Jiří Dittrich

K sázce Saint-Exupéryho

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 2, 82–84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151450

K SÁZCE SAINT-EXUPÉRYHO

JIŘÍ DITTRICH

Ve druhém čísle 3. ročníku časopisu *Učitel matematiky* uveřejnil doc. J. Bečvář zajímavou úlohu, za jejíž vyřešení nabídl osobní gratulaci vedoucího redaktora časopisu psanou plnícím perem značky Parker. S tak velkorysou nabídkou se nesetkávám často. A protože už nejsem začínající učitel, řídím se pedagogickou zásadou č. 1387: *Neumíš-li úlohu vyřešit, zadej ji studentům.* Výsledky jejich bádání byly pro mne natolik překvapivé, že je nabízím i dalším čtenářům tohoto časopisu.

Některé studenty úloha zaujala, a tak se pustili do řešení. Rozdíl několika generací je znát; při současném masovém rozšíření výpočetní techniky si proto dnešní řešitelé téměř vždy vypomohli užitím osobního počítače.

Obratem jsem začal dostávat řešení, která většinou vyhovovala zadání úlohy, byla však získána bez velkého přemýšlení vytvořením jednoduchého programu pro PC. Uvědomil jsem si, že úloha je zadána nejednoznačně. Zadání jsem proto doplnil o požadavek nejmenšího možného řešení.

I pak jsem získal dvě různá řešení — obě pro dvojnásobek čísla 311 850 jako obsahu základny.

- První je výsledkem programu v Pascalu a výsledná výška je 1 275 *cm*, délky podstavných hran jsou 540 *cm* a 1 155 *cm*.
- Druhý výsledek byl získán na počítači Commodore, program byl ve strojovém kódu. Výsledné velikosti podstavných hran jsou 825 *cm* a 756 *cm*, výška činí 1 119 *cm*.

Zajímavější než samotný výsledek byly nejasnosti spojené s hledáním řešení úlohy, případně postupy studentů neužívajících počítač.

Zjistil jsem, že řadě studentů není jasná formulace: *Obsah základny se rovná násobku 311 850 a neznámého čísla.* Za násobek považovali libovolný reálný násobek. Poukaz na definici pojmu násobek, který byl probrán, a je uveden v učebnici tak, jak je v matematice obvyklé, příliš silný dojem neudělal. Patrně dělám chybu při vysvětlování a především užívání jazyka matematiky. Obávám se však, že nejasnosti v pojmech definice, věta nejsou mezi studenty, byť maturanty z matematiky, výjimkou.

Rovněž pojem pythagorejských čísel je pro mnohé studenty redukován na trojici čísel 3, 4, 5 a jejich násobky. Po překvapujícím zjištění, že tomu tak není, nalezl jeden ze studentů následující dva způsoby „generující" pythagorejská čísla.

1. Vyjdeme z trojice (3, 4, 5). První číslo zvětšujeme o 2, druhé a třetí číslo vždy o násobek čísla 4 (po řadě o 8, 12, 16, 20, ...). Dostáváme tyto trojice:
(5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), ...

2. Vyjdeme z trojice (4, 3, 5). První číslo opět zvětšujeme o 2, druhé a třetí zvětšujeme o nejbližší vyšší liché číslo (po řadě o 5, 7, 9, 11, ...). Dostáváme tyto trojice:
(6, 8, 10), (8, 15, 17), (10, 24, 26), (12, 35, 37), ...
Některé z nich vzniknou jako násobky trojic získaných podle prvního návodu.

Uvedené algoritmy generování pythagorejských trojic jsou součástí následujícího studentského řešení problému Saint-Exupéryho, při kterém nebyl použit počítač.

Z poměrů pythagorejských trojúhelníků jsem si vybral ty nejnižší a po odzkoušení několika z nich jsem si vybral poměr 7 : 24 : 25 *pro řešení zadaného příkladu.*
Platí:

$$7 \cdot k \cdot 24 \cdot k = 311\,850 \cdot z\,,$$

$$7 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot k^2 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot z\,,$$

$$2^2 \cdot k^2 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot z\,,$$

$$k = \sqrt{\frac{3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot z}{2^2}}\,, \qquad z = 3 \cdot 11 \cdot 4 = 132\,,$$

$$k = \sqrt{3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^2} = 495\,.$$

Strany mají velikost

$$7 \cdot 495 = 3\,465, \qquad 24 \cdot 495 = 11\,880, \qquad 25 \cdot 495 = 12\,375 .$$

Výška kvádru má velikost 12 375 *cm.*

Uvedené řešení vyhovuje zadání, není však, jak vyplývá z výše uvedeného, nejmenší a ani nijak jinak významné.

Přímo se nabízí několik dalších otázek pro čtenáře *Učitele matematiky*:

- Jaká je nejmenší výška vyhovující původnímu zadání?
- Jak nalézt minimální výšku bez užití počítače?
- Jak se vyvarovat nesprávných závěrů při výkladu matematiky (zde redukce pojmu pythagorejská trojice čísel, násobek čísla)?

Věřím, že nastíněné problémy zaujmou další čtenáře časopisu. Rád se seznámím s odpověďmi na uvedené otázky i s tím, na co přijdou další studenti.

Na závěr bych rád připomněl, že popis všech pythagorejských trojic je znám. Je zajímavé, že ačkoliv věta o pythagorejských trojicích není nijak náročná, mám za to, že není všeobecně známá.

Věta: Řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ přirozenými čísly x, y, z, která jsou nesoudělná a x je sudé, je dáno tzv. „indickými formulemi“:

$$x = 2mn\,, \qquad y = m^2 - n^2\,, \qquad z = m^2 + n^2\,,$$

kde m, n jsou nesoudělná přirozená čísla různé parity a $m > n$.