$ rovnoběžníku $BLDN$ je stejný jako obsah obdélníku o stranách DN a DC, který je shodný s obdélníkem $AXYD$, a tedy

$$\mathbf{S}(BLDN) = \mathbf{S}(AXYD) = xa^2.$$

Trojúhelníky BLU a DNV mají stejný obsah, a tudíž se obsah $\mathbf{S}(ULVN)$ rovná

$$\mathbf{S}(ULVN) = \mathbf{S}(BLDN) - 2\mathbf{S}(BLU).$$

Označíme-li $|UT| = t$, je $\mathbf{S}(BLU) = \frac{1}{2}txa$. Délku t společně s délkou $|UP| = p$ určíme tím, že využijeme podobnosti trojúhelníků UPB a NAB a podobnosti trojúhelníků UPX a LBX:

$$\frac{|UP|}{|NA|} = \frac{|PB|}{|AB|},$$

tj.

$$p = (1-x)t$$

a

$$\frac{|UP|}{|LB|} = \frac{|XP|}{|XB|},$$

tj.

$$p = \frac{(1-x)xa - xt}{1-x}.$$

Odtud dostáváme

$$(1-x)^2 t = (1-x)xa - xt$$

a následně

$$t = \frac{(1-x)x}{x^2 - x + 1}a,$$

a tedy

$$\mathbf{S}(BLU) = \frac{(1-x)x^2}{2(x^2 - x + 1)}a^2.$$

Poměr obsahů rovnoběžníku $ULVN$ a čtverce $ABCD$ je tedy

$$\frac{\mathbf{S}(ULVN)}{\mathbf{S}(ABCD)} = \left(xa^2 - \frac{(1-x)x^2}{x^2 - x + 1}a^2\right)\frac{1}{a^2} = \frac{(2x^2 - 2x + 1)x}{x^2 - x + 1}.$$

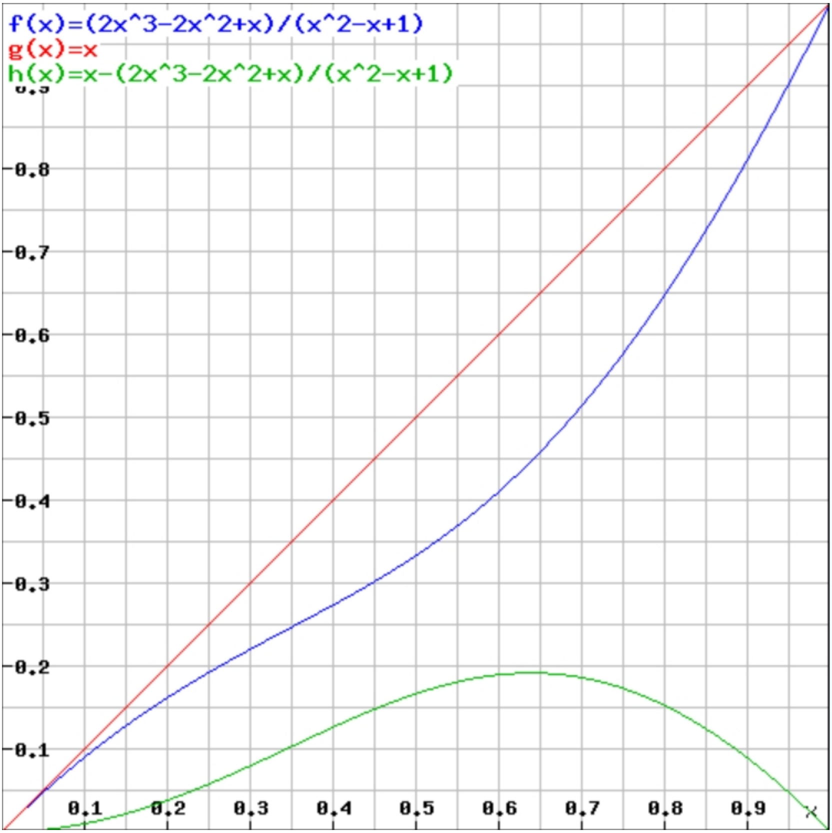
Pro $x = \frac{1}{2}$ je tento poměr, jak jsme už zjistili dříve, $\frac{1}{3}$. Snadno vyčíslíme, že pro

$$x = \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{10},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{100},\ \ldots$$

se poměr postupně rovná

$$\frac{5}{26},\ \frac{5}{21},\ \frac{10}{21},\ \frac{15}{26},\ \frac{41}{455},\ \frac{17}{105},\ \frac{87}{395},\ \frac{26}{95},\ \frac{101}{1\,221},\ \frac{4\,901}{495\,050},\ \ldots$$

