Učitel matematiky

Jana Slezáková; Darina Jirotková

Kalkulativní úlohy jako nástroj diagnostiky

Učitel matematiky, Vol. 30 (2022), No. 4, 193–216

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151484

KALKULATIVNÍ ÚLOHY JAKO NÁSTROJ DIAGNOSTIKY

Jana Slezáková, Darina Jirotková[1]

Úvod

V rámci projektu *Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí* byl mimo jiné vytvořen didaktický test z matematiky, jehož část byla věnována kalkulativním úlohám.[2] Pro tento test byla sestavena taková série úloh, která by pomohla odhalit a popsat problémy žáků v kalkulativních dovednostech. Číselný obor úloh byl volen tak, aby odpovídal požadavkům začátku 2. ročníku, tj. přirozená čísla do 20. Pouze v jedné úloze výsledek překračuje 20. Kvůli covidové situaci bylo však možné test zadat až v březnu daného školní roku; žáci byli tedy o půl roku starší, než projekt původně předpokládal. Žáci nicméně prožili více než půl roku v online výuce, což vyvolalo větší důraz na kalkulativní úlohy.

Kalkulativním úlohám se ve školách obvykle věnuje velká pozornost a často se využívají i jako nástroj pro známkování. Kalkulativní úlohy však mají i silný diagnostický potenciál, na který

[1]Článek byl zpracován v rámci projektu Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí, CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_076/0016390, realizovaného PedF UK za finanční podpory z programu OPVV MŠMT.

[2]S termínem kalkulativní úloha můžeme pracovat intuitivně tak, jak se termín obvykle používá – je to početní úloha, kterou může při vhodném zadání čísel a operací vykonat i jednoduchá kalkulačka. Nezáleží na tom, jestli se výpočet vykonává pamětně nebo písemně. Zadání kalkulativní úlohy bývá uvedeno výzvou *vypočítej*... a otázka úlohy začíná slovem *kolik*. Žákovy dovednosti provádět potřebné operace včetně správných zápisů a zacházení s matematickou symbolikou označujeme jako kalkulativní dovednosti (viz např. Kuřina, 2003).

chceme upozornit tímto článkem. Ne všechny chyby lze hodnotit stejně a ne vždy žákovi pomůže vidět, kolik chyb udělal, a rada, aby početní spoje důkladněji procvičoval. Žákovská řešení a debaty nad chybami a nad řešitelskými postupy mohou učitelům otevírat nové hlubší pohledy na schopnosti žáků.

Gradační parametry kalkulativních úloh

Úlohy do testu jsme volili tak, aby byly gradovány podle náročnosti. Takové jevy v úlohách, které lze obměňovat a tvořit tak úlohu jednodušší či náročnější, nazýváme gradační parametry. Při jejich výběru jsme vycházely z odborných prací zabývajících se strategiemi a chybami spojenými s matematickým uvažováním žáků prvního stupně (např. Hejný, 2014; Ryan & Williams, 2007; Kilpatrick & Findell, eds., 2001) a z vlastních bohatých zkušeností z pilotáží učebnic matematiky 1. stupně, jichž jsme spoluautorkami.

Prvním použitým gradačním parametrem byla *operace odčítání.* Operace odčítání je považována za náročnější než sčítání; i v učebních materiálech se vždy probírá později. Sérii jsme tedy začaly úlohami na sčítání.

Druhým gradačním parametrem je *číselný obor* (do 10, do 20, nad 20 ...). Představy žáků o číslech do 20 se budují důsledně pomocí mnohého modelování (Hejný, 2014). Avšak číselný obor nad 20 se převážně rozšiřuje již jen na abstraktní úrovni s využitím struktury čísel. Žáci pak tedy nemívají představy o číslech nad 20 podepřeny předmětnou představou, která by je navedla k počítání pomocí modelování. Proto je práce v oboru nad 20 náročnější.

Náročnost úlohy také ovlivňuje, zda je nutné počítat s *přechodem přes desítku.* Je zřejmé, že úlohy vyžadující přechod přes desítku jsou považovány za náročnější zejména v nižších ročnících, jak vypovídají například učitelé, kteří se účastnili výzkumu v (Rendl et al., 2013).

Dalším gradačním parametrem je umístění neznámé v úlohách typu $a \pm b = c$, kde jedno z čísel a, b a c je neznámé. Takové trojici čísel (a, b, c) říkáme *aditivní triáda.*[3] Když žák v úloze, kde jsou dána dvě čísla a, c, nebo b, c, neumí najít třetí číslo, tj. nezná strategii, jak třetí číslo z daných dvou vypočítat, znamená to, že neumí použít správnou vazbu v aditivní triádě. Za nejméně náročnou je považována úloha, kde je neznámá na pozici c. Za nejnáročnější je považována úloha, kde je neznámá na pozici a. Úloha typu $x \pm b = c$ je náročná zejména pro ty žáky, kteří výpočty provádějí s oporou o předmětné představy. Tito žáci mají problém si celou úlohu vymodelovat a modelování začít neznámým počtem (viz např. Budínová, 2018).

