Učitel matematiky

Naďa Vondrová

Metodické materiály typu porovnávání jako nástroj pro rozvoj schopnosti řešit slovní úlohy

Učitel matematiky, Vol. 31 (2023), No. 1, 18–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151731

METODICKÉ MATERIÁLY TYPU POROVNÁVÁNÍ JAKO NÁSTROJ PRO ROZVOJ SCHOPNOSTI ŘEŠIT SLOVNÍ ÚLOHY

Naďa Vondrová[1]

Úvod

V metodických materiálech typu Porovnávání (POR), vyvíjených v rámci projektu TAČR (viz článek Havlíčkové a kol., 2023), je u každé slovní úlohy žákům nabídnuta dvojice řešení fiktivních žáků. Tato řešení mohou být jak správná, tak nesprávná. Žák

[1]Článek vznikl za podpory projektu TAČR – Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol, č. TL03000469.

má zjistit, zda je řešení správně (a pochopit předloženou strategii řešení), nebo ne (a identifikovat chybu). V nesprávných řešeních jsou zařazeny chyby, jichž se žáci obvykle dopouštějí. Jedním z důležitých cílů metodických materiálů je navodit proces porovnávání – žák porovnává předložená řešení mezi sebou, ale také je implicitně porovnává se svým vlastním řešením a tím, jak o úloze uvažoval on sám.

V tomto článku nejdříve stručně představíme základy, na kterých materiály typu POR stojí a kterými se do jisté míry od ostatních materiálů vyvíjených v rámci projektu odlišují. Jádro článku bude tvořit ukázka jednoho konkrétního materiálu s didaktickým komentářem dokládajícím jeho účel a navrhovanou implementaci v hodinách matematiky a případně i českého jazyka.

Princip porovnávání a práce s chybou v didaktice matematiky

Metodické materiály POR jsou založeny na principech, které podrobněji představil článek Havlíčkové a kol. (2023). Další zásadní princip, který je v jejich jádru, je již zmíněný proces porovnávání. Porovnávání (srovnávání) je důležitá myšlenková operace. Učíme-li se něco nového, porovnáváme to přirozeně s tím, co již známe. Abychom něco mohli srovnat, musíme provést náročné duševní činnosti, neboť musíme myšlenkově rozlišit jednotlivé aspekty předmětu, situace, postupu apod.

V didaktice matematiky lze identifikovat dva hlavní proudy zaměřující se na vliv procesu porovnávání na matematické poznatky žáků (Vondrová, 2019). Ten první se týká porovnávání příkladů a protipříkladů nějakého pojmu (např. Guo & Pang, 2011). Žáci potřebují vidět řadu příkladů a protipříkladů (v terminologii Hejného bychom hovořili o tom, že žáci musí být seznámeni s mnoha izolovanými modely a nemodely, aby si vytvořili generický model, Hejný, 2014), přičemž se ukazuje, že pro slabší žáky je přínosnější, porovnávají-li hodně odlišné příklady, zatímco žáci dobří v matematice profitují z porovnávání i velmi málo odlišných příkladů.

Druhý proud, který je pro materiály POR zásadní, se týká porovnávání strategií. Mnohé odborné studie dokládají, že výuka zahrnující prezentaci různých způsobů řešení a jejich vzájemné porovnávání má na porozumění žáků matematice pozitivní vliv (Durkin et al., 2017; Loibl & Leuders, 2018, 2019). Pokud jsou totiž žáci explicitně vedeni k porovnávání, všímají si konkrétních aspektů daného postupu, snaží se je pochopit a porovnat daný postup s tím, který by použili oni. Více času a pozornosti tedy věnují důležitým aspektům řešitelského procesu a tím se i více naučí. Specifickým typem je porovnávání dvojic strategií, z nichž jedna je nesprávná. V takovém případě bylo ukázáno, že nejlepších výsledků je dosaženo, pokud jsou žáci o porovnávání explicitně požádáni a pokud chybné řešení obsahuje pravděpodobnou chybu, k níž dochází často a žáci jsou schopni pochopit její princip (Loibl & Leuders, 2018, 2019).

Princip reflektování chyby zařazují odborníci mezi ty principy výuky, jejichž užitečnost kognitivní věda již prokázala (Booth et al., 2017).[2] Jsou známy nejen studie z laboratorních podmínek, ale i studie přímo z výuky (např. Rushton, 2018). Pro naše potřeby je důležité, že tyto výukové intervence zahrnují nejen reflektování vlastních chyb žáků, ale také reflektování chyb, které jsou žákům předloženy např. v podobě řešení fiktivních žáků. Studie se také shodují v tom, že přínos učení se z chyb se projeví zpravidla až po čase; vliv okamžitě po intervenci je méně patrný.

