Viera Čerňanová

Tri definície elipsy a ich názorné prepojenie

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 1, 2–8

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151592`

Tri definície elipsy a ich názorné prepojenie

Viera Čerňanová, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity, Trnava

V tomto príspevku vložíme elipsu spolu s ostatnými kužeľosečkami do historického kontextu. Predtým si pripomenieme tri definície elipsy, s ktorými sa môžeme stretnúť v matematike na vyššom stupni vzdelávania. Sú odvodené od rôznych vstupných geometrických konfigurácií.

1. Elipsa je uzavretá rovinná krivka, ktorá je prienikom rotačnej kužeľovej plochy a roviny neprechádzajúcej vrcholom tejto plochy.
2. Elipsa je množina bodov v rovine, ktoré majú rovnaký súčet vzdialeností od dvoch pevných bodov ležiacich v tejto rovine.[1)]
3. Elipsa je množina bodov v rovine určenej bodom a priamkou, ktorá ním neprechádza, pričom body elipsy majú rovnaký pomer vzdialeností $e < 1$ od tohto bodu a priamky.[2)]

Kužeľosečky v starogréckej matematike

Počiatky teórie kužeľosečiek lokalizujeme do starovekého Grécka. Často sa spájajú s menom Apollonius z Pergy (262–190 p.n.l.)[3)], avšak už sto rokov pred ním objavil Menaechmus (380–320 p.n.l.) pri riešení iného problému parabolu a hyperbolu.[4)] Usudzuje sa, že Menaechmus objavil tiež elipsu a rozvinul teóriu kužeľosečiek, ktorým sa vďaka tomu hovorilo aj Menaechmove krivky. V dobe pred Apolloniom študovali kužeľosečky a ich vlastnosti aj ďalší grécki učenci ako Aristaeus Starší (370–300 p.n.l.), Euklides z Alexandrie (asi 325–270 p.n.l.) či Archimedes zo Syrakúz (287–212 p.n.l.) [3, 4, 7].

V ponímaní starogréckych matematikov sa kužeľ vytváral rotáciou pravouhlého trojuholníka okolo jednej odvesny. Kužeľosečky boli rezmi kužeľovej plochy (plášťa) rovinou kolmou na generujúcu úsečku, čiže na

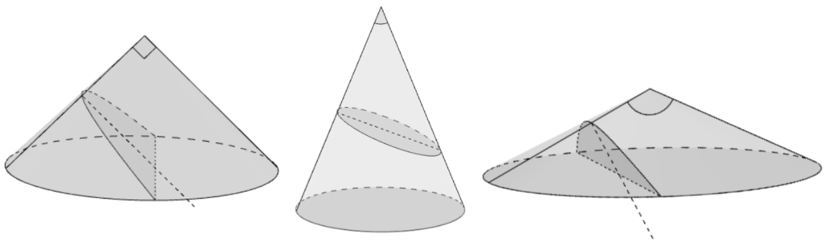
1) Tieto body voláme *ohniská* elipsy, uvedený súčet je *dĺžka hlavnej osi* elipsy.

2) Daný bod je *ohnisko*, priamka je *určujúca (riadiaca)* priamka elipsy, číslo e je *excentricita*.

3) Životopisné údaje uvedené v tomto príspevku ako i niektoré zaujímavosti sme čerpali z online encyklopédie Wikipédia a overovali v citovaných zdrojoch.

4) Menaechmus objavil parabolu a hyperbolu ako vedľajší produkt, ktorý využil pri riešení delfského problému zdvojenia kocky.

hranu kužeľa. Vzniknutá kužeľosečka mala názov podľa veľkosti uhla pri vrchole kužeľa: *pravouhlá, ostrouhlá* alebo *tupouhlá* (obr.1). Klasifikácia bola teda odvodená inak, než ju robíme v súčasnosti. Súčasná klasifikácia sa odvíja od veľkosti uhla, pod ktorým pretína rovina hranu tej istej kužeľovej plochy, ako sme uviedli v definícii 2 príspevku [1]. Zodpovedajúcu definíciu elipsy 1 nájdeme tiež v prvej časti tohto článku. Poznamenajme, že tupouhlá kužeľosečka (hyperbola) ako rez plášťa rotačného kužeľa rovinou nemala vo svojich starogréckych počiatkoch dve časti, ale iba jednu.



