Učitel matematiky

Jiří Veselý

Existuje královská cesta k exponenciále a logaritmu? (Dokončení z minulého čísla)

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 3, 129–145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151437

EXISTUJE KRÁLOVSKÁ CESTA K EXPONENCIÁLE A LOGARITMU ?

(Dokončení z minulého čísla)

JIŘÍ VESELÝ

Nezbytný nadhled

V tomto okamžiku si dovolme malé extempore na vyšší úrovni, která je většině středoškoláků dostupná až příliš pozdě či případně vůbec. Později, možná až na vysoké škole, až se žáci opět setkají s touto situací, lze provést tuto úvahu: ze vzorce (7) dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &\le \frac{f(x)-1}{x} \le \frac{1}{1-x}\,, \quad x \in (0,1)\,, \\ \frac{1}{1-x} &\le \frac{f(x)-1}{x} \le 1 \quad\,, \quad x \in (-1,0)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Odtud obdržíme limitním přechodem pro $x \to 0$ existenci i hodnotu limity, kterou zpravidla užíváme místo podmínky (b); jak se ukáže, podmínka (c) je důsledkem podmínek (a) a (b).

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1\,.} \tag{8'}$$

Snadno též spočteme derivaci funkce f v ostatních bodech $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(f(h)-1)}{h} = \\ &= f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = f(x)\,. \end{aligned}$$

Tím jsme mimochodem dokázali, že každé řešení rovnice (4) vyhovující podmínce (8') splňuje diferenciální rovnici $y' = y$. Protože platí $f'(x) = f(x) > 0$, je funkce f spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$ (a tedy i prostá na $\mathbb{R}$). Snadno si rozmyslíme, že s ohledem na $f(nx) = (f(x))^n$ je zřejmé, že pro libovolné $x_0 > 1$ platí $\lim_{n\to+\infty} f(nx_0) = +\infty$. Odtud plyne

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,. \tag{9}$$

Ze spojitosti funkce f a z věty o nabývání všech mezihodnot vidíme, že $f : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} (0,\infty)$ má inverzní funkci. Vůbec jsme nepotřebovali použít podmínku (c), odvodili jsme ji z (a) a (8'), resp. (a) a (b). Některé z těchto úvah lze předvést i v oktávě, spíše však jen jako ilustrativní příklady. Máme-li k dispozici věty o průběhu funkce, lze snadno dostat z funkcionální rovnice (a) a z (8') jednodušší podmínku (b), resp. (8); k tomu stačí vyšetřit funkci $f(x) - (x+1)$, která nabývá minima 0 v bodě $x = 1$. Poznamenejme, že důkaz ekvivalence (8) a (8') je pěkným cvičením. Z něj lze poměrně snadno odvodit bez náročné věty o nabývání mezihodnot, že funkce f z věty nabývá všech kladných hodnot (viz níže).

Nyní se vrátíme a budeme pokračovat od okamžiku naší „vysokoškolské odbočky" opět na elementární úrovni. Ze vztahu (b) plyne pro $h > 0$

$$f(h) \ge h + 1 > 1, \text{ a tedy } f(x+h) = f(x)f(h) > f(x)\cdot 1 = f(x)$$

pro každé $h > 0$. Zvolíme-li $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ a položíme $h = y - x$, dostaneme odtud $f(x) < f(y)$ a tedy

$$\boxed{\text{funkce } f \text{ je rostoucí (a tedy prostá) na } \mathbb{R}\,.} \tag{10}$$

Uvědomte si, že v tomto okamžiku dostáváme „zadarmo" z monotonie a z (c) spojitost f *všude* v $\mathbb{R}$, ač o tom není třeba mluvit. Nyní užijeme (7): pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme při dostatečně velkém $n \in \mathbb{N}$ odhad $|x/n| < 1$. Odtud pro všechna taková n snadno dostaneme (x buď pevně zvoleno)

$$1 + \frac{x}{n} \le f\left(\frac{x}{n}\right) \le \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-1}, \; 1 + \frac{x}{n} \le (f(x))^{1/n} \le \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-1},$$

resp. po zavedení označení

$$a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} := b_n \,. \tag{11}$$

I se středoškolskými znalostmi můžeme dokázat monotonii posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ pro pevně zvolené x pro dostatečně velká n a pak i to, že tyto limity jsou stejné pro každé $x \in \mathbb{R}$. Použijeme k tomu *Bernoulliovu nerovnost*. Připomeneme: pro všechna $x > -1$ platí

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx \,.}$$

To se snadno dokáže indukcí. Skutečně, pro $n = 1$ platí dokonce rovnost; dále platí