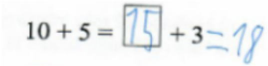
Náročnější je úloha typu $a + b = c + d$. Jde o čtyři čísla provázaná operací sčítání. Takovou čtveřici čísel (a, b, c, d) nazýváme *aditivní kvadriáda.* Aby žáci uměli pracovat s aditivní kvadriádou, je důležité, aby vnímali součet nejen jako proces, ale také jako číslo, tzn. jako koncept (Hejný et al., 2006). Pro takovéto porozumění zápisu, např. zápisu $a + b$, se v didaktice matematiky ujal termín *procept* (složenina dvou anglických slov *process* a *concept*) od badatelů Gray a Tall (1994). Zároveň je nutné, aby žáci rovnost nevnímali pouze jako výzvu k provedení naznačeného výpočtu, ale aby ji vnímali jako relaci (ekvivalenci). Tzn. že součet/číslo na pravé straně od rovnítka se musí rovnat součtu/číslu na levé straně od rovnítka. Výstižné je připodobnění rovnosti jako relace rovnoramenným vahám v rovnováze.

O žákovi, který např. za rovnítko napíše 15 jako na obrázku 1, lze říci, že chápe rovnost operačně; rovnítko pro něj znamená instrukci „počítej zleva doprava a za rovnítko napiš výsledek“ (např. Hejný, 2014; Budínová, 2018).[4] Toto chápání rovnosti může

[3] Upřesníme termín aditivní triáda. Termínem *externí aditivní triáda* rozumíme trojici čísel (a, b, c), z nichž jedno je součtem dalších dvou. Mentální projekci tohoto objektu do vědomí člověka pak nazveme *interní aditivní triáda* (Hejný, 2014).
Triáda je „tušením či vědomím souvislosti čísel. Vztah dvou čísel vyjádřený třetím konstituuje triádu – tři čísla, která nějak patří dohromady.“ (Rendl, 1997, s. 197)

[4] Obdobné zápisy se v hodinách matematiky někdy vyskytují například při řešení složených slovních úloh: „Karel má 20 autíček. Petr má o 5 autíček více než Karel a Pavel má o 3 autíčka více než Petr. Kolik autíček má Pavel?“ Řešení žáci často napíší takto: $20 + 5 = 25 + 3 = 28$. Chybné zápisy bývají

představovat překážku později, když žáci začnou pracovat s proměnnými a řešit rovnice (Knuth et al., 2006; Vondrová, 2019).



Obr. 1: Operační chápání rovnosti

Podobně jako u triády, i u kvadriády můžeme gradovat náročnost úloh umístěním neznámé na pozici a, b, c či d.

Posledním gradačním parametrem je přítomnost *antisignálu* – jde o úlohy, jejichž řešení vyžaduje jinou operaci, než je operace v nich deklarovaná. Např. v úloze $\square + 12 = 19$ lze očekávat, že ji někteří žáci budou řešit odčítáním $(19 - 12)$, pro tyto žáky je tedy znaménko plus antisignálem, neboť znamená sčítání, ale žáci správně provádí odčítání jako inverzní operaci ke sčítání. Podle našich zkušeností mnozí žáci řeší podobné úlohy dočítáním („12 a kolik je 19?“) nebo dočítáním po jedné (12, 13, . . . , 19) a někdy je jejich počítání doprovázené ukazováním na prstech. V tomto případě se antisignál neprojeví.

Charakteristika použitých úloh, jejich diagnostický potenciál, sběr a analýza dat

V tabulce 1 představujeme použité úlohy a jejich gradační parametry.

a) $11 + 8 = \square$
Úloha diagnostikuje dovednost sčítat menší dvojciferné číslo s jednociferným bez přechodu přes desítku. Úloha je snadná. Jejím vyřešením by měli žáci získat pocit úspěchu a pozitivně se naladit na řešení dalších úloh.

Úlohy b) až d) diagnostikují schopnost volby vhodné řešitelské strategie a stejně jako některé další úlohy je můžeme charakterizovat jako rovnice, v nichž je neznámá vyznačena prázdným oknem.

učiteli tolerovány, protože myšlenkově jsou v pořádku, vysvětlení, proč nejsou v pořádku z hlediska formálního, bývá ale problematické.

Tab. 1: Gradační parametry v úlohách

Úloha	Deklarovaná operace ±	Číselný obor 10–20 / 0–20 / 10–30	Přechod přes desítku S / BEZ	Pozice neznámé v triádě $a+b=c$ $x=a/b/c$	Pozice neznámé v kvadriádě $a+b=c+d$ $x=a/b/c/d$	Antisignál ANO / NE
a) $11+8=\square$	+	10–20	BEZ	c		NE
b) $13+\square=17$	+	10–20	BEZ	b		ANO
c) $\square+12=19$	+	10–20	BEZ	a		ANO
d) $\square+6=15$	+	0–20	S	a		ANO
e) $18-4=\square$	−	10–20	BEZ	c		NE
f) $14-9=\square$	−	0–20	S	c		NE
g) $16-\square=13$	−	10–20	BEZ	b		NE
h) $\square-8=17$	−	10–30	S	a		ANO
i) $10+5=\square+3$	+, +	10–20	BEZ		c	ANO
j) $\square+2=7+4$	+, +	0–20	S		a	ANO

b) $13+\square=17$
Úloha je opět poměrně snadná. Žáci mohou zvolit např. dočítání v rámci jedné desítky bez přechodu, případně odčítání. Ve druhém případě žák pracuje s antisignálem.