Obr. 1: Zľava: pravoouhlá, ostrouhlá a tupouhlá kužeľosečka

Apollonius zhrnul a významne rozšíril dovtedajšie poznatky o kužeľosečkách v ôsmich spisoch, z ktorých prvé štyri sumarizujú a doplňajú štyri Euklidove knihy o kužeľosečkách a objavy iných Apolloniových predchodcov, ďalšie štyri sú Apolloniovým autorským prínosom. *Veľký geometer*, ako ho nazvali, významne zovšeobecnil teóriu kužeľosečiek, keď namiesto rotačného kužeľa uvažoval neohraničenú kužeľovú plochu, či už rotačnú alebo šikmú. Táto plocha vznikla v Apolloniovom ponímaní ako množina bodov pozostávajúca z priamok prechádzajúcich daným pevným bodom a dotýkajúcich sa danej kružnice, ktorá s týmto bodom neleží v tej istej rovine. Apollonius použil vo svojich spisoch názvy, pod ktorými poznáme kužeľosečky dnes: *parabola* (pravouhlá), *elipsa* (ostrouhlá) a *hyperbola* (tupouhlá kužeľosečka). *Kružnicu* považoval za samostatný typ kužeľosečky, nie za špeciálny prípad elipsy. Bolo možné vytvoriť ju dvomi spôsobmi: ako priesečnicu rotačnej kužeľovej plochy a roviny rovnobežnej s rovinou generujúcej kružnice, alebo ako priesečnicu šikmej kužeľovej plochy a vhodnej roviny. Apollonius tiež zistil, že hyperbola má dve časti súmerné podľa vrcholu kužeľovej plochy, a nazval ich *vetvy*. Apollonius si bol vedomý – a podľa terajších odborníkov aj vedel dokázať, no úplné dôkazy sa nezachovali – že definície

1, 2, 3 určujú tú istú rovinnú krivku, elipsu. Pritom *kužeľosečka* je prienikom kužeľovej plochy a roviny (Ap1.), čo zodpovedá našej definícii 1. V spomenutých spisoch nájdeme:

Ap2. *Súčet ohniskových vzdialeností (t. j. vzdialeností od ohnísk) ľubovoľného bodu elipsy sa rovná dĺžke hlavnej osi.* ([4], Proposition 73, spis III. 51, 52)

Ap3. *V regulárnej kužeľosečke je vzdialenosť od pevného bodu (ohniska) úmerná vzdialenosti od pevnej priamky (riadiacej priamky). Tento pomer vzdialeností nazývame excentricita (výstrednosť).* ([3, s. 119])

Grécki matematici pokračovali v štúdiu kužeľosečiek aj v nasledujúcich storočiach. Výraznejšie stopy v tejto oblasti zanechal pol tisícročia po Apolloniovi jeho obdivovateľ Pappus z Alexandrie (290–350 n.l.).

Veľmi stručný pohľad do neskorších období

Arabskí matematici sa v X. storočí intenzívne zaoberali zostrojením a overovaním nástroja, ktorým by bolo možné konštruovať kužeľosečky spojitým spôsobom, nie bod za bodom – čiže podobne, ako sa rysujú kružnice pomocou kružidla [6].

Kužeľosečky a pridružené telesá (elipsoid, paraboloid, hyperboloid, ...) sa vďaka svojim vlastnostiam dostali do centra záujmu v optike, astronómii a iných exaktných vedách, ale aj v umení. Medzi osobnosťami renesančnej Európy, ktoré významne prispeli k pokroku v tejto oblasti, vyniká Leonardo da Vinci (1452–1519) či Johannes Kepler (1571–1630).