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \,,\end{aligned}$$

a pomocí matematické indukce dostáváme tedy potřebnou nerovnost.[1]

Dále budeme ještě potřebovat klasickou nerovnost mezi *aritmetickým a geometrickým průměrem*: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle 0, \infty)$. Potom platí

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \,,$$

přičemž rovnost nastává právě jen v případě, že jsou si všechna x_k, $k = 1, 2, \ldots n$, rovna. Tuto nerovnost, kterou budeme nazývat *AG-nerovností*, přepíšeme do méně obvyklého ekvivalentního tvaru

$$\boxed{x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n .} \tag{12}$$

[1] Někteří autoři chápou Bernoulliovu nerovnost poněkud obecněji; srovnej např. s [Kla]. Nerovnost použil r. 1689 JAKOB BERNOULLI (1654 – 1705), znal ji však již prokazatelně ISAAC BARROW (1630 – 1677) v r. 1670; viz [Wa], str. 28.

Je podstatné, že i tuto nerovnost umíme dokázat jednoduchými prostředky: stačí nám k tomu matematická indukce. Pro dva činitele je její zdůvodnění triviální:

$$x_1 x_2 \le \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \iff 0 \le (x_1 - x_2)^2 . \tag{13}$$

Indukcí lze postupovat dvojím způsobem: první se opírá o důkaz pro n tvaru 2^k, $k = 1, 2, \ldots$, a posléze o přechod od n k $n-1$ (někdy se hovoří o „zpětné indukci"); druhý, který použijeme, je sice pro žáky našich středních škol patrně „méně rutinní", ale je jednodušší.

Nejprve si povšimneme, že tvrzení zřejmě platí v případě, že alespoň jedno z čísel x_ℓ, $\ell = 1, 2, \ldots, n$, je 0, nebo platí-li $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Tyto případy dále neuvažujeme. Pokud nahradíme v (12) všechna x_ℓ násobky Ax_ℓ, dostaneme

$$A^n x_1 x_2 \cdots x_n \le A^n \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n ;$$

lze tedy předpokládat, že platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$$

a provést důkaz pouze pro tento případ; pokud tomu tak není, lze přejít od x_ℓ k $y_\ell = n\,x_\ell (x_1 + \cdots + x_n)^{-1}$, $\ell = 1, \ldots, n$, která tuto podmínku již splňují. S ohledem na komutativitu sčítání a násobení a předem vyloučené případy stačí tedy v uvažovaném případě ukázat, že platí $x_1 x_2 \cdots x_n < 1$. Pro $n = 2$ to platí, neboť pak jsou nutně x_1, x_2 po eventuální vzájemné výměně tvaru

$$x_1 = x - \varepsilon, \quad x_2 = x + \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

a platí

$$x_1 x_2 = x^2 - \varepsilon^2 < x^2 = \left(\frac{(x+\varepsilon) + (x-\varepsilon)}{2}\right)^2 .$$

Nechť tedy tvrzení platí pro jisté $n \in \mathbb{N}$; ukážeme, že pak platí i pro $(n+1)$, čímž bude důkaz indukcí dokončen. Předpokládejme tedy, že platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = n + 1 ,$$

přičemž sčítanci nejsou vesměs rovny 1. S ohledem na komutativitu můžeme předpokládat, že platí

$$x_{n+1} = 1 - \varepsilon < 1 , \quad x_n = 1 + \eta > 1$$

s $\varepsilon, \eta > 0$. Nyní pro $x_n' = x_n + x_{n+1} - 1 = 1 + \eta - \varepsilon$ platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n' = n , \quad \text{a tedy} \quad x_1 x_2 \cdots x_n' \leq 1$$

podle indukčního předpokladu. S ohledem na

$$x_n x_{n+1} = (1+\eta)(1-\varepsilon) = (1+\eta-\varepsilon) - \eta\varepsilon < x_n'$$

je

$$x_1 x_2 \cdots x_{n+1} < x_1 x_2 \cdots x_n' \leq 1$$

a indukční krok je tak dokončen. Tím jsme hotovi s přípravnými úvahami a jsme připraveni dokázat *existenci* a *jednoznačnost* funkce vyhovující podmínkám (a) – (c).

Popišme stručně postup důkazu: pomocí Bernoulliovy nerovnosti dokážeme, že v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ je (při fixovaném x) posloupnost $\{a_n\}$ až na konečný počet členů neklesající, posloupnost $\{b_n\}$ až na konečný počet členů nerostoucí a že jsou obě omezené. Pak ukážeme, že mají stejnou limitu a že je rovna funkční hodnotě $