Následující graf ilustruje růst tohoto poměru v závislosti na růstu délky x:



Obr. 3: Grafy poměrů obsahů

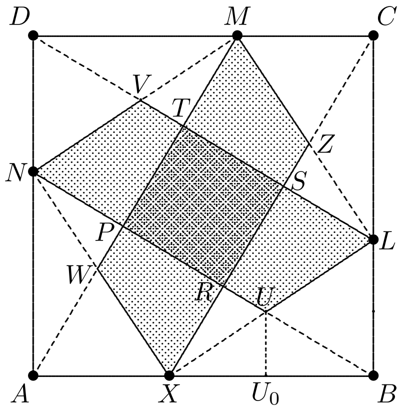
Ihned vidíme, že tato závislost je podstatně odlišná od velmi jednoduché lineární závislosti poměru obsahů obdélníku $AXYD$ a čtverce $ABCD$ (který je x; viz obr. 2(b)). Porovnání těchto poměrů je zobrazeno na obr. 3.

Zde můžeme připomenout velmi příbuznou úlohu týkající se čtverce $XLMN$ vepsaného do daného čtverce $ABCD$ a podobnou úlohu týkající se čtverce $PRST$ tak, jak naznačuje obr. 4.

Stejně jako dříve, položme $|AB| = a$ a $|AX| = |BL| = |CM| = |DN| = xa$. Trojúhelníky ABP a NAP jsou podobné a úsečky AM a BN jsou kolmé. Čtyřúhelník $PRST$ je tedy čtverec.

Jeho obsah splňuje

$$\mathbf{S}(PRST) = \mathbf{S}(ABCD) - \mathbf{S}(ABP) - \mathbf{S}(BCR) - \mathbf{S}(CDS) - \mathbf{S}(DAT) = \\ = \mathbf{S}(ABCD) - 4 \times \mathbf{S}(ABP).$$



Obr. 4: Vepsaný čtverec

K výpočtu obsahu trojúhelníku ABP využijeme jeho podobnosti s trojúhelníkem NBA s koeficientem podobnosti

$$\frac{|AB|}{|NB|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (1-x)^2 a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}.$$

Tedy

$$\frac{\mathbf{S}(ABP)}{\mathbf{S}(NBA)} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2},$$

a jelikož $\mathbf{S}(NBA) = \frac{1-x}{2} a^2$,

$$\mathbf{S}(ABP) = \frac{1-x}{2(x^2 - 2x + 2)} a^2,$$

$$\mathbf{S}(PRST) = a^2 - \frac{2(1-x)}{x^2 - 2x + 2} a^2 = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}\, a^2 = \frac{x^2}{(1-x)^2 + 1}\, a^2.$$

Stejným způsobem využijeme podobnosti trojúhelníků XBR a NBA s koeficientem podobnosti

$$\frac{|XB|}{|NB|} = \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

k výpočtu

$$\mathbf{S}(XBR) = \frac{(1-x)^2}{x^2-2x+2}\ \frac{1-x}{2}a^2 = \frac{(1-x)^3}{2(x^2-2x+2)}a^2.$$

Odtud

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(AXRP) = \mathbf{S}(ABP) - \mathbf{S}(XBR) &= \\ &= \frac{(1-x)-(1-x)^3}{2(x^2-2x+2)}a^2 = \frac{x(1-x)(2-x)}{2(x^2-2x+2)}a^2.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že výpočty obsahů útvarů na obr. 4 lze provést řadou způsobů; příkladem může být výpočet obsahu $\mathbf{S}(AXRP)$ s využitím rovnosti

$$\mathbf{S}(AXRP) = \mathbf{S}(ABN) - 2\mathbf{S}(XBR).$$

K výpočtu obsahu $\mathbf{S}(XBU)$ určíme nejprve délku jeho výšky UU_0; využijeme k tomu podobnosti trojúhelníků:

$$XLB \sim XUU_0 \quad \text{a} \quad BNA \sim BUU_0.$$

Označíme-li $|XU_0| = u$ a $|UU_0| = v$, dostáváme

$$\frac{v}{xa} = \frac{u}{(1-x)a}$$

a

$$\frac{v}{(1-x)a} = \frac{(1-x)a-u}{a}.$$

Máme tedy postupně

$$\begin{aligned}u &= \frac{1-x}{x}v,\\ \frac{v}{1-x} &= (1-x)a - \frac{1-x}{x}v\\ xv &= x(1-x)^2a - (1-x)^2v,\end{aligned}$$

