Rozhledy matematicko-fyzikální

Luděk Spíchal

Křivka pronásledování, víry a vnořené n-úhelníky

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 4, 1–12

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151633`

Křivka pronásledování, víry a vnořené n-úhelníky

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

V klasické podobě je křivka pronásledování obvykle popisována jako situace, kde jeden pohybující se objekt (zajíc) je sledován jiným objektem (psem) tak, že pes běží z boku rychlostí větší než zajíc a v každém okamžiku směřuje k zajíci.

Historické pozadí uvažovaného problému je velmi zajímavé, neboť někteří z autorů zabývajících se historií zkoumání křivky pronásledování hledají počátky této problematiky již u antických matematiků a zmiňují Zenonovo řešení klasické úlohy Achilles a želva.[1)] Připomínají rovněž práci renesančního velikána vědy i umění Leonarda da Vinciho (1452–1519), který se jako jeden z prvních zabýval nejjednodušší variantou křivky pronásledování. V této variantě je úkolem najít křivku, po které se plavidlo pohybuje při pronásledování jiného plavidla, které uniká po přímce, za předpokladu, že rychlosti obou plavidel jsou konstantní [2]. K řešení daného i dalších obdobných problémů jsou využívány diferenciální rovnice. Prvním, kdo podal obecné řešení problému křivky pronásledování, byl francouzský geofyzik, astronom a matematik Pierre Bouguer (1698–1758). Na práci P. Bouguera navázala později řada dalších, jako například britský matematik a filosof George Boole (1815–1864), který mimo jiné jako první použil označení *křivka pronásledování*, americký matematik Arthur Stafford Hathaway (1855–1934) a jiní, kteří se zabývali různými variantami křivky pronásledování [1].

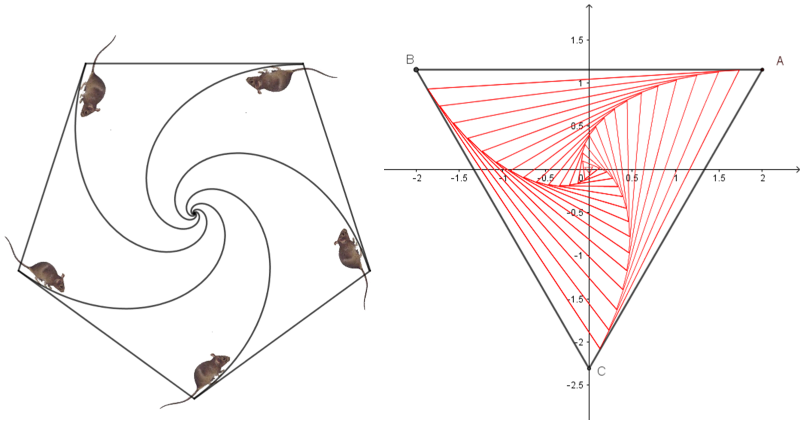
Záměrem článku není ovšem zkoumání různých variant zmíněného problému (např. Bouguerova úloha modelující situaci pronásledování obchodní lodi piráty; Hathawayova úloha modelující situaci, kdy se pronásledovaný pohybuje po kružnici, či různé varianty únikových strategií), neboť tyto jsou v dostupné literatuře již rozřešeny, např. [4]. Pozornost bude upřena na problematiku tzv. vírů (whirls), které představují aproximaci křivek pronásledování v mnohoúhelníku. Sledovat budeme možnosti využití nástrojů středoškolské matematiky (zejména analytické geometrie) pro řešení některých úloh souvisejících se zmíněnými útvary, přičemž

[1)] Zénón z Eleje (cca 490 př. n. l.? – cca 430 př. n. l.?) byl předsókratovský řecký filosof.

kromě úloh řešených bude část úloh ponechána k řešení rovněž čtenáři. Řešení těchto úloh je uvedeno na konci článku.

