

# Rozhledy matematicko-fyzikální

---

Viera Čerňanová

Elipsa, dcéra z rodiny kužeľosečiek

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 97 (2022), No. 4, 19–23

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/151635>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2022

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:  
*The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## Elipsa, dcéra z rodiny kužeľosečiek

*Viera Čerňanová, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity, Trnava*

Prvá predstava dieťaťa o elipse je zvyčajne intuitívna. Elipsa je preň zaoblený útvar. Dieťa totiž rozumie pod elipsou nielen obvodovú čiaru, ale celý útvar ohraničený touto čiarou. Zo všetkých útvarov, ktoré dieťa pozná, mu elipsa najviac pripomína kruh, avšak sploštený. Na druhom stupni základnej školy si žiak osvojí pojem *kružnica* ako množina bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od toho istého bodu, stredu. Toto je vhodným východiskom pre zavedenie pojmu *elipsa*.

### Dva kolíky, špagát a krieda

Pripomeňme si známy príbeh o gazdovi a jeho koze.

1. Gazda zatlačie na trávniku do zeme kolík. K tomuto kolíku priviaže jeden koniec retiazky. Druhý koniec pripevní k obojku, ktorý má koza okolo krku. Trávnik je rozsiahly a retiazka pomerne krátka, takže koza sa nedostane až po okraj trávniku. Znalci vedia, že koza je ideálna bio-kosačka: spasie všetku trávu, ktorú má v dosahu. Aký útvar vypasie?
2. Tentokrát gazda zatlačie do zeme dva kolíky. Retiazku prevlečie cez očko na obojku, ktorý má koza okolo krku. Ku každému kolíku pripevní jeden koniec retiazky. Tá je taká dlhá, že spája kolíky a pritom nie je napnutá. Napriek tomu, že je retiazka dlhá, koza sa ani teraz nedostane za okraj trávniku. Stále však má rovnaký apetít – spasie všetku trávu, na ktorú dosiahne. Aký útvar koza vypasie?



Obr. 1: Koza na lúke

Obvodová čiara v prvom prípade je kružnica, vypasený útvar kruh. V druhom prípade je obvodová čiara vypaseného útvaru elipsa. Na matematickom krúžku alebo na hodine matematiky je veľkou zábavou simulovať túto situáciu kreslením obvodovej čiary na tabuľu alebo na zem. Zamerajme sa na elipsu.

Potrebujeme primerane dlhý špagát, dva kolíky (prsty dvoch žiakov), z ktorých každý pevne pridržá jeden koniec špagátu na tabuli, kriedu alebo fixku. Tretí žiak sa pomocou špagátu a kriedy/fixky snaží nakresliť čo najpresnejšiu čiaru ohraničujúcu územie, ktoré koza dokáže vypásť. Táto aktivita zdanlivo zaberie zbytočne veľa času, z vlastnej skúsenosti však môžeme potvrdiť, že ju žiaci ocenia: atmosféra je uvoľnená, sociálne väzby sa posilnia, krása matematiky opäť raz vynikne. Žiaci samostatne objavia, že útvar je súmerný podľa dvoch kolmých priamok: tej, ktorá prechádza dvomi pevnými bodmi, a podľa osi úsečky ohraničenej práve týmito bodmi. Je teda súmerná aj podľa stredu tejto úsečky. Vďaka vlastnej aktivite a pozorovaniam si žiaci osvoja príslušnú ohniskovú definíciu elipsy a niektoré vlastnosti lepšie, než keby im ich učiteľ predložil ako hotový fakt.

**Definícia 1.** Elipsa je množina bodov v rovine, ktoré majú rovnaký súčet vzdialeností od dvoch pevných bodov ležiacich v tej istej rovine.

Dva pevné body, čiže kolíky v príbehu o koze, voláme *ohniská*. Prirodzene, súčet vzdialeností uvedený v definícii je väčší, než vzdialenosť ohnísk. Keď ohniská približujeme k sebe, elipsa sa svojím vzhľadom stále viac zaokrúhľuje a podobá na kružnicu. Akonáhle sa ohniská spoja do jedného bodu, skutočne dostaneme kružnicu. Kružnicu by sme teda mohli považovať za špeciálny prípad elipsy. To sa aj zvykne robiť, ak v príslušnej situácii nepotrebujeme vlastnosti elipsy, ktoré kružnica nemá, alebo naopak.