a tedy

$$v = \frac{x(1-x)^2}{x^2-x+1}a$$

a

$$\mathbf{S}(XBU) = \frac{x(1-x)^3}{2(x^2-x+1)}a^2.$$

Nyní je už snadné určit

$$\mathbf{S}(XUR) = \mathbf{S}(XBR) - \mathbf{S}(XBU) = \frac{(1-x)^6}{2(x^2-x+1)(x^2-2x+2)}a^2,$$

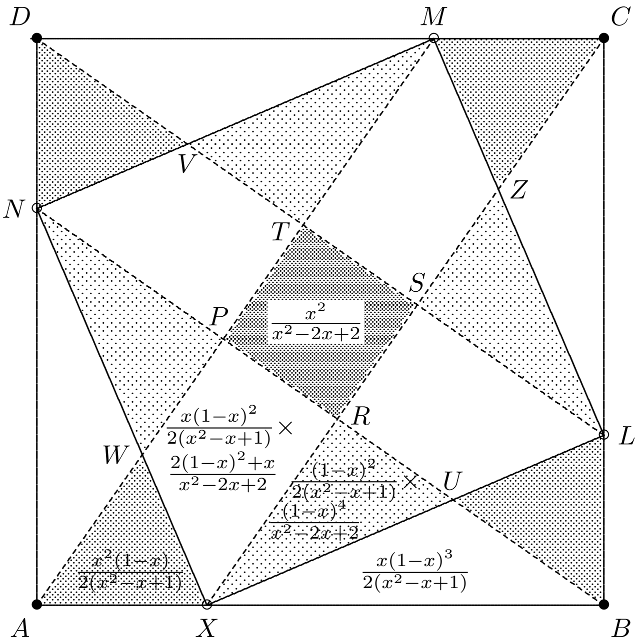
$$\mathbf{S}(AXW) = \mathbf{S}(XBL) - \mathbf{S}(XBU) = \frac{x^2(1-x)}{2(x^2-x+1)}a^2$$

a

$$\mathbf{S}(XRPW) = \mathbf{S}(AXRP) - \mathbf{S}(AXW) = \frac{x(1-x)^2[2(1-x)^2+x]}{2(x^2-x+1)(x^2-2x+2)}a^2.$$

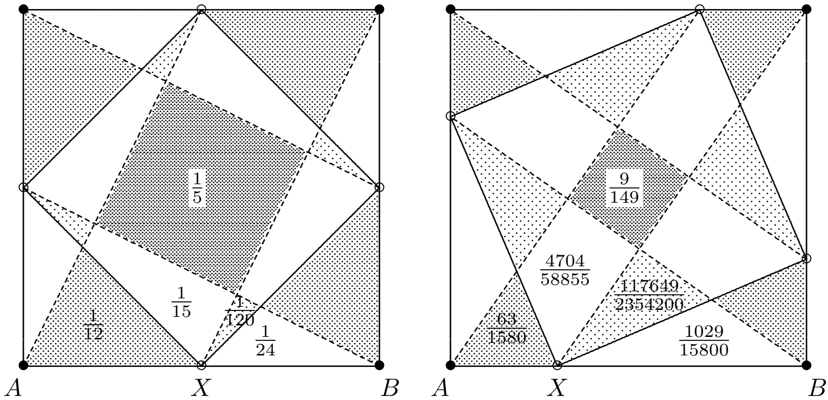
Obdržené výsledky jsou zaznamenány ve formě poměrů k obsahu daného čtverce na obr. 5. Dodejme ještě, že obsah čtverce

$$\mathbf{S}(XLMN) = a^2 - 4\,\mathbf{S}(AXN) = a^2 - 2x(1-x)a^2 = (2x^2-2x+1)a^2.$$



Obr. 5: Vepsané čtverce ($|AX| = x,\ |AB| = 1$)

Pro $x = \frac{1}{2}$ (viz obr. 6) jsou poměry obsahů zmíněných útvarů k obsahu $\mathbf{S}(ABCD)$ daného čtverce $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}(PRST) = \frac{1}{5}$, $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}(AXW) = \frac{1}{12}$, $\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}(XRPW) = \frac{1}{15}$, $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}(XUR) = \frac{1}{120}$, $\mathbf{S}_4 = \mathbf{S}(XBU) = \frac{1}{24}$ a $\mathbf{S}(XLMN) = \frac{1}{2}$.