1. Křivka pronásledování a víry

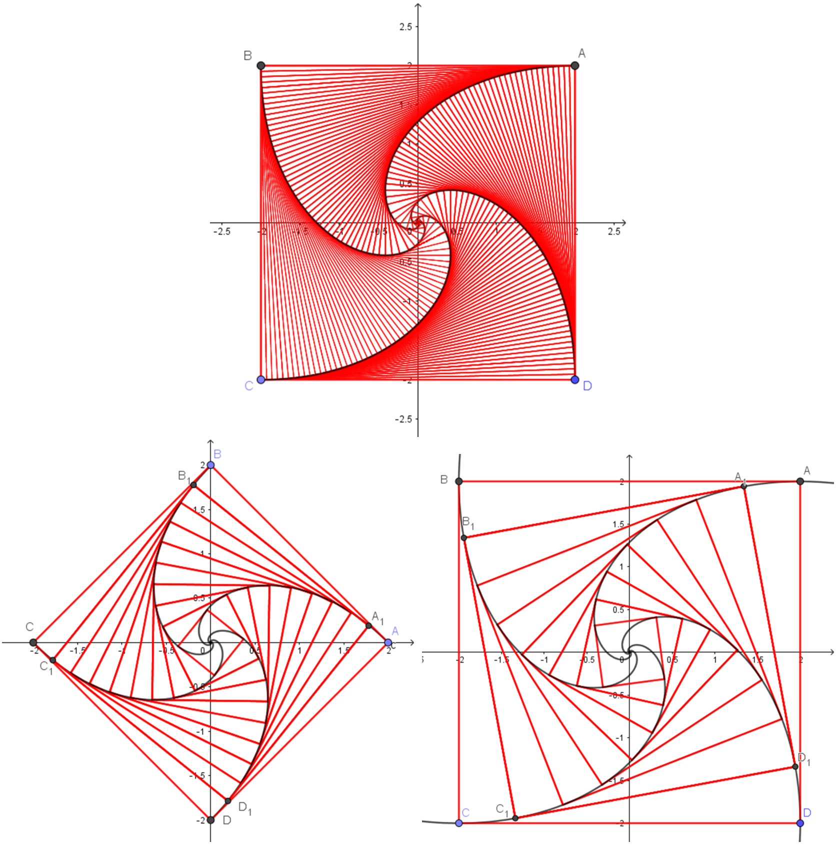
V literatuře se jako jeden z příkladů křivky pronásledování uvádí *myší problém*, kde do každého rohu pravidelného n-úhelníku umístíme myš. V jeden okamžik se začnou myši pohybovat stejnou rychlostí tak, že každá směřuje k nejbližší sousední myši (po směru nebo proti směru hodinových ručiček) po nejkratší možné dráze. Výsledná trajektorie pohybu každé jednotlivé myši má tvar logaritmické spirály (obr. 1 vlevo), přičemž jednotlivé spirály se sbíhají ve středu n-úhelníku (*pól spirál*) [3, 5].[2)]



Obr. 1: Trajektorie pohybu myší v pravidelném pětiúhelníku (logaritmické spirály), víry v rovnostranném trojúhelníku

Víry lze chápat jako diskrétní aproximace *křivky pronásledování*, kdy nahrazují hladkou křivku lineárními úseky. Víry, kterými lze spirály aproximovat, vznikají postupným vpisováním posloupnosti n-úhelníků (zachovává se tvar), přičemž každý následující n-úhelník (dceřiný) je zmenšený a otočený o daný úhel relativně k předchozímu n-úhelníku (mateřskému). Vrcholy dceřiného n-úhelníku leží na stranách mateřského n-úhelníku (obr. 1 vpravo).