c) $\square + 12 = 19$
Úlohy, v nichž je neznámá na první pozici v zápisu, jsou považovány za náročné. Náročnost úlohy vnímají zejména ti žáci, kteří ještě v mysli pracují s předmětnými představami: „Mám neznámý počet kuliček a k nim přidám 12 kuliček.“

d) $\square + 6 = 15$
Úloha je komplikována nutností počítání s přechodem přes desítku. Stejně jako v úloze c) je první číslo neznámé. Očekáváme, že žák, který udělá chybu v úloze c), ji udělá i zde. K úspěšnému vyřešení úlohy by žáci měli mít již vybudovanou nějakou strategii (odčítání, pokus-ověření-korekce, modelování, např. na počítadle). Žáci, kteří mají upevněnou aditivní triádu $(6, 9, 15)$, řeší nejspíše vhledem.

e) $18 - 4 = \square$
Úloha diagnostikuje dovednost odčítání jednociferného čísla od dvojciferného bez přechodu přes desítku. Je snadná. Žák, který si uvědomuje, že odčítání nepřechází přes desítku, si situaci značně zjednoduší a odčítá pouze $8-4$. Žák, který chybuje, ale nechyboval přitom v předchozích úlohách, může mít problém s porozuměním samotné operaci odčítání. Pravděpodobně má základní spoje na sčítání uloženy v paměti, ale bez porozumění vazby mezi sčítáním a odčítáním, tj. nemá upevněnou aditivní triádu $(18, 4, 14)$.

f) $14 - 9 = \square$
Zde je již nutno počítat s přechodem přes desítku, což může vést k potížím.

g) $16 - \square = 13$
V této rovnici není nutno provádět přechod přes desítku. Lze očekávat, že žáci budou volit řešitelskou strategii odčítání po jedné, možná použijí i prsty či odčítání $16 - 13$.

h) $\square - 8 = 17$
Úloha je komplikovanější než úloha g) kvůli nutnosti přechodu přes desítku a umístění neznámé na začátku.

Úlohy i) a j) mohou diagnostikovat porozumění rovnosti a operaci sčítání. Tento typ úloh nebývá v učebnicích 1. stupně nijak frekventovaný, proto lze očekávat poměrně velkou chybovost. Žádná z úloh nevyžaduje přechod přes desítku, úloha j) je náročnější umístěním neznámé na pozici a.

i) $10 + 5 = \square + 3$
j) $\square + 2 = 7 + 4$

Výše uvedené úlohy byly v rámci didaktického testu zadány ve 29 třídách 21 pražských i mimopražských škol, které se účastní výše zmíněného projektu. Testy zadávali řešitelé projektu a jejich vyhodnocení provedli vyškolení opravovatelé. Každou z úloh řešilo mezi 589 a 624 žáky 2. ročníku. Při vyhodnocování byla sledována úspěšnost žáků a byly klasifikovány chyby, které se v řešeních objevily.

Vybrané výsledky

Přehled výsledků je uveden v tabulce 2. Neuvádíme počet žáků, kteří úlohu neřešili, proto se součet počtu chybujících žáků a počtu řešících žáků nerovná počtu respondentů zahrnutých ve výzkumu. Ve čtvrtém sloupci jsou uvedeny chyby s největší četností, která se však u různých úloh značně liší. Tyto chyby považujeme za významné a budeme s nimi tedy dále pracovat. Poslední sloupec zahrnuje všechny další chyby s malou četností.

Vzorek žáků, kteří úlohu řešili, je poměrně velký. Lze tedy sledovat, do jaké míry se nám podařilo úlohy vhodně gradovat. Např. je vidět, že mezi úlohami g) a h) je velký gradační skok. Úloha g) má úspěšnost 98,1 % a úloha h) 75,8 %. Úloha h) je však náročnější ve všech sledovaných gradačních parametrech – mění se číselný obor, vyžaduje počítání s přechodem přes desítku, je to úloha náročnější vzhledem k pozici neznámé a je v ní přítomen antisignál. Pokud bychom úlohy použili ve škole a chtěli zjemnit gradační skok, mohli bychom úlohy gradovat vždy pouze v jednom parametru. V testu by to ovšem vedlo k neúměrnému nárůstu počtu úloh.

Tab. 2: Výsledky

Úloha	Počet řešitelů / úspěšnost v %	Počet různých chyb	Nejčastější chybný výsledek [počet výskytů]	Ostatní chybné výsledky [počet výskytů]
a) $11 + 8 = \square$	623 / 97,11 %	6	20 [4], 18 [4], 17 [3]	9 [2], 16 [1], 3 [1]
b) $13 + \square = 17$	624 / 96,63 %	4	30 [12]	6 [2], 14 [1], 3 [1]
c) $\square + 12 = 19$	622 / 94,05 %	13	6 [7], 8 [7], 5 [4], 17 [4], 31 [4], 9 [3]	14 [2], 3 [1], 2 [1], 4 [1], 11 [1], 12 [1], 19 [1]
d) $\square + 6 = 15$	621 / 93,40 %	12	8 [13], 21 [7]	7 [2], 10 [4], 11 [4], 19 [3], −1 [1], 1 [1], 3 [1], 4 [1], 6 [2], 16 [1]
e) $18 - 4 = \square$	621 / 98,55 %	7	-	10 [1], 12 [1], 15 [1], 19 [1], 4 [1], 13 [2], 22 [1]