Concept cartoons

Dvojice řešení lze přirozeně získat tak, že požádáme žáky, aby prezentovali své postupy. Může se však stát, že se žáci zdráhají ukázat postup, o němž si nejsou jistí, či se necítí komfortně v situaci, kdy je jejich postup podroben rozboru. Prezentace řešení fiktivních žáků má pak dvojí výhodu. Jednak se žáci nemusí ostýchat hovořit o chybném řešení, protože ho nevytvořil jeden z nich, a jednak to učiteli umožní vybrat (či vytvořit) takovou strategii,

[2] Mezi další takové principy patří např. princip lešení či princip abstraktních a konkrétních reprezentací pojmu (Booth et al., 2017).

s níž chce žáky z nějakého důvodu seznámit. Podobný argument platí pro prezentaci chybného postupu – učitel by rád žáky dostal do situace, v níž se projeví nějaká jím očekávaná chyba, ale nechce jim to jen sdělit. Cennější je, když mají žáci možnost tuto chybu nejdříve identifikovat. Materiály POR využívají tzv. concept cartoons, což je vizuální zobrazení např. řešení úloh, v němž diskutují hypotetičtí žáci. V českém prostředí se problematikou hlouběji zabývá např. L. Samková (2020), v jejíž knize najdeme i popis kořenů využití concept cartoons ve výuce nejen matematiky.

Tvorba materiálů POR

Slovní úlohy pro materiály POR jsme vybírali zejména (ale nejen) z těch úloh, s nimiž jsme získali zkušenosti v rámci projektu GAČR (Vondrová et al., 2019). Šlo jednak o slovní úlohy, u nichž bylo ukázáno, že obsahují nějaký pro žáky komplikující faktor (např. úloha s antisignálem, s nadbytečnými údaji, úloha s povrchovou strukturou přímé úměrnosti) či vedou k různým strategiím, a to i chybným. Protože jsme u těchto úloh měli k dispozici stovky žákovských řešení, mohli jsme se zaměřit na nejčastější chyby a strategie, a právě ty jsme vybrali jako podklad pro řešení fiktivních žáků. Byla tak větší pravděpodobnost, že žáci chyby pochopí.

K vybrané slovní úloze jsme vytvořili řešení dvou fiktivních žáků a současně připravili úkoly na porozumění textu a jazykové úkoly. Ty mají umožnit využití slovních úloh jako podkladu pro rozvoj čtení s porozuměním (viz Havlíčková et al., 2023). Spolupracujícím učitelům jsme kromě materiálů pro žáky poskytli též podrobnou metodiku a požádali je, aby úlohu daným způsobem ve svých hodinách využili. Učitelé nám poskytli mnoho zpětné vazby, kterou jsme využili nejen při úpravě materiálů, ale zejména pro úpravu metodiky, jak materiály využít ve výuce.

Uvedeme ukázku jednoho metodického materiálu k úloze určené pro 8. a 9. ročník. Kurzívou upozorníme na některé postřehy, které jsme k tomuto materiálu získali od spolupracujících učitelů.

Úloha Jízdné

Studenti do 26 let mají jízdné o 75 % levnější než dospělí. Všech 60 míst v autobusu do Prahy bylo obsazeno pouze studenty a dospělými. Žádní senioři ani děti v autobusu nejeli. Když sečteme, kolik za jízdenky zaplatili celkem dospělí a kolik zaplatili celkem studenti, dostaneme stejné částky. Kolik studentů jelo autobusem?

Tato úloha[3] patří mezi úlohy o směsi, ale současně jde o tzv. operátorovou úlohu, v níž hrají roli pouze operátory (v našem případě v podobě procent). Operátorové úlohy jsou absencí stavu obtížné zejména pro mladší žáky (Vondrová et al., 2019). Ke správnému řešení není nutné znát cenu jízdného, stačí pracovat se vztahem mezi jízdným pro dospělé a pro studenty. To je pro mnohé žáky překážka, kterou nedovedou překonat, a úlohu vzdávají s tím, že se řešit nedá. Úlohu lze ovšem řešit i tak, že si žáci nějaký stav (tedy cenu jízdného pro dospělé) vhodně zvolí. Právě na tento případ cílí jedno z nabízených řešení.