[2)] Také se objevují označení jako bugs problem, dogs problem, apod. Více např. `http://mathworld.wolfram.com/MiceProblem.html`



Obr. 2: Víry ve čtverci (nahoře), vnořené čtverce (dole vlevo, dole vpravo)

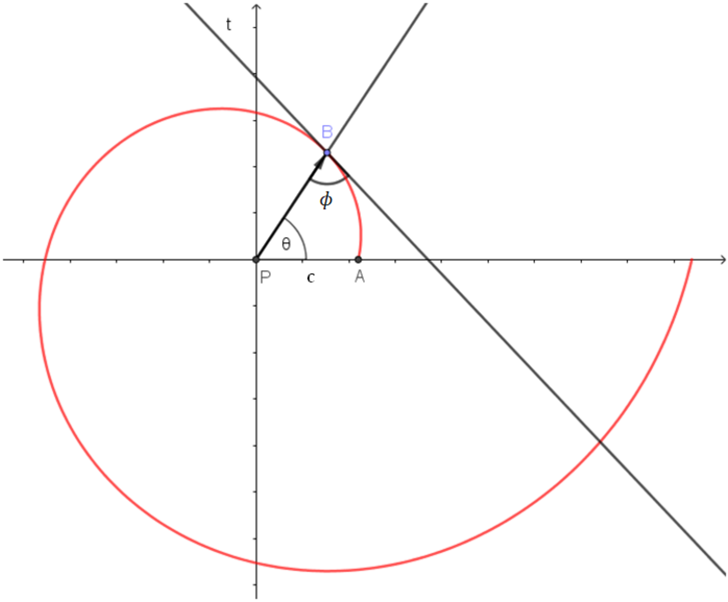
Logaritmická spirála je rovinná křivka určená rovnicí v polárních souřadnicích[3)]

$$\rho = ce^{b\theta}, \tag{1}$$

kde $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hodnota koeficientu c odpovídá volbě $\theta = 0$, pro neposunutou spirálu má tento bod souřadnice $[c, 0]$. Pro koeficient b platí, že $b = \operatorname{cotg} \phi$, kde ϕ je tečný úhel, který v daném bodě spirály svírá tečna spirály a polopřímka vycházející z pólu spirály (průvodič), přičemž

[3)] Polární soustava souřadnic (polární souřadnice) je taková soustava souřadnic v rovině, u které jedna souřadnice (ρ) udává vzdálenost bodu od počátku souřadnic. Druhá souřadnice (θ) udává úhel spojnice tohoto bodu a počátku od osy x.

velikost úhlu nezávisí na volbě bodu (je konstantní, obr. 3). Pro $b < 0$ je logaritmická spirála pravotočivá, pro $b > 0$ je logaritmická spirála levotočivá.



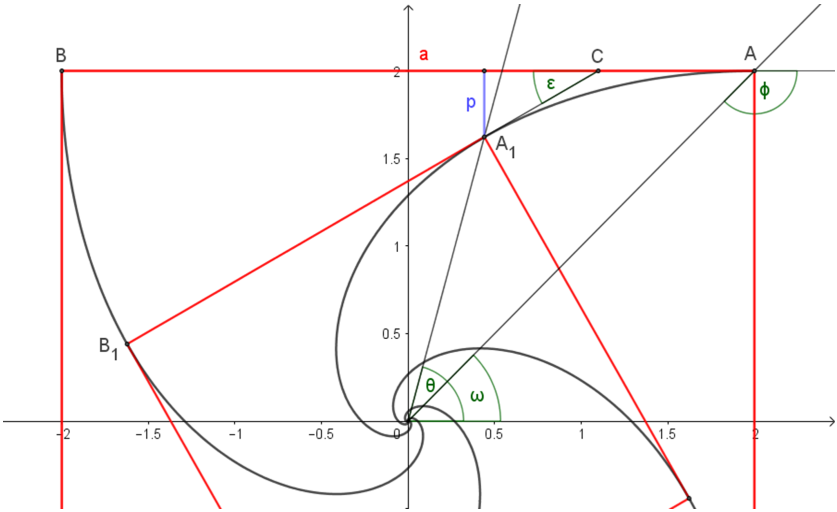
Obr. 3: Logaritmická spirála

Tečný úhel ϕ_n logaritmické spirály tvořící vír v n-úhelníku je konvexní úhel (obr. 4), který svírá průvodič procházející vrcholem n-úhelníku a odpovídající strana n-úhelníku (tečna spirály). Tečný úhel v pravidelném n-úhelníku ($n \geq 3$) lze jednoduše určit z podmínky