Úloha	Počet řešitelů / úspěšnost v %	Počet různých chyb	Nejčastější chybný výsledek, [počet výskytů]	Ostatní chybné výsledky [počet výskytů]
f) $14 - 9 = \square$	622 / 93,70 %	10	6 [15], 4 [7], 15 [6]	3 [2], 7 [2], 9 [2], 11 [1], 18 [1], 20 [1], 23 [1]
g) $16 - \square = 13$	622 / 98,71 %	3	-	4 [2], 29 [2], 13 [2]
h) $\square - 8 = 17$	590 / 75,80 %	24	9 [68], 19 [6], 26 [14], 24 [12], 23 [6], 20 [6]	1 [5], 2 [1], 4 [1], 5 [1], 6 [1], 7 [5], 11 [3], 12 [1], 14 [1], 18 [1], 21 [2], 22 [1], 27 [1], 28 [1], 29 [2], 30 [1], 31 [2], 35 [2]
i) $10 + 5 = \square + 3$	601 / 24,46 %	11	15 [283], 18 [140], 2 [9]	7 [2], 8 [2], 28 [2], 11 [2], 21 [2], 25 [2], 13 [1], 5 [1]
j) $\square + 2 = 7 + 4$	589 / 30,56 %	14	5 [301], 13 [43], 1 [28], 18 [17], 11 [9]	4 [3], 10 [3], 8 [2], 14 [2], 6 [1], 7 [1], 17 [1], 23 [1], 25 [1]

Další velký gradační skok vidíme mezi úlohami h) a i) (úspěšnost 75,8 % a 24,46 %). I když některé parametry u úlohy h) jsou náročnější než u úlohy i) (např. počítání s přechodem přes desítku), úloha i) je podle výsledků významně náročnější. Příčinu vidíme zejména v přechodu z triády na kvadriádu, což přináší nutnost změny pojetí rovnosti z operačního na konceptuální (relační) (Vondrová, 2019). Zjemnění gradace by bylo možné řešit vložením alespoň jedné úlohy typu $13 = 6 + \square$, $15 = 19 - \square$, $17 = \square - 3$.

Je zajímavé, a pro nás překvapivé, že z hlediska procentuální úspěšnosti se jeví jako nejjednodušší úloha g). U této úlohy se v našem vzorku vyskytují pouze 3 různé chybné výsledky a její úspěšnost je 98,71 %. Po ní následuje úloha e) s úspěšností 98,55 % (7 různých chybných výsledků s minimálním výskytem). Obě úlohy jsou na odčítání, které je všeobecně považováno za náročnější než sčítání. Úloha a), kterou jsme považovali za nejjednodušší, je vzhledem k úspěšnosti až třetí (97,11 %, 6 různých chybných výsledků s malým výskytem). Samozřejmě, že zde mohou hrát roli i další parametry, které nejsme z písemného záznamu schopni sledovat, například pořadí, ve kterém je úloha řešena, nebo konkrétní volba čísel. K tomuto jevu však nemáme oporu v odborné literatuře.

Chyby, jejich možné příčiny a návrhy na reedukaci

Z organizačních důvodů nebylo možné s žáky, kteří úlohy řešili, vést rozhovory. Naše názory na možné příčiny chyb opíráme o své dlouholeté zkušenosti získané prací s žáky 1. stupně a vedením praxí budoucích učitelů, o diskuze s prvostupňovými učiteli a v neposlední řadě o poznatky z odborné literatury. V níže uvedených tabulkách (viz tab. 3–10) představíme možné příčiny jen těch chybných výsledků, které jsou nejfrekventovanější (viz tab. 2).

a) $11 + 8 = \square$

Tab. 3: Úloha a)

Chyba [počet]	Příčina	Reedukace
17 [3], 18 [4], 20 [4]	Žák dočítá po jedné, ukazuje si na prstech a přitom chybuje.	Je třeba nechat žáky modelovat operaci sčítání různými způsoby – nejen na prstech, ale i pohybem těla, např. na stovkové tabulce na podlaze, pohybem na číselné ose nebo simulací pohybu pomocí figurky.

b) $13 + \square = 17$

Tab. 4: Úloha b)

Chyba [počet]	Příčina	Reedukace
30 [12]	Žák sčítá, nerozumí zápisu úlohy ($a+x = c$), používá strategii signálu: vidím +, sčítám.	Žák sčítat umí, není potřeba posílit nácvik. Je potřeba prohloubit porozumění vazbám v aditivních triádách, např. diskuzemi obohacovat spektrum řešitelských strategií žáka: dočítání, odčítání, zjednodušení rozkladem na deset a jednotky, využití žákových majákových spojů, např. „vím, kolik je 3 + 5, to je 8, ale tady má vyjít 7, tedy musím zmenšit přičítané číslo o 1.“

c) $\square + 12 = 19$

Tab. 5: Úloha c)

Chyba [počet]	Příčina	Reedukace
6 [7], 8 [7], 5 [4], 9 [3]	Žák počítáním po jedné a ukazováním si na prstech chybuje.	Je třeba modelovat různými způsoby řešení rovnice $x + b = c$; např. pomocí dvou misek s fazolkami nebo Dienesovými hranolky i na prstech a pohybem na číselné ose nebo figurkou na stovkové tabulce.
17 [4]	Žák nemá dobré představy o dvouciferných číslech. Dobře odčítá $9 - 2 = 7$, a protože se zadání úlohy odehrává ve druhé desítce, napíše 17.	Učitel dá žákovi příležitost propojovat výpočty s modelováním např. pomocí kuliček a dalších výše zmíněných modelů.
31 [4]	Žák sice dobře sečte $12 + 19 = 31$, ale chybně interpretuje zápis úlohy $x + b = c$, podobně jako v úloze b) používá strategie signálu.	jako u úlohy b)

d) $\square + 6 = 15$

Tab. 6: Úloha d)