Sedemnáste storočie zaznamenalo nástup a rozvoj projektívnych metód, ktoré sa naďalej dynamicky rozvíjajú. Tieto metódy ovplyvnili aj pohľad na kužeľosečky. Philippe de la Hire (1640–1718) bol jedným z prvých matematikov, ktorí považovali každú regulárnu kužeľosečku za obraz kružnice pri vhodne zvolenom premietaní.

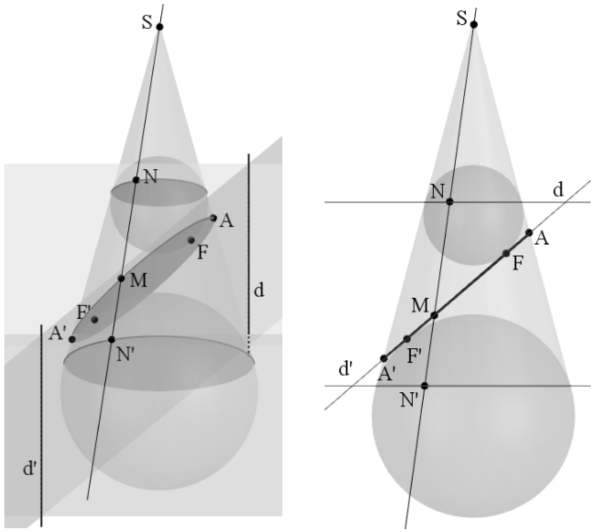
Dandelinove sféry

V roku 1822 zverejnil francúzsko-belgický matematik a banský inžinier Germinal Pierre Dandelin (1794–1847) názorný prístup umožňujúci elegantne dokázať Apolloniove tvrdenia [2, 8]. S podobným nápadom prišiel v tom istom období iný Belgičan Adolphe Quetelet (1796–1874). Preto nájdeme príslušnú vetu pod názvom *Dandelinova veta, Dandelin–Queteletova veta* alebo *Belgická veta o kužeľosečkách.* V našom príspevku uvádzame jej znenie a dôkaz pre elipsu.

Veta 1. *Nech je prienikom rotačnej kužeľovej plochy $\mathcal{K}$ a roviny $\mathcal{P}$ elipsa $\mathcal{E}$. Potom existujú dve guľové sféry vpísané do $\mathcal{K}$ a dotýkajúce sa $\mathcal{P}$, pre ktoré platí:*

(i) Dotykové body sfér s rovinou $\mathcal{P}$ sú ohniskami elipsy $\mathcal{E}$.

(ii) Priesečnice roviny $\mathcal{P}$ s rovinami, v ktorých ležia kružnice spoločné ploche $\mathcal{K}$ a jednotlivým sféram, sú riadiace priamky elipsy $\mathcal{E}$.



Obr. 2: Dandelinove sféry – vľavo mierny podhľad, vpravo pohľad spredu

Dôkaz tvrdenia (i). Rovina $\mathcal{P}$ neprechádza vrcholom kužeľovej plochy (označme ho S), pretože $\mathcal{P} \cap \mathcal{K}$ je elipsa. Preto sa práve dve spomedzi sfér vpísaných do $\mathcal{K}$ dotýkajú $\mathcal{P}$ (obr. 2). Tieto sféry pomenujme $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}'$, ich dotykové body s rovinou $\mathcal{P}$ označme F a F'.

Zvoľme bod M na elipse $\mathcal{E}$. Naším cieľom je dokázať, že $|MF|+|MF'|$ je konštanta, ktorá nezávisí od voľby bodu M. To bude zodpovedať ohniskovej definícii elipsy 2 s ohniskami F, F'.