$$\phi_n = \frac{(n+2)\pi}{2n}. \tag{2}$$

Cvičení 1. Pro koeficient b v rovnici logaritmické spirály platí $b = \cot\phi$. Ukažte, že vzhledem k rovnici (2) pro koeficient b logaritmické spirály procházející vrcholem pravidelného n-úhelníku rovněž platí

$$b = -\operatorname{tg}(\pi/n). \tag{3}$$



Obr. 4: Délka strany dceřiného čtverce

Poznámka 1. V dalších oddílech budeme zkoumat některé vlastnosti spirál tvořících víry v n-úhelnících a rovněž vlastnosti n-úhelníků, jejichž vpisováním vznikají diskrétní aproximace těchto spirál. Takto umístěné n-úhelníky budeme v dalších částech označovat jako *vnořené*. Pro výchozí (největší) n-úhelník budeme v článku používat označení *obvodový*.

2. Víry ve čtvercích

Vrcholy vnořených čtverců leží na ramenech čtyř logaritmických spirál (obr. 2), které mají konstantní tečný úhel, tj. stejnou hodnotu koeficientu b v rovnici (1).

Cvičení 2. Určete velikost tečného úhlu (ϕ_n) a hodnotu koeficientu b spirál procházejících vrcholy čtverce.

Rovnice jednotlivých spirál se liší hodnotou koeficientu c, který určuje pro volbu $\theta = 0$ místo, od kterého se spirála začíná vykreslovat (*počátek spirály*).

Příklad 1. Určeme hodnotu koeficientu c v rovnicích spirál procházejících vrcholy čtverce.

Řešení. Na příkladu vnořených čtverců z obrázku 4 lze ukázat, že hodnota koeficientu c závisí na délce strany a obvodového n-úhelníku, počtu vrcholů n-úhelníku a poloze vrcholů. Jestliže z rovnice (1) vyjádříme koeficient c a použijeme řešení cvičení (2), pak dostáváme

$$c = \rho \mathrm{e}^{\theta}.$$

Dále dosadíme za $\rho = a\sqrt{2}/2$ (vzdálenost vrcholu čtverce od počátku) a $\theta = \omega + (k-1)\pi/2$, kde ω je odchylka (radiány) přímky procházející počátkem a vrcholem A od kladné poloosy x a $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ je očíslování vrcholů obvodového čtverce v kladném smyslu (počínaje I. kvadrantem) a dostáváme

$$c = \frac{a\sqrt{2}}{2} \mathrm{e}^{\omega + (k-1)\pi/2}. \tag{4}$$

Příklad 2. Určeme délku strany $|A_1B_1|$ dceřiného čtverce, jestliže vzdálenost vrcholu A_1 jistého dceřiného čtverce od strany AB ($|AB| = a$, obr. 4) obvodového čtverce je rovna hodnotě p.

Řešení. Podle situace znázorněné na obrázku 4 má vrchol A_1 dceřiného čtverce souřadnice

$$A_1\left[\frac{a-2p}{2} \operatorname{cotg} \theta, \frac{a-2p}{2}\right],$$

vrchol B_1 otočený o úhel $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu souřadnice

$$B_1\left[-\frac{a-2p}{2}, \frac{a-2p}{2} \operatorname{cotg} \theta\right].$$

Pro délku strany A_1B_1 dceřiného čtverce platí

$$|A_1B_1| = \sqrt{\left(\frac{a-2p}{2} \operatorname{cotg} \theta + \frac{a-2p}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-2p}{2} - \frac{a-2p}{2} \operatorname{cotg} \theta\right)^2},$$

po úpravě a zjednodušení

$$|A_1B_1| = \frac{a-2p}{\sqrt{2} \sin \theta}. \tag{5}$$

Příklad 3. Ukažme, že pro délku strany A_1B_1 dceřiného čtverce rovněž platí

$$|A_1B_1| = a\mathrm{e}^{\pi/4-\theta}. \tag{6}$$

Řešení. Podle řešení cvičení (2) je hodnota koeficientu $b = -1$ a rovnice logaritmické spirály procházející vrcholem A_1 je