Chyba [počet]	Příčina	Reedukace
8 [13]	a) Žák chybně využívá strategie majákových spojů, např. si řekne $7 + 7 = 14$, 14 je o 1 menší než 15 a 6 je o 1 menší než 7, takže musím zvětšit o 2. Zvětší ale číslo 6 místo čísla 7. b) Žák počítáním po jedné a ukazováním si na prstech chybuje.	jako u úlohy c) – první řádek tabulky
21 [7]	Žák sčítá $6 + 15 = 21$, dále stejně jako v úloze c) – poslední řádek tabulky.	jako v úloze b)

f) $14 - 9 = \square$

Tab. 7: Úloha f)

<table>
<tr><th>Chyba [počet]</th><th>Příčina</th><th>Reedukace</th></tr>
<tr><td>6 [15]</td><td rowspan="2">Žák počítáním po jedné a ukazováním si na prstech chybuje.</td><td>jako u úlohy a) a navíc práce s Dienesovými hranolky</td></tr>
<tr><td>4 [7]</td><td rowspan="2">K modelování úlohy je vhodné využívat desítkové počítadlo, Dienesovy hranolky, stovkovou tabulku nebo peníze, aby se zviditelnilo, co se děje při přechodu přes desítku.</td></tr>
<tr><td>15 [6]</td><td>Žák je přesvědčen, že je nutné odčítat menší číslo od většího, tedy odčítá $9 - 4 = 5$, ale vidí, že ještě nepracoval s desítkou, tedy ji přičte.</td></tr>
</table>

h) $\square - 8 = 17$

Tab. 8: Úloha h)

Chyba [počet]	Příčina	Reedukace
9 [68]	Žák správně odečte $17 - 8$, nerozumí zápisu úlohy ($x - b = c$), používá strategii signálu: vidím minus, odčítám.	Žák odčítat i s přechodem přes desítku umí. Je potřeba prohloubit porozumění vazbám v aditivních triádách, např. modelováním, ale i diskuzemi obohacovat spektrum řešitelských strategií žáka. Mnohdy stačí dát žákům příležitost takovéto úlohy řešit a hlavně je podložit reálnou zkušeností. Např.: v sáčku je několik kuliček, 8 jich odebereme a 17 jich v sáčku zbyde. Kolik jich tam bylo původně? Je vidět, že to je úloha s antisignálem.
19 [6]	Žák také správně odčítá $17 - 8 = 9$, jako v předchozím případě, ale má problémy s přechodem přes desítku. Uvažuje, že výpočet je ve 2. desítce, tak napíše chybně 19.	Porozumění vazbám v aditivních triádách lze posílit modelováním úlohy. Je vhodné využívat desítkové počítadlo, Dienesovy hranolky, stovkovou tabulku nebo peníze, aby se zviditelnilo, co se děje při přechodu přes desítku.
26 [14], 24 [12], 23 [6]	Žák sčítá $17 + 8$ s chybou.	Tyto chyby nejsou nijak závažné, neboť žák ví, že má sčítat. Stačí, aby si uměl výsledek ověřit např. pomocí manipulativního počítadla a stovkové tabulky, což jsou nástroje kontroly.

Chyba [počet]	Příčina	Reedukace
20 [6]	Žák si rozloží 8 na $3 + 5$, k 17 přičte 3 a chybný výsledek 20 zapíše. Přičtení 5 pravděpodobně z důvodu malé kapacity pracovní paměti neprovede.	Je třeba posilovat pracovní paměť.

V této úloze evidujeme 93 chybných výsledků v rozmezí 1 až 17. Žáci, kteří napíší, že číslo, od kterého se odčítá (menšenec), je menší než výsledek (rozdíl), nejsou zvyklí ověřovat smysluplnost svého řešení a nejspíše nemají dobře vybudované představy o odčítání v oboru přirozených čísel. Pravděpodobně mají nacvičené spoje na odčítání bez vztahu ke sčítání (nebudují se aditivní triády). I když je známo, že úlohy tohoto typu ($x - b = c$) jsou pro žáky náročné, výsledky menší než 20 (nebo obecněji: $x < c$) se proti našemu očekávání objevily. Reedukace porozumění odčítání by měla probíhat nejdříve přes modelování s předměty i vlastním pohybem. Potom je třeba rozvíjet vazby v aditivních triádách, což znamená v tomto případě předkládat sady úloh $17 + 8$, $8 + 17$, $25 - 8$, $25 - 17$, a to za podpory modelování a řešení reálných situací.

i) $10 + 5 = \square + 3$

Tab. 9: Úloha i)