Obr. 6: Vepsané čtverce ($x = \frac{1}{2}$ a $x = \frac{3}{10}$); $|AB| = 1$

Pro $x = \frac{1}{3}$ je $\mathbf{S}_0 = \frac{1}{13}$, $\mathbf{S}_1 = \frac{1}{21}$, $\mathbf{S}_2 = \frac{22}{273}$, $\mathbf{S}_3 = \frac{32}{819}$, $\mathbf{S}_4 = \frac{4}{63}$ a $\mathbf{S}(XLMN) = \frac{5}{9}$.

Pro $x = \frac{3}{10}$ (viz obr. 6) máme $\mathbf{S}_0 = \frac{9}{149}$, $\mathbf{S}_1 = \frac{63}{1\,580}$, $\mathbf{S}_2 = \frac{4\,704}{58\,855}$, $\mathbf{S}_3 = \frac{117\,649}{2\,354\,200}$, $\mathbf{S}_4 = \frac{1\,029}{15\,800}$ a $\mathbf{S}(XLMN) = \frac{29}{50}$.

Závislost růstu obsahu $\mathbf{S}(PRST)$ na růstu $x = |AX|$ je vyjádřena na obr. 7. Opět můžeme porovnat růst obsahů jednotlivých obrazců vepsaných do daného čtverce.

Článek ukončeme malou úlohou:
Dokažte, že pro $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *platí*

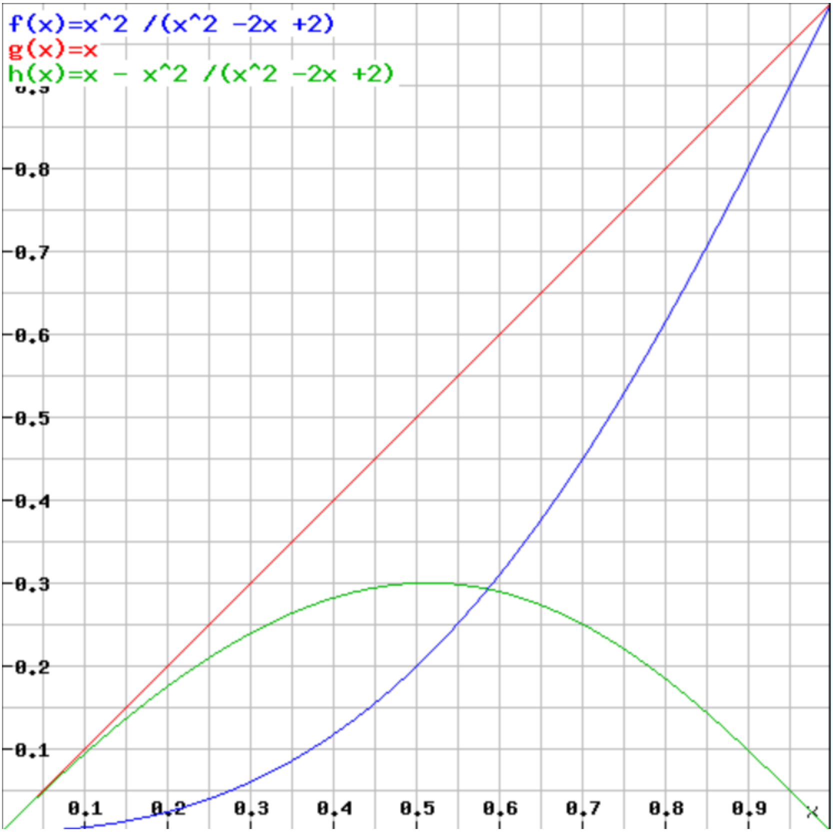
$$\mathbf{S}(XBU) = \mathbf{S}(BLU) = \frac{\sqrt{5}-2}{4}\,a^2$$

a že $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *je jedinou hodnotou, pro niž*

$$\mathbf{S}(XBU) = \mathbf{S}(BLU).$$

Přesvědčte se též, že obsah čtverce $PRST$ je v tomto případě roven

$$\frac{5-2\sqrt{5}}{5}a^2 = \left(1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)a^2.$$



Obr. 7: Další grafy poměrů obsahů

Literatura

[1] mindyourdecisions.com/blog/2020/05/17/the-square-inside-the-square