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\pi/4-\theta}.$$

Jelikož pro úhel θ (obr. 4) platí

$$\sin\theta = \frac{\frac{a-2p}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\pi/4-\theta}} = \frac{a-2p}{a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi/4-\theta}}, \tag{7}$$

pak po dosazení do rovnice (6) a zjednodušení dostáváme

$$|A_1B_1| = \frac{a-2p}{\sqrt{2}\sin\theta} = \frac{a-2p}{\sqrt{2}\frac{a-2p}{a\sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi/4-\theta}}} = a\mathrm{e}^{\pi/4-\theta}.$$

Příklad 4. Určeme odchylku ε strany A_1B_1 dceřiného čtverce od odpovídající strany AB obvodového čtverce jako funkci velikosti úhlu θ (obr. 4).

Řešení. Odchylku můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\cos\varepsilon = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|},$$

kde podle obr. 4 platí

$$\boldsymbol{u} = B - A = a(1;0), \quad \boldsymbol{v} = B_1 - A_1 = \frac{a-2p}{2}(1+\operatorname{cotg}\theta; 1-\operatorname{cotg}\theta).$$

Po dosazení

$$\cos\varepsilon = \frac{(1;0)\cdot(1+\operatorname{cotg}\theta; 1-\operatorname{cotg}\theta)}{|(1;0)|\cdot|(1+\operatorname{cotg}\theta; 1-\operatorname{cotg}\theta)|},$$

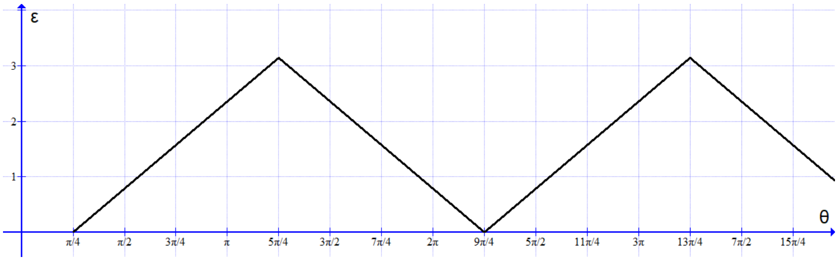
a zjednodušení dostáváme

$$\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta + \cos\theta).$$

Velikost úhlu ε vyjádříme pomocí funkce arkus kosinus

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)\right), \tag{8}$$

která je inverzní funkcí k funkci kosinus (obr. 5).



Obr. 5: Závislost velikosti odchylky ε strany dceřiného čtverce od odpovídající strany obvodového čtverce na velikosti úhlu θ ($\theta \geq \pi/4$)

Jednodušší variantou stanovení velikosti úhlu ε v případě, že známe odchylku θ vrcholu A_1 od kladné části osy x, je porovnání velikostí zmíněných úhlů. Z obr. 4 snadno zjistíme, že

$$\varepsilon = \theta - \pi/4,$$

kde strany mateřského a dceřiného čtverce svírají stejný úhel jako jejich úhlopříčky a dále

$$\sin\varepsilon = \sin(\theta - \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta - \cos\theta),$$

a

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta - \cos\theta)\right),$$

nebo

$$\cos\varepsilon = \cos(\theta - \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta + \cos\theta),$$