Priamka $\overleftrightarrow{SM}$ je hranou plochy $\mathcal{K}$. Označme N, N' body, v ktorých sa $\overleftrightarrow{SM}$ dotýka sfér $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$. Keďže $\overleftrightarrow{MF}$ a $\overleftrightarrow{MN}$ sú dotyčnice z bodu M k tej istej sfére $\mathcal{G}$, pre vzdialenosti platí $|MF| = |MN|$. Analogicky

$|MF'| = |MN'|$. Získané rovnosti sčítajme, dostaneme

$$|MF| + |MF'| = |MN| + |MN'| = |NN'|. \tag{1}$$

Uvedomme si, že každá guľová sféra vpísaná do rotačnej kužeľovej plochy s ňou má spoločnú kružnicu, ktorá leží v rovine kolmej na os plochy. To znamená, že pre ľubovoľnú polohu bodu M na $\mathcal{E}$ bude vzdialenosť príslušných bodov N, N' rovnaká.

Tým sme dokázali tvrdenie (i) podobným spôsobom, aký predložili Dandelin aj Quetelet.

Dokážme tiež, že konštanta $|NN'|$ sa rovná dĺžke hlavnej osi elipsy, čiže $|NN'| = |AA'|$, kde A, A' sú hlavné vrcholy elipsy. Využijeme skutočnosť, že body A, A', F, F' sú kolineárne, keďže ležia v rovine $\mathcal{P}$ a zároveň v rovine $\mathcal{O}$ určenej vrcholom S a bodmi A, A'. Rovina $\mathcal{O}$ totiž obsahuje os kužeľovej plochy a pretína sféry $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ v hlavných kružniciach. Dotykové body sfér s rovinou $\mathcal{P}$ sú teda zároveň dotykovými bodmi spomenutých kružníc s priesečnicou rovín $\mathcal{P}$ a $\mathcal{O}$, čo je priamka $\overleftrightarrow{AA'}$. Platí

$$|AF| + |AF'| = |AF| + |AF| + |FF'| = 2|AF| + |FF'| \tag{2}$$

a podobne

$$|A'F| + |A'F'| = 2|A'F'| + |F'F|. \tag{3}$$

Na druhej strane, keďže bodom M na elipse môže byť aj niektorý hlavný vrchol elipsy, na základe (1) máme

$$|AF| + |AF'| = |NN'| = |A'F| + |A'F'|. \tag{4}$$

Vďaka (4) môžeme dať pravé strany (2) a (3) do rovnosti, odkiaľ

$$|AF| = |A'F'|.$$

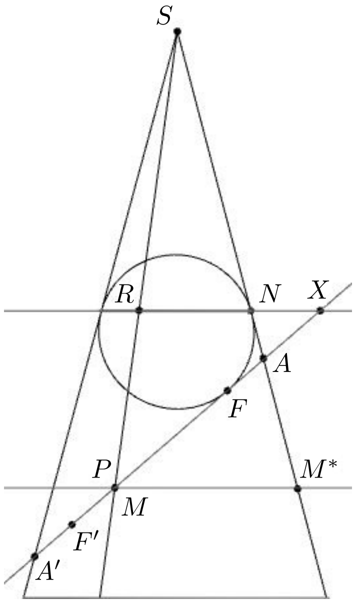
Túto rovnosť využijeme v ľavej časti (4)

$$|NN'| = |AF| + |AF'| = |A'F'| + |AF'| = |AA'|,$$

čím je dôkaz tvrdenia (i) aj s naším dodatkom dokončený.

Poznámka 1. Dandelin ani Quetelet nevyužili v dôkaze druhého tvrdenia myšlienku sfér. No už o niekoľko rokov neskôr (1829) britský matematik Pierce Morton predniesol a následne publikoval dôkaz [5], ktorý na tomto mieste s úpravami priblížime čitateľom.