Chyba [počet]	Příčina	Reedukace
15 [283]	Žák počítá $10 + 5$, zapíše 15 a číslo 3 ignoruje. Příčina chyby je, že žák rovnost vnímá operačně, „počítáme zleva doprava“. Někteří žáci dopsali ještě jeden výsledek (18) takto: $10 + 5 = \underline{15} + 3 = 18$ (viz níže žák Matěj), což potvrzuje myšlenku operačního vnímání rovnosti.	Zde není problém v samotných operacích, ale v porozumění zápisu. Je důležité rozvíjet konceptuální (relační) porozumění rovnosti. K tomu je důležité pracovat s reálnými situacemi a modely, např. Cuisenairovy hranolky, váhy. Je potřeba též rozvíjet porozumění komutativnosti sčítání, aby pravou stranu žák uměl vidět i jako $3 + \square$. Viz další komentáře u charakteristiky úlohy i). Je důležité dávat žákům příležitost řešit podobné úlohy s kvadriádou, ale také úlohy typu $15 = \square + 3$.
18 [140]	Žák nerozumí zápisu, vidí znaménko + a sčítá $10 + 5 + 3$. Výsledek 18 zapíše do okna.	
2 [9]	Žák nerozumí zápisu a vybere si z něj jen tu část, které rozumí, což je $5 = \square + 3$.	

j) $\square + 2 = 7 + 4$

Tab. 10: Úloha j)

Chyba [počet]	Příčina	Reedukace
5 [301]	Žák správně počítá $5 + 2 = 7$, avšak nerozumí zápisu, a tak si z něj vybere jen tu část, které rozumí, což je $\square + 2 = 7$.	viz i)
13 [43]	Žák nerozumí zápisu, vidí znaménko + a sčítá $2 + 7 + 4$. Výsledek 13 zapíše do rámečku.	
11 [9]	Žák nerozumí zápisu, a tak z něj vybere pouze to, čemu rozumí, tedy $7+4$, a výsledek 11 zapíše do rámečku.	

U chybných výsledků 1 (s výskytem 28) a 18 (s výskytem 17) bychom způsob výpočtů žáků pouze spekulovali bez opory o zkušenost. V každém případě je ale zřejmé, že tito žáci nerozumí zápisu a je potřeba s nimi mluvit a dále pátrat po příčinách jejich chyb.

Závěrem tohoto oddílu dodáme několik poznámek.

Za prvé, příčiny chyb a návrhy na reedukace uvádíme přirozeně bez nároku na úplnost. Chyby (a to nejen ty s malým výskytem) mohly být také zapříčiněny únavou žáka či chvilkovou ztrátou jeho pracovní energie. Učitel by měl dále pátrat po příčinách, ať už rozhovorem s žákem, nebo analýzou jeho řešení dalších úloh. Může se stát, že žák má daný chybný spoj uložen v dlouhodobé paměti (např. $8 + 6 = 13$). V tomto případě je účinná reedukační metoda kognitivního konfliktu, což znamená, že z řešení jiných úloh vyplyne nějaká nesrovnalost. Např. z řešení úlohy „Když sečteme dvě sudá čísla, je výsledek sudé číslo, nebo liché číslo?“ vyplývá, že 13 nemůže být správný výsledek. Nebo v úloze: $4+4+6 = \square$ se nabízí sečíst nejdříve $4 + 6$ a pak $10 + 4$. Tedy je opět zřejmé, že výsledek 13 je chybný. Oba příklady úloh nabourají daný spoj a vedou k potřebě opravy chyby.

Jako reedukační kroky také často navrhujeme návrat k modelování čísel i operací. Platí to zejména v postcovidové době, neboť děti v online výuce hodně pracovaly doma s rodiči a pravděpodobně pamětně nacvičovaly číselné spoje bez doprovodného modelování.

Ve všech případech chybných řešení doporučujeme budovat u žáka potřebu kontroly výsledků úlohy. Každý učitel ví, že žák si chybu často sám opraví, když ho vyzve ke kontrole. Tím by se mělo žákovi zvědomit, že kontrola je také nástrojem k odhalení případné chyby.

Příčinou chyby, ke které dojde při řetězených výpočtech, je mnohdy nedostatečná kapacita pracovní paměti (Páchová, 2015). Buď ji žák již odčerpal, nebo ji má malou. K řetězení výpočtů dochází například při počítání s přechodem přes desítku, pokud je žák veden počítat strategií rozkladu jednoho sčítance, což se ve školách děje velice často. Uvedeme velice jednoduchý příklad a popíšeme ho tak, aby bylo zviditelněno, že žák v mysli vykonává nejméně šest mentálních kroků:

1. Při počítání $7+8$ si žák nejdříve z dlouhodobé paměti vybaví rozklad čísla 10, ve kterém se vyskytuje 7, tj. $7 + 3$.
2. Na číslo 3 zaměří pozornost.
3. Najde rozklad čísla 8, ve kterém je 3, tj. $3 + 5$.
4. Číslo 5 uloží do krátkodobé paměti.
5. Provede výpočet $7 + 3 = 10$.
6. Vybere z krátkodobé paměti 5 a sečte $10 + 5 = 15$.

