Hrátky s posloupnostmi celých čísel

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 4, 32–35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151637

Hrátky s posloupnostmi celých čísel

V IQ testech či testech všeobecných studijních předpokladů se často požaduje logicky doplnit další člen číselné posloupnosti, která je zadaná pomocí pár prvních členů. Již mnohokrát jsme se setkali s dotazy žáků a studentů, zda je možné, že existuje více správných doplnění. Ukážeme, že z hlediska matematiky je úloha nesmyslná, protože každou danou konečnou posloupnost lze logicky rozšířit nekonečně mnoha způsoby.

Například posloupnost

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ a_4 = 8,\ \ldots \tag{1}$$

1. může pokračovat $a_5 = 1918$ (rok vzniku Československa) vzorcem

   $$a_n = \frac{159}{2}n^4 - 795n^3 + \frac{5565}{2}n^2 - 3973n + 1908.$$

   Toto číslo je vždy celé, o tom se přesvědčíme v další sekci tohoto příspěvku. Přesvědčte se, že $a_5 = 1918$.

2. Zvolíme-li

   $$a_n = n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 48n + 24,$$

   máme zajištěno, že posloupnost je celočíselná, splňuje rovnosti (1) a $a_5 = 34$.

3. Předepíšeme-li si pátý člen libovolně celým číslem c, potom

   $$a_n = \frac{c-10}{24}n^4 - \frac{5(c-10)}{12}n^3 + \frac{35(c-10)}{24}n^2 - \frac{25c-274}{12}n + c - 10$$

   je obecný člen celočíselné posloupnosti, která splňuje (1) a $a_5 = c$.

4. Pokud nejste zcela uspokojeni, předepište si celá čísla c a d a přesvědčte se, že

   $$a_n = \frac{d-5c+38}{120}n^5 - \frac{3d-16c+124}{24}n^4 + \frac{17d-95c+746}{24}n^3 - \\ - \frac{45d-260c+2060}{24}n^2 + \frac{274d-1620c+13152}{120}n + 6c - d - 48$$

   je obecným členem posloupnosti splňující (1) a $a_5 = c$ a $a_6 = d$. To, že je tato posloupnost celočíselná, se dozvíme v další sekci.

Jsou pro vás tato fakta zajímavým překvapením? Pojďme si je vysvětlit.

Klíčem k hlubšímu porozumění struktury celočíselných posloupností, které jsme viděli na příkladech v předchozí sekci (a které nazýváme aritmetickými posloupnostmi vyššího řádu), jsou dva objekty: polynomy Φ_k, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$, definované rozšířením definice kombinačních čísel $\binom{n}{k}$ a diferenční trojúhelník definovaný využitím „diference“ polynomů.

Pro každé celé nezáporné číslo k definujme funkci Φ_k reálné proměnné x pomocí

$$\Phi_k(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+2)(x-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1} \quad \text{pro } k \geq 1$$

a

$$\Phi_0(x) = \binom{x}{0} = 1.$$

Tyto polynomy (s racionálními koeficienty) mají v přirozených číslech n celočíselné hodnoty $\binom{n}{k}$, totiž počet k-prvkových podmnožin množiny, která má n prvků.

V předchozích příkladech byl obecný člen a_n dané posloupnosti vyjádřen výrazem, který lze přepsat v případech 1. až 4. postupně

$$\begin{gathered}
2\Phi_0(n-1) + 2\Phi_1(n-1) + 1908\Phi_4(n-1),\\
2\Phi_0(n-1) + 2\Phi_1(n-1) + 24\Phi_4(n-1),\\
2\Phi_0(n-1) + 2\Phi_1(n-1) + (c-10)\Phi_4(n-1),\\
2\Phi_0(n-1) + 2\Phi_1(n-1) + (c-10)\Phi_4(n-1) +\\
+ (b-5a+38)\Phi_5(n-1).
\end{gathered} \tag{2}$$

Celočíselné polynomy, tj. polynomy s racionálními koeficienty, jež mají v celých číslech celočíselné hodnoty, vzbudily nebývalý zajem, když George Pólya, známý svou úspěšnou knížkou „How to solve it“ (v českém překladu „Jak to řešit?“), v roce 1915 popsal, že jsou vždy celočíselnými kombinacemi polynomů Φ_k. Tomuto tématu se budeme nyní věnovat. Celočíselné polynomy nám pak umožní nacházet celočíselné posloupnosti s předepsanými počátečními hodnotami. Když totiž chceme najít posloupnost a_n s předepsanými hodnotami v bodech $n = 1, 2, \ldots, d$, pak stačí najít celočíselný polynom $P(x)$ s předepsanými hodnotami v bodech $x = 1, 2, \ldots, d$ a položit $a_n := P(n)$ pro každé přirozené n.