Část 1 – společná práce s textem slovní úlohy

Žáci dostanou za úkol si nejdříve úlohu přečíst, aniž by ji řešili. Učitel otevře diskuzi, jejímž cílem je zjistit, jak žáci předkládanému zadání rozumí. Může použít úkoly a otázky, které jsou uvedeny v tabulce níže.[4] V levém sloupci jsou otázky cílící na porozumění textu, které jsou důležité pro řešení úlohy. V pravém sloupci jsou jazykové úlohy, které se zaměřují na rozvoj jazykové gramotnosti a učitel je může nebo nemusí využít. Někteří pilotující učitelé pracovali v tandemu s učitelem českého jazyka nebo se dohodli na tom, že rozbor slovní úlohy provede učitel českého jazyka ve své hodině (s textem slovní úlohy tedy pracuje jako s jakýmkoli jiným textem určeným k rozboru) a učitel matematiky naváže druhou částí práce.

[3] Úlohu a řešení fiktivních žáků navrhl student učitelství Ondřej Kohout. Grafický návrh obličejů fiktivních žáků vytvořila Patricie Slaničková.

[4] Na formulaci jazykových úloh se podílel tým z katedry českého jazyka, jmenovitě Martina Šmejkalová a Alena Kinclová.

<table>
<tr><th>Porozumění textu úlohy</th><th>Rozvoj jazykové gramotnosti</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Rozhodni o každém z tvrzení, zda jednoznačně vyplývá z textu:
(a) V autobusu do Prahy jeli studenti, dospělí, senioři a děti.
(b) Studenti do 26 let platí za jízdné 75 % z ceny jízdného pro dospělé.
(c) Autobus do Prahy je 60místný.
(d) V autobusu do Prahy jel stejný počet studentů jako dospělých.
(e) Všichni studenti dohromady zaplatili za jízdné stejnou částku jako všichni dospělí.</td><td>5. Který titulek v žádném případě nevystihuje obsah úlohy?
(a) Vysokoškoláci jezdí levněji!
(b) Pětadvacetiletí jezdí levněji, ačkoliv nestudují žádnou školu!
(c) Nespravedlnost! Senioři platí stejně jako dospělí v produktivním věku!
(d) Autobusy do Prahy šedesátimístné!</td></tr>
<tr><td>6. Podtrhni přísudek ve druhé větě úlohy. Urči slovesný rod. Přeformuluj větu tak, abys použil slovesný rod opačný.</td></tr>
<tr><td>2. Jelo v autobusu do Prahy více dospělých, nebo více studentů?</td><td rowspan="2">7. Jaký je tvar slova autobus v 6. pádě? Který z tvarů používáš ty? Znáš ještě jiná slova, která mají v 6. pádě více různých tvarů?</td></tr>
<tr><td>3. Byla v autobusu nějaká prázdná místa?</td></tr>
<tr><td>4. Je možné z textu úlohy zjistit, kolik stála jízdenka do Prahy pro dospělého?</td><td>8. Přepiš slovy 75 % a 75%.</td></tr>
</table>

Pro úplnost uvedeme i řešení úkolů z tabulky: (1) a) ne, b) ne, c) ano, d) ne, e) ano; (2) více studentů; (3) ne; (4) ne; (5) správná je odpověď b – úloha mluví o studentech, ne o osobách do 26 let; informace o seniorech je redundantní, neboť úloha vůbec nezmiňuje, kolik senioři platí (stejná okolnost platí o dětech); (6) bylo obsazeno, trpný rod, Studenti a dospělí obsadili všech 60 míst v autobuse; (7) autobusu/autobuse; např. hrad – poučení o kolísání a dubletách; (8) sedmdesát pět procent; sedmdesátipětiprocentní; pravopisu procent doporučujeme věnovat zvýšenou pozornost, neboť se v něm často chybuje, přitom různé psaní zásadně mění význam.

Pilotáže ukázaly, že je vhodné, aby byly některé úkoly týkající se textu slovní úlohy žákům k dispozici v písemné podobě – např. na dataprojektoru nebo na tabuli. Je pro ně obtížné je udržet v paměti. Jde např. o otázky, u nichž je nabídnuto více odpovědí, nebo o různá tvrzení, o jejichž platnosti mají žáci rozhodnout.

Učitelé by se neměli spokojit jen se správnou odpovědí, ale měli by žáky např. požádat, aby přečetli nahlas tu část textu, která jejich odpověď podporuje. Žáci by měli odpověď zdůvodnit.