### Nájdeme elipsu aj inde?

Elipsa je mimoriadne zaujímavý a užitočný objekt s dlhou históriou. V online encyklopédii Wikipédia sú jej venované články v mnohých jazykoch. Francúzska a anglická verzia, z ktorých sme čiastočne čerpali, sú obzvlášť bohaté na informácie.

Rotáciou elipsy okolo osi súmernosti prechádzajúcej ohniskami dostaneme rotačný elipsoid. Každá rovina obsahujúca túto os sa s ním pretína v elipse totožnej s pôvodnou elipsou. Všetky tieto elipsy majú spoločné ohniská, ktoré sú zároveň ohniskami elipsoidu. Preto nasledujúca *odrazová vlastnosť elipsy* platí aj v elipsoide:

**Vlastnosť 1.** *Lúč vychádzajúci z jedného ohniska sa odrazí od elipsy a vráti sa do druhého.*

Odrazová vlastnosť elipsy má uplatnenie v optike: svetlo žiarovky umiestnenej v jednom ohnisku eliptického zrkadla sa šíri na všetky strany. Po odraze od povrchu zrkadla sa v druhom ohnisku kumuluje svetelný zväzok.

Podobne v akustike: zvuk vychádzajúci z jedného ohniska sa odráža naspäť dovnútra elipsy (elipsoidu) a kumuluje v druhom. Tým sa kompenzuje strata zvukovej energie spôsobená prekonanou vzdialenosťou. V dávnej minulosti (možno aj teraz?) občas cielene využili túto vlastnosť elipsy v architektúre a v stavebníctve. Niektoré stredoveké námestia boli lemované arkádami s eliptickými oblúkmi, prípadne mala časť klenby v niektorej miestnosti eliptický prierez. V takom prípade mohla osoba umiestnená v jednom z ohnísk poľahky odpočúvať rozhovor osôb v druhom ohnisku, a to aj vtedy, keď sa rozprávali pošepky.

Lúč môže byť nielen svetelný či zvukový, ale aj iného druhu. Ak by malo napríklad hokejové ihrisko eliptický tvar, potom by sa puk vystrelený priamočiaro z jedného ohniska odrazil od mantinelu a vletel by do druhého ohniska.

V medicíne sa využíva pri liečbe čoraz rozsiahlejšieho zoznamu ťažkostí tzv. rázová vlna, ako sa dočítame na portáli WikiSkripta.eu. Priblížme si jej princíp na terapii obličkových alebo žlčových kameňov prostredníctvom *litotripsie extrakorporálnou rázovou vlnou*. Tlakové vlny vysielané z jedného ohniska umiestneného mimo tela pacienta sa po odraze od eliptického zrkadla koncentrujú v druhom ohnisku lokalizovanom presne v problematickom mieste v tele. Ide o neinvazívnu metódu, pri ktorej dochádza k privedeniu tlakovej energie postačujúcej k narušeniu kamienka bez poškodenia tkaniva.

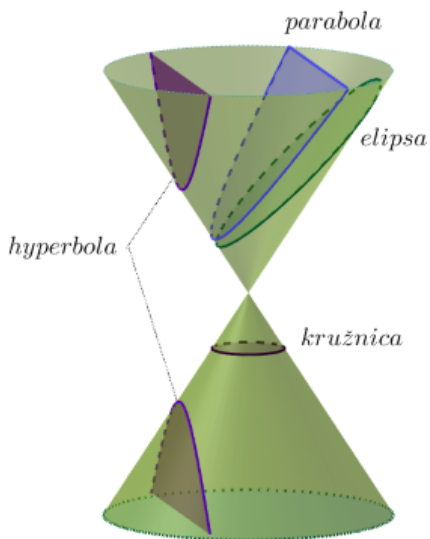
Vo svete, ktorý nás obklopuje, sa stretávame aj s elipsami, ktoré sú tu bez umelého zásahu človeka. Johannes Kepler (1571 - 1630) dokázal, že planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických dráhach (trajektóriách), pričom Slnko sa nachádza v jednom ich spoločnom ohnisku. Toto tvrdenie je známe ako *prvý Keplerov zákon*.