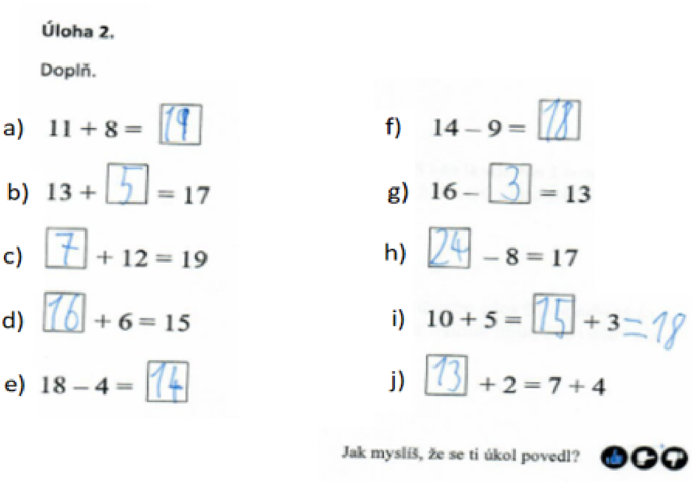
Rozšiřování kapacity pracovní paměti je tedy nutné v každém případě.

Ilustrace žákovského řešení

Pro ilustraci se nyní podíváme na řešení jednoho žáka, Matěje (pseudonym), a pokusíme se promítnout naše reedukační návrhy na jeho chyby a podívat se na ně v kontextu všech 10 úloh (viz obr. 2). U Matěje nás nejprve zaujal ojedinělý chybný výsledek 16 v relativně jednoduché úloze d) a řešení úlohy i), kde doplnil ještě jakoby konečný výsledek číslo 18. Pak jsme si všimli, že Matěj chybuje v šesti z deseti úloh (b, d, f, h, i, j), ale na sebehodnotící otázku „Jak myslíš, že se ti úkol povedl?“ (obr. 2) odpovídá vybarvením palce nahoru, tedy je se svou prací spokojený. Z toho usuzujeme, že výsledky si byl jistý. To potvrzuje i jeho písmo – je stále stejně velké, nejeví známky nejistoty, nikde neškrtá.

Matěj chyboval ve všech úlohách, kde je přítomen přechod před desítku, a to jak při sčítání, tak při odčítání. Další gradační parametr, který jeho chybovost ovlivnil, je počet čísel v zápise, tedy zda se jedná o triádu, nebo kvadriádu. V ostatních parametrech chyboval nekonzistentně. Také je zajímavé, že chyboval v každé druhé úloze, kromě posledních tří úloh, kde chyboval ve všech. To může poukazovat na vynakládání energetického úsilí.

Další úvahy uvádíme s předpokladem, že žák řešil úlohy v pořadí, jak jsou napsány.



Obr. 2: Řešení žáka Matěje

V úloze b) udělal Matěj chybu, která je výše popsána v obecné rovině – pravděpodobně při dočítání po jedné chyboval při používání prstů. Možná si ukázal první prst již při vyslovení čísla 13. Úloha se mu zdála snadná, a proto jí nevěnoval plnou pozornost. To je potvrzeno tím, že náročnější úlohu c) vyřešil dobře. Té již věnoval více pozornosti, protože si uvědomoval její náročnost.

Jeho kognitivní energie tím byla ale vyčerpána a v obdobné úloze, která graduje pouze v parametru přechod přes desítku, udělal zase zásadní, ale ojedinělou chybu. To, že se jeho chyba vyskytla pouze jedinkrát z námi získaných 621 řešení a že nedokážeme najít strategii, jak k výsledku 16 Matěj mohl dojít, poukazuje na možnost momentálního výpadku kognitivní energie. Druhý den by stejnou chybu pravděpodobně neudělal, a kdyby měl rozvinutou potřebu kontroly, mohl ji sám odhalit. Následující úloha e) je snadná, Matěj nechyboval a její snadnost podpořila jeho sebevědomí a pocit úspěchu. Jenže v následující úloze f) udělal chybu jako v úloze d), u níž neumíme popsat příčinu. Je to však opět chyba při počítání s přechodem přes desítku. Je možné, že při výuce nebo doma v průběhu online výuky často slýchával varování: „Pozor, to je s přechodem přes desítku, to je těžké.“ Proto úloze věnoval zvýšenou pozornost, která odčerpala jeho energii. Výsledky v úlohách d) a f) se zdají být nesmyslné, zatímco chybný výsledek v úloze h) je ke správnému výsledku blízký. Matěj tedy zřejmě volil správnou strategii a chyboval pouze v její realizaci.

V úloze i) se Matěj dopustil té nejčastější chyby. Na samotnou kalkulaci nemusel vynakládat mnoho energie, je tedy zřejmé, že rovnost vnímal operačně, a platí vše, co je k této chybě popsáno výše. To, že Matěj měl potřebu dopsat ještě 18, je pozitivní, protože si byl vědom, že by rovnost jinak neplatila.

Matějovo řešení úlohy j) je zajímavé tím, že jakoby sčítal zprava doleva $(7 + 4 + 2)$ a prázdné okénko je z tohoto směru na konci, tedy do něj zapsal součet 13. Opět je to evidence operačního vnímání rovnosti.

Shrňme návrhy reedukačních kroků pro Matěje. Především je u něj nutné budovat potřebu nástroje kontroly. Jedním z velmi účinných nástrojů je odhad. I u tzv. sloupečkových úloh mohou být žáci vyzýváni k odhadu.

Dále je potřeba u Matěje rozvíjet pracovní paměť, což je patrné z toho, že ani jednu úlohu s přechodem přes desítku nevyřešil správně. Právě tyto úlohy jsou náročnější na řetězení myšlenkových operací.