Metoda, jak celočíselné polynomy obdržet, využívá operace, kterou budeme nazývat diferencí daného polynomu: Pro polynom $P(x) = P_1(x)$ definujme

$$P_2(x) = P_1(x+1) - P_1(x)$$

a obecně

$$P_{n+1}(x) = P_n(x+1) - P_n(x) \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

Následující tabulka ilustruje tuto operaci pro polynom

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{59}{6}x + 9.$$

Připojená tabulka zároveň vyjadřuje hodnoty příslušných polynomů v celočíselných hodnotách 1, 2, 3, 4, 5.

polynom	**hodnota pro $\mathbf{x = 1}$**	$\mathbf{x = 2}$	$\mathbf{x = 3}$	$\mathbf{x = 4}$	$\mathbf{x = 5}$
$P(x) = P_1(x) =$ $\mathbf{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{59}{6}x + 9}$	**−1**	**−10**	**−16**	**−17**	**−11**
$P_2(x) = P_1(x+1) - P_1(x) =$ $\mathbf{x^2 - 10}$	**−9**	**−6**	**−1**	**6**	**15**
$P_3(x) = P_2(x+1) - P_2(x) =$ $\mathbf{2x + 1}$	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**
$P_4(x) = P_3(x+1) - P_3(x) =$ $\mathbf{2}$	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
$P_5(x) = P_4(x+1) - P_4(x) =$ $\mathbf{0}$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

$$\mathbf{P(x) = -1\binom{x-1}{0} - 9\binom{x-1}{1} + 3\binom{x-1}{2} + 2\binom{x-1}{3}}$$

Hodnoty v každém řádku jsou tedy rozdíly hodnot v řádku předcházejícím

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{-1} & \mathbf{-10} & \mathbf{-16} & \mathbf{-17} & \mathbf{-11} & \dots \\
\mathbf{-9} = -10+1 & \mathbf{-6} = -16+10 & \mathbf{-1} = -17+16 & \mathbf{6} = -11+17 & 15 & \dots \\
\mathbf{3} = -6+9 & \mathbf{5} = -1+6 & \mathbf{7} = 6+1 & 9 = 15-6 & 11 & \dots \\
\mathbf{2} = 5-3 & \mathbf{2} = 7-5 & 2 = 9-7 & 2 = 11-9 & 2 & \dots \\
\mathbf{0} = 2-2 & 0 = 2-2 & 0 = 2-2 & 0 = 2-2 & 0 & \dots
\end{array}$$

a vyjádření $P(x)$ ve tvaru lineární kombinace polynomů $\binom{x-1}{0}$, $\binom{x-1}{1}$, $\binom{x-1}{2}$ a $\binom{x-1}{3}$ s celočíselnými koeficienty je určeno prvním sloupcem v tabulce. Výše uvedené tvrzení si v budoucnu v Rozhledech dokážeme, viz [4]. Matematikové vyjadřují Pólyovu větu slovy:

Množina $\{\Phi_k(x) \mid k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ *je bází racionálního vektorového prostoru všech celočíselných polynomů.*

Nyní už necháme na čtenáři, aby si pomocí výše uvedeného postupu odvodil tvar posloupností z úvodního příkladu a porovnal své výsledky s (2). Pro čtenáře, kteří jsou zvědaví, proč námi uvedený postup funguje, a nechtějí čekat na budoucí článek v Rozhledech, doporučujeme publikace [1, 2, 3].

Literatura

[1] Dlab, V., Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* 2. vydání, ČVUT, Praha, 2022.

[2] Dlab, V.: Arithmetic progressions of higher order. *Teaching Math. and Comp. Science*, 9 (2011), s. 225–239. eng: `https://www.academia.edu/51816941/Arithmetic_progressions_of_higher_order` cz: `https://kdm.karlin.mff.cuni.cz//literatura/aritm-posl.pdf`

[3] Dlab, V.: Aritmetické a geometrické posloupnosti, mnohočleny. Ani jeden matematický talent nazmar, JČMF, PdF UK Praha, Školské zařízení pro DVPP Královéhradeckého kraje, Hradec Králové, 2013.

[4] Dlab, V.: Poznámky o kombinačních číslech, posloupnostech, především aritmetických, a polynomech. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, přijato.