## Kužeľ a jeho rezanie

Elipsa patrí do rodiny rovinných kriviek, kužeľosečiek. Pozrime sa, s čím súvisí názov kužeľosečka.

Nekonečná rotačná kužeľová plocha rozpínajúca sa na obidve strany

a jej rezanie rovinami sú pomerne jednoduché na predstavu. Tento článok je venovaný elipse, ale bola by škoda neuviesť spoločnú definíciu pre všetky typy *regulárnych kužeľosečiek*, čiže takých, ktoré nie sú deformované na bod, priamku alebo dvojicu priamok. Keď sa študenti stretnú s touto definíciou, už poznajú pojmy kružnica, elipsa, parabola, hyperbola, hoci v inom kontexte. Vďaka tomu dokážu samostatne rozhodnúť, ktorá kužeľosečka vznikne pri jednotlivých pozíciách rezovej roviny.



Obr. 2: Kužeľosečky

**Definícia 2.** Kužeľosečka je rovinná krivka, ktorá vznikne ako prienik rotačnej kužeľovej plochy s rovinou, ktorá neprechádza vrcholom plochy. Pritom:

- rovina kolmá na os kužeľovej plochy pretína plochu v kružnici,
- rovina rovnobežná s hranou kužeľovej plochy na nej vytína parabolu,
- rovina, ktorá pretína iba jednu časť kužeľovej plochy, nie je kolmá na jej os ani nie je rovnobežná s hranou, pretína plochu v elipse,
- pri ostatných polohách pretína rovina obidve časti kužeľovej plochy a prienikom je hyperbola.

Rozšírme si databázu poznatkov o tretiu, pre nás poslednú definíciu.

## Ohnisko a riadiaca priamka

Tentokrát sa elipsa spolu s parabolou a hyperbolou vynoria z celkom odlišnej geometrickej situácie. Na rozdiel od zavedenia kužeľosečky ako prieniku kužeľovej plochy a roviny sa tento spôsob javí byť menej názorný, až umelý.

**Definícia 3.** Nech  $d$  je ľubovoľná priamka a  $F$  je bod, ktorý na nej neleží. Nech  $e$  je kladné číslo. Množina bodov roviny určenej priamkou  $d$  a bodom  $F$ , ktorých pomer vzdialeností od bodu  $F$  a od priamky  $d$  je  $e$ , je kužeľosečka. Pritom:

- ak  $0 < e < 1$ , kužeľosečka je elipsa,
- ak  $e = 1$ , je to parabola,
- $e > 1$ , je to hyperbola.

Priamku  $d$  voláme *určujúca (riadiaca) priamka* kužeľosečky, bod  $F$  je jej *ohnisko*. Kužeľosečka s dvomi ohniskami má dve určujúce priamky, ku každému prislúcha jedna. Číslo  $e$  voláme *excentricita* (výstrednosť). Týmto spôsobom nie je možné definovať kružnicu.

## Zastrešujúca analytická geometria

Po troch celkom odlišných definíciách elipsy zákonite prichádzajú filozofické otázky: *Sú tieto definície ekvivalentné? Ak áno, ako sa to dá dokázať názorným spôsobom? A kto na to vôbec prišiel?*

V súčasnej matematike poznáme silný nástroj, ktorým je analytická geometria. Pomocou vhodne zvolenej súradnicovej sústavy je možné pomerne jednoducho dokázať, že uvedené definície elipsy sú skutočne ekvivalentné, ba je možné sformulovať aj ďalšie s nimi ekvivalentné definície. Žiaľ, pri použití takéhoto prístupu je geometria potlačená algebrou, a tak nevyunikne krása geometrických súvislostí. Preto sa nebudeme utiekať k analytickej geometrii, ale neskôr prinesieme geometrické prepojenie všetkých troch definícií elipsy, ktoré sme uviedli v tomto článku.

## Podakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou grantu 013TTU-4/2021.

## Literatúra

- [1] Kepler, J.: *Astronomia nova*. Voegelin, Heidelberg, 1609.
- [2] Wells, D.: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. 1st edition, Penguin Books, London, 1991.