Dôkaz tvrdenia (ii). Ako v (i), rovina $\mathcal{P}$ pretína rotačnú kužeľovú plochu $\mathcal{K}$ v elipse $\mathcal{E}$ s hlavnými vrcholmi A a A'. Do $\mathcal{K}$ je vpísaná sféra $\mathcal{G}$, ktorá sa dotýka roviny $\mathcal{P}$ v ohnisku F elipsy. Obr. 3 znázorňuje rez rotačného kužeľa vrcholovou rovinou $\mathcal{O}$ určenou bodmi S, A, A'. Keďže $\mathcal{P}$ ako aj rovina obsahujúca dotykovú kružnicu $\mathcal{K} \cap \mathcal{G}$ sú kolmé na $\mathcal{O}$, na obrázku sú znázornené ako priamky. Priesečnica týchto dvoch rovín d je priamka kolmá na $\mathcal{O}$, na obrázku ju vidíme ako bod X.



Obr. 3: Rez kužeľa a jednej sféry vrcholovou rovinou

Chceme dokázať, že ak $M \in \mathcal{E}$, tak pomer vzdialeností $|MF| : |Md|$ je konštanta nezávislá od voľby bodu M, čo zodpovedá definícii 3. Dokážeme tiež, že táto konštanta, štandardne označovaná e, spĺňa $e < 1$.

Hrana $\overleftrightarrow{SA}$ sa dotýka $\mathcal{G}$ v bode N. Z časti (i) vieme, že $|AF| = |AN|$. Takisto, ak $M \in \mathcal{E}$ je ľubovoľný bod a $R = \overleftrightarrow{SM} \cap \mathcal{G}$, tak $|MF| = |MR|$. Otočme M okolo osi kužeľovej plochy tak, že dostaneme bod $M^* \in \overleftrightarrow{SA}$. Bod M^* teda leží v rovine kolmej na os kužeľovej plochy a prechádzajúcej bodom M. Pri tom istom otočení sa R zobrazí do N. Preto platí

$$|MF| = |MR| = |M^*N|. \tag{5}$$

Nech P je kolmý priemet bodu M na priamku $\overleftrightarrow{AA'}$. Potom $\overleftrightarrow{MP} \,||\, d$, a teda pre vzdialenosti platí

$$|Md| = |Pd| = |PX|. \tag{6}$$

Využijeme skutočnosť, že všetky spomenuté body okrem M a R ležia v tej istej rovine $\mathcal{O}$. Platí $\overleftrightarrow{PM^*} \,||\, \overleftrightarrow{NX}$, bod A je priesečníkom úsečiek NM^* a PX. Preto

$$|M^*N| : |PX| = |AN| : |AX|. \tag{7}$$

Keďže $\mathcal{E}$ je elipsa, pre veľkosti uhlov platí $|\sphericalangle SAX| > |\sphericalangle ASA'|$. Preto $|AN| < |AX|$. Pomocou vzťahov (5), (6) ako aj $|AN| < |AX| = |Ad|$ dostaneme po dosadení do (7)

$$|MF| : |Md| = |AF| : |Ad| = e < 1.$$

Dôkaz pre druhé ohnisko F' a príslušnú priamku d' je analogický.

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou grantu KEGA 001UMB-4/2020.

Literatúra

[1] Čerňanová, V.: Elipsa, dcéra z rodiny kužeľosečiek. *Rozhledy matematicko--fyzikální*, 97 (2022), č. 4, s. 19–23.

[2] Dandelin, G.: Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique. *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles*, 2 (1822), s. 171–200.

[3] Heath, T. L.: *A History of Greek Mathematics.* Volume I. Clarendon Press, Oxford, 1921.

[4] Heath, T. L.: *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections.* Cambridge University Press, Cambridge, 1896.

[5] Morton, P.: On the Focus of a Conic Section. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 3 (1830), s. 185–190.

[6] Raynaud, D.: Le tracé continu des sections coniques à la Renaissance: applications optico-perspectives, héritage de la tradition mathématique arabe. *Arabic Sciences and Philosophy*, 17 (2007), č. 2, s. 299–345.

[7] Wells, D.: *The Penguin Dictionnary of Curious and Interesting Geometry.* 1st edition, Penguin Books, London, 1991.

[8] `https://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres`.