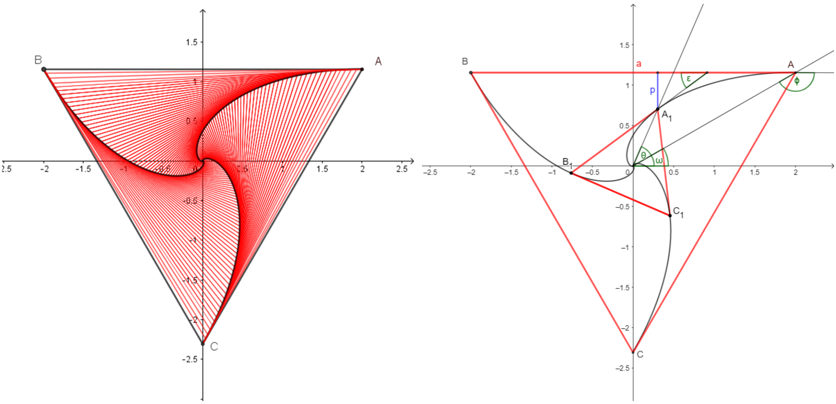
a

$$\varepsilon = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta + \cos\theta)\right).$$

Cvičení 3. Vyjádřete z rovnice (7) vzdálenost p vrcholu A_1 strany dceřiného čtverce od odpovídající strany obvodového čtverce. Ve vhodném programu (např. Geogebra, Graph apod.) na grafech funkcí určených rovnicemi (7) a (8) ověřte, že maximální hodnota vzdálenosti p nastává pro $\theta = 5\pi/4$ (srovnejte rovněž s obr. 5).

3. Víry v rovnostranných trojúhelnících

Postupy použité v řešených úlohách z kapitoly o vnořených čtvercích si může čtenář ověřit na příkladu vnořených trojúhelníků, kterými budeme pro potřeby této kapitoly myslet rovnostranné trojúhelníky (se středem v počátku) s vrcholy obvodového trojúhelníku umístěnými tak, jak je patrné z obr. 6, tj. $A\left[\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}\right]$, $B\left[-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}\right]$, $C\left[0, -\frac{a\sqrt{3}}{3}\right]$.



Obr. 6: Víry v rovnostranném trojúhelníku (vlevo), vnořený trojúhelník (vpravo)

Cvičení 4. Určete tečný úhel ϕ_n a hodnotu koeficientu b logaritmických spirál procházejících vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

Cvičení 5. Určete hodnotu koeficientu c v rovnicích spirál procházejících vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

Cvičení 6. Určete délku strany $|A_1B_1|$ dceřiného trojúhelníku, jestliže vzdálenost vrcholu A_1 jistého dceřiného trojúhelníku od strany AB ($|AB| = a$, obr. 6) obvodového trojúhelníku je rovna hodnotě p.

Cvičení 7. Určete odchylku ε strany A_1B_1 dceřiného trojúhelníku od odpovídající strany AB obvodového trojúhelníku jako funkci velikosti úhlu θ (obr. 6).

4. Závěr

Víry vznikající vpisováním pravidelných n-úhelníků bychom neměli vnímat pouze jako zajímavou zvláštnost. Pokud si dobře prohlédneme obrázky vírů ve čtverci či trojúhelníku, pak lze uvažovat rovněž o zcela konkrétních variantách využití. Vzájemná vzdálenost a poloha jednotlivých vnořených n-úhelníků, délka a počet jejich stran, úhly sevřené stranami vnořených n-úhelníků, případně další polohové či metrické vlastnosti nabízí např. možnost tisku obrazců se specifickými optickými projevy [7].

Vírům podobné křivky lze získat rovněž postupem, který vychází z Gielisovy transformace logaritmické spirály (více viz [6]).

Článek se omezil na některé vlastnosti vírů v pravidelných n-úhelnících. V literatuře lze rovněž nalézt obdobné útvary vznikající v obecných n-úhelnících, např. [3].

5. Řešení

Cvičení 1

$$b = \operatorname{cotg}\phi_n = \operatorname{cotg}\frac{(n+2)\pi}{2n} = \operatorname{cotg}(\pi/2 + \pi/n) = \frac{\cos(\pi/2+\pi/n)}{\sin(\pi/2+\pi/n)} =$$
$$= \frac{\cos(\pi/2)\cos(\pi/n) - \sin(\pi/2)\sin(\pi/n)}{\sin(\pi/2)\cos(\pi/n) + \sin(\pi/n)\cos(\pi/2)} = -\frac{\sin(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} = -\operatorname{tg}(\pi/n).$$