To, že Matěj sčítal zprava doleva v úloze j), by mohlo ulehčit posun jeho operačního vnímání rovnosti ke konceptuálnímu (relačnímu). Pokud by si sám kontroloval řešení v úloze i), pravděpodobně by nepřišel na to, že je chybné. Podle našich zkušeností v tomto případě pomůže, když někdo zakryje poslední číslo (18), a žák uvidí, že rovnost neplatí. Také je možné zápis přepsat na dva ($10 + 5 = 15$, $15 + 3 = 18$) a z toho žák také vidí, že rovnost nenastává.

Závěr

Cílem článku bylo ukázat učitelům, jak lze kalkulativní úlohy využít jako nástroj pro diagnostiku numerických dovedností žáků. Připomínáme, že byť považujeme numerické dovednosti žáků (a to nejen kalkulativní) za důležité, je známo, a zahraniční výzkumy to potvrzují (Fuchs et al., 2019; Moscardini, 2010), že i když se v těchto dovednostech žáci výrazně zlepší, nemusí se to promítnout do jejich schopnosti řešit slovní úlohy. Výzkumy ovšem také potvrzují, že porozumění základním početním operacím se efektivně prohlubuje právě prostřednictvím řešení slovních úloh a diskuzí o jejich matematické struktuře.

Kdyby Matěj naši sadu úloh dostal v běžné písemné práci ve škole, pravděpodobně by byl hodnocen známkou 3 nebo 4 s doporučením, aby více procvičoval úlohy tohoto typu. Klademe si otázku, do jaké míry by mu taková rada pomohla se zlepšit.

Snažili jsme se ukázat, že informace o počtu chyb v kalkulativních úlohách žákům nepomůže tolik, jako jim pomůže práce s jejich příčinami, ze které pro žáka vyplyne rada, jak se jim příště vyhnout. Důležitá je také učitelem moderovaná diskuze žáků o různých postupech řešení. Učitel při ní zviditelní všechny zmíněné strategie, a tím ukáže, že neexistuje pouze jediný postup, který vede ke správnému výsledku. Žáci mají pak příležitost si zvolit takový postup, který jim je kognitivně blízký, i když je z pohledu učitele „neohrabaný“. Tím dochází k hlubšímu porozumění vazbám mezi čísly.

Uvědomujeme si, že podobná hluboká analýza žákovských chyb je časově velice náročná a učitel si ji nemůže dovolit dělat pokaždé. Ovšem pokud se o ni čas od času pokusí, jistě zvýší svou citlivost na žákovské chyby a tím i schopnost porozumět žákovskému přemýšlení při řešení kalkulativních úloh.

Literatura

[1] Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. st. ZŠ k řešení některých typů úloh v matematice.* MU. https://munispace.muni.cz/library/catalog/view/1237/3436/990-1/0#preview

[2] Fuchs, L. S., Fuchs, D., Seethaler, P. M., & Craddock, C. (2019). Improving language comprehension to enhance word-problem solving. *Reading & Writing Quarterly, 36*(2), 142–156. https://doi:10.1080/10573569.2019.1666760

[3] Gray, E. M., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a ´proceptual´ view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.2.0116

[4] Hejný, M., Jirotková, D., & Kratochvílová, J. (2006). Early conceptual thinking. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.) *PME 30. Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 289–296). Charles University in Prague.

[5] Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. stupně.* UK v Praze, PedF.

[6] Kilpatrick, J. S., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* The National Academies Press.

[7] Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297–312.

[8] Kuřina, F. (2003). Kultura školské matematiky. In J. Zhouf (Ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar* (s. 90–104). JČMF, Pedagogické centrum HK, SZŠ HK.

[9] Moscardini, L. (2010). 'I like it instead of maths': how pupils with moderate learning difficulties in Scottish primary special schools intuitively solved mathematical word problems. *British Journal of Special Education, 37*(3), 130–138. https://doi:10.1111/j.1467-8578.2010.00461.x

[10] Páchová, A. (2015). *Možnosti tréninku pracovní paměti a jeho vliv na kognitivní funkce.* [Disertační práce, Karlova univerzita]. http://hdl.handle.net/20.500.11956/67688

[11] Rendl, M. (1997). Vývoj počítání v první třídě. In *Zpráva projektu GAČR406/94/1417 Žák v měnících se podmínkách současné školy* (s. 171–228). http://kpsold.pedf.cuni.cz/psse/pdf/tridy/1/5rendl.pdf

[12] Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E., & Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* UK v Praze, PedF.

[13] Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4–15. Learning from errors and misconceptions.* Open University Press.

[14] Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice.* UK v Praze, PedF.

Abstract

The aim of the article is to show teachers one of the ways to diagnose elementary pupils' knowledge. Diagnosis is an important element of formative assessment in teaching (not only) mathematics. Surprisingly for many, sets of calculation tasks can also serve as a diagnostic tool. We offer a specific method of diagnosis that we have implemented using data from a research project that focuses on school failure in mathematics and Czech language at the elementary school level. We analysed pupils' solutions of ten calculation tasks that were part of a mathematics test. In the paper, we characterize the tasks and present their diagnostic poten-

tial and grading parameters. For each task, we report the number of solvers, their success rates, and all errors that appeared in their solutions. For the most common errors, we describe their likely causes and suggest re-education procedures. We show how some of the re-education procedures can be applied to a specific case of a pupil.

Jana Slezáková, Darina Jirotková
Pedagogická fakulta
Univerzita Karlova
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: jana.slezakova@pedf.cuni.cz
darina.jirotkova@pedf.cuni.cz