Část 2 – Individuální řešení úlohy

Učitel vyzve žáky, aby se úlohu pokusili vyřešit. Nemusí ji nutně dořešit celou, smyslem je, aby se o to alespoň pokusili a dokázali pak lépe porozumět řešení fiktivního žáka, které jim bude předloženo.

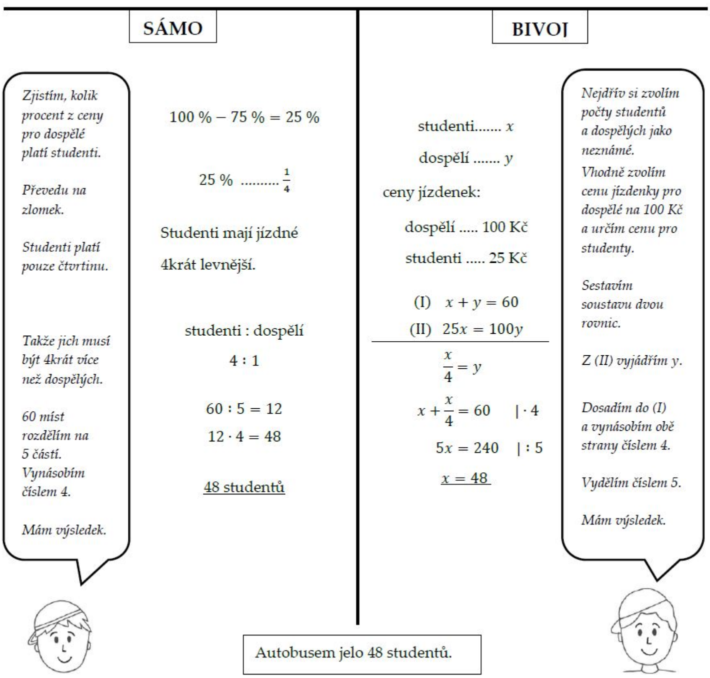
V pilotážích se ukázalo, že tato část může být vnímána různě. Pokud žáci úlohu dořeší, získají do ní vhled a mohou pak snáze porovnat předložená řešení s vlastním. Někteří žáci však poté, co v jednom z řešení uviděli svůj výsledek, toto řešení vynechali a vzali ho za předem jasné. V takovém případě je musí učitel vést k tomu, aby předložená řešení podrobně vysvětlili a zdůvodnili jejich jednotlivé kroky.

Část 3 – Práce ve dvojicích na pracovním listu

Žáci pracují ve dvojicích. Dostanou vytištěný pracovní list s dvojicí řešení fiktivních žáků (viz obr. 1). V tomto případě je předložena dvojice správných řešení, které se však liší použitou strategií.

Sámo začíná úvahou, že studenti za jízdenky platí 25 % ceny jízdenek pro dospělé, a tak jich pojede 4krát více než dospělých (mají-li platit stejně). Počet studentů určuje rozdělením 60 v poměru 4 : 1. Jeho řešení nevyžaduje volbu stavu (ceny jízdenky dospělého).

Bivoj řeší úlohu jako úlohu o směsi typickou učebnicovou strategií – soustavou dvou rovnic o dvou neznámých. Absenci stavu řeší vhodně zvolenou cenou jízdenky pro dospělé. Zde je vhodné s žáky hovořit o tom, zda je takové řešení přípustné a zda by si Bivoj mohl zvolit jinou cenu jízdenky pro dospělé (při pilotážích někteří žáci sami u Bivojova řešení poznamenávali, že je zbytečné, aby si volil cenu jízdenky). Zde jde o to, aby si žáci uvědomili obecnost řešení operátorových úloh – na stavu v jejich řešení nezáleží, záleží jen na vzájemných vztazích operátorů.