Cvičení 2

Pro velikost tečného úhlu ϕ_n a hodnotu koeficientu b platí

$$\phi_4 = \frac{3\pi}{4},$$
$$b = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

Cvičení 3

Pro vzdálenost p vrcholu A_1 strany dceřiného čtverce od odpovídající strany obvodového čtverce platí

$$p = \frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi/4-\theta}\sin\theta\right).$$

Poznamenejme, že maximum p bychom získali z derivace předchozí rovnice, tj.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} = \frac{a}{2}\sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi/4-\theta}(\sin\theta - \cos\theta),$$

kde pro $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}p} = 0$ dostáváme po zjednodušení

$$\operatorname{tg}\theta = 1,$$

a dále $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = 5\pi/4$. Maximum vzdálenosti p nastává pro $\theta = 5\pi/4$.

Cvičení 4

Pro velikost tečného úhlu ϕ_n a hodnotu koeficientu b platí

$$\phi_3 = \frac{5\pi}{6},$$

$$b = -\operatorname{tg}(\pi/3) = -\sqrt{3}.$$

Cvičení 5

Pro hodnotu koeficientu c platí

$$c = \frac{a\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{\sqrt{3}(\omega+2(k-1)\pi/3)}$$

kde a je délka strany obvodového trojúhelníku, $k = \{1, 2, 3\}$ je koeficient určující pořadí vrcholů trojúhelníku označených v kladném smyslu počínaje I. kvadrantem a ω odchylka polopřímky OA od kladné části osy x.

Cvičení 6

Délku strany vnořeného trojúhelníku pro zvolenou vzdálenost p vrcholu určíme jako délku strany $|A_1B_1|$ (obr. 6 vpravo). Vrchol A_1 vnořeného trojúhelníku má souřadnice

$$A_1 = \left[\frac{\sqrt{3}a - 6p}{6}\operatorname{cotg}\theta, \frac{\sqrt{3}a - 6p}{6}\right]$$

a vrchol B_1 otočený o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném smyslu souřadnice

$$B_1 = \left[\frac{(\sqrt{3}a - 6p)\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{6\sin\theta}, \frac{(\sqrt{3}a - 6p)\sin(\theta + \frac{2\pi}{3})}{6\sin\theta}\right].$$

Pro délku strany A_1B_1 dceřiného trojúhelníku platí

$$|A_1B_1| = \frac{3a - 6p\sqrt{3}}{6\sin\theta}.$$

Cvičení 7

Pro velikost úhlu ε platí

$$\varepsilon = \theta - \frac{\pi}{6},$$

a dále

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{2}(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta).$$

Velikost úhlu ε vyjádříme pomocí funkce arkus kosinus

$$\varepsilon = \arccos \left(\frac{1}{2}(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) \right).$$

Literatura

[1] Barton, J. C., Eliezer, C. J.: On pursuit curves. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 41 (2000), s. 358–371.

[2] Guha, A., Biswas, S. K.: On Leonardo da Vinci's cat and mouse problem. *Bulletin of Institute of Mathematics & Its Applications*, 30 (1994), s. 12–15.

[3] Klamkin, M. S., Newman, D. J.: Cyclic Pursuit or "The Three Bugs Problems". *The Am Math Monthly*, 78 (1971), s. 631–639.

[4] Neugebauer, T.: *Úlohy o pronásledování: základní modely a jejich analýza*. Bakalářská práce, Fakulta strojního inženýrství. VUT Brno, Brno, 2021. Dostupné z: `https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/132690`.

[5] Richardson, T. J.: Non-mutual captures in cyclic pursuit. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 31 (2001), s. 127–146.

[6] Spíchal, L.: Gielisova transformace logaritmické spirály. *PMFA*, 65 (2020), s. 76–89.

[7] Spíchal, L.: Kovové průměry a úhly v uspořádáních bodů na spirálách. *PMFA*, 66 (2021), s. 49–61.

[8] `https://mathworld.wolfram.com/MiceProblem.html`