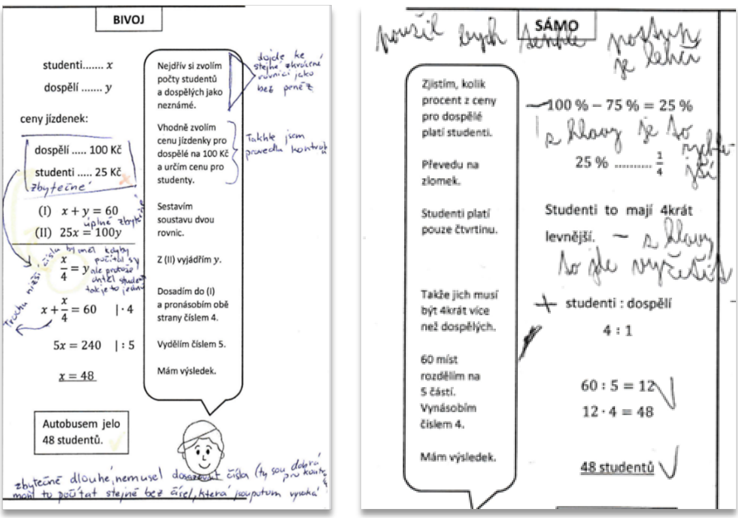


Obr. 1: Dvě řešení fiktivních žáků u úlohy Jízdné

Cílem této aktivity je navodit proces porovnávání daných strategií řešení. Učitel tomu může pomoci cílenými otázkami, které položí celé třídě nebo dvojicím žáků: Jak řešil úlohu Sámo? Jak řešil úlohu Bivoj? Porovnej jejich řešení. Kdo řeší úlohu správně? Pokud je v řešení chyba, najdi ji a oprav. Jak asi vznikla? Porovnej tato řešení se svým řešením této úlohy. Které z řešení ti vyhovuje více a proč?

Na základě pilotáží doporučujeme, aby při prvním setkání žáků s tímto typem úkolu učitel zdůraznil, že někdy budou obě řešení správná, někdy bude jedno chybné, ale že také mohou být obě chybná. Úkolem žáků je vždy řešení pochopit a umět vysvětlit a případnou chybu odhalit.

Při jedné z pilotáží učitel požádal žáky, aby předložené postupy okomentovali. Žáci sami dopisovali do řešení „fajfky“, kde kroku rozuměli, případně další poznámky. Zapisování poznámek jim umožnilo si zafixovat své úvahy o analyzovaném postupu. Příklad takových komentářů je na obrázku 2.



Obr. 2: Ilustrace žákovských komentářů k řešením fiktivních žáků

Část 3 – Reflexe

Učitel vyzve žáky, aby vysvětlili předložená řešení (příslušnou strategii či chybu, které se fiktivní žák dopustil), a pak moderuje diskusi. U každé konkrétní dvojice řešitelských strategií je v metodickém materiálu zapsáno, co, kromě řešení slovní úlohy, je jejím konkrétním poselstvím. Cílem je, aby si žáci toto poselství uvědomili. Předpokládáme, že se poselství v diskusi objeví přirozeně. Pak se učitel jen ujistí, že si třída uvědomí jejich důležitost. Pokud se tak nestane, může na ně zaměřit pozornost cílenými otázkami.

Pilotáže ukázaly, že pro společnou reflexi různých strategií bylo užitečné, když byli žáci žádáni, aby používali různý zápis – aby své řešení napsali např. tužkou, případné řešení vytvořené ve dvojici propiskou a případné další řešení barevně.

Část 4 – Návazná práce

Poznatky, které žáci získají v předchozích etapách práce, by si měli upevnit tím, že je sami využijí v podobném kontextu. Operátorové úlohy nejsou podle našich zkušeností v učebnicích příliš časté. Proto by bylo vhodné, aby je učitel zařazoval a žáci si díky nim mohli upevnit poznatky získané pří práci s úlohou Jízdné. Několik takových úloh uvádíme (Vondrová et al., 2019), přičemž úlohy uvedené na začátku jsou vhodné i pro žáky 1. stupně. U žáků 2. stupně bychom je zařadili v případě, že měli s pochopením principu řešení úlohy Jízdné závažné problémy.

Ú1: V tomto týdnu Otesánek rychle přibyl na váze. Ve středu vážil o 7 kilogramů více než v pondělí, ale o 4 kilogramy méně než v neděli. Kolik kilogramů Otesánek během tohoto týdne přibral? [Výsledek: 11 kg]

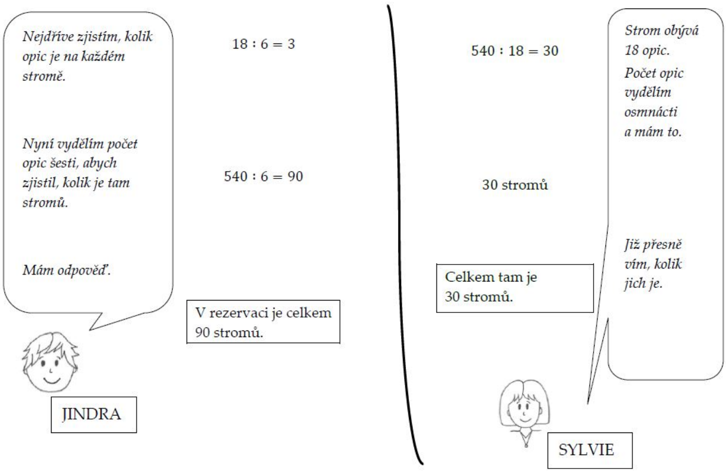
Ú2: Kovové kružítko je šestkrát dražší než mikrotužka, mikrotužka je třikrát dražší než pravítko. Kolikrát je kružítko dražší než pravítko? [Výsledek: 18krát]

Ú3: Kovové kružítko je šestkrát dražší než mikrotužka, pravítko je třikrát levnější než mikrotužka. Kolikrát je kružítko dražší než pravítko? [Výsledek: 18krát]

Další ilustrace: Úloha Rezervace (5. ročník)

Pro úplnost uvedeme ještě ilustraci jiné úlohy, u níž jsou fiktivní řešení obě nesprávná (obr. 3).

Rezervace na západním břehu Afriky se specializuje na ohrožené druhy opic. Ty jsou chovány na několika pozemcích, které jsou od sebe odděleny plotem. Na každém pozemku je 6 stromů a dále také nádrž s vodou a dřevěná stříška. Každý pozemek obývá 18 opic. Na všech pozemcích v celé rezervaci žije dohromady 540 opic. Kolik je v rezervaci dohromady stromů?



Obr. 3: Fiktivní řešení úlohy Rezervace

Úlohu řešíme dvěma kroky, je však nutné se nejdříve vyznat v zadání. Žákům by mohla pomoci žádost, aby si situaci zakreslili, protože tak si lépe uvědomí, o jaké objekty v úloze jde (pozemky, stromy, opice) a jaké jsou mezi nimi vztahy. Úloha obsahuje hodně nadbytečného textu, který však skýtá řadu možností, jak s ním pracovat z jazykového hlediska.

Obě předložená řešení jsou nesprávná. Jindra nejdříve vypočítal, kolik opic je na jednom stromě, a pak dělil počet opic šesti (stejně to učinilo 11 % žáků 5. ročníku z našeho výzkumu, Vondrová et al., 2019). Důvod není zcela zřejmý, ale můžeme spekulovat, že se jedná o návodnost čísel 540 a 6 – číslo 540 je očividně dělitelné šesti. Sylvie se dopustila stejné chyby jako 5 % žáků v našem výzkumu. Provedla jen první krok (zjistila počet pozemků), může se tedy jednat o chybu typickou pro vícekrokové úlohy, kdy žák provede jen první krok a řešení ukončí.

Závěr

Na základě zkušeností z prvních pilotáží se zdá, že pro žáky je jednodušší porovnávat jedno špatné a jedno správné řešení. Úkol „Najdi v řešení chybu a vysvětli, jak vznikla“ je pro ně evidentně jednodušší než získat vhled do dvou správných způsobů řešení. Proto doporučujeme začít porovnáním špatného a správného řešení a porovnání dvou správných způsobů zařadit až poté, co žáci získají první zkušenosti s tímto typem materiálu.

Ukazuje se, že pokud mají obě řešení stejné výsledky a žáci zjistí, že první je správné, nemají motivaci analyzovat i to druhé. Učitel by je měl vést k tomu, aby si uvědomili, v čem tkví podstata obou způsobů řešení a jaké jsou jejich výhody a nevýhody. Někteří učitelé při pilotážích uvedli aktivitu tak, že v této hodině budou žáci učitelé a budou mít za úkol opravit písemné řešení, tedy zjistit, zda žák uvažuje správně a jak úlohu řeší.

Závěrem upozorníme na důležitou skutečnost. Cílem týmu sdruženého v projektu TAČR není vytvořit zajímavé materiály, které by učitelům pomohly zpestřit hodiny matematiky, ale vytvořit ucelenou metodiku, která žákům pomůže v řešení slovních úloh a zároveň rozvine jejich jazykovou gramotnost. Pokud má ale být tohoto cíle dosaženo, pak nestačí, když se žáci s daným typem metodického materiálu setkají jednorázově. Naopak je nutné, aby s ním pracovali opakovaně, aby si osvojili postupy, které materiál přináší, a neplýtvali energií na to, že se u nového typu materiálu snaží pochopit, co se od nich očekává. Jedině tak, jak věříme, povedou materiály k žádoucím cílům. Dosavadní zkušenosti, které jsme prostřednictvím bohaté sítě spolupracujících učitelů získali, jsou v tomto směru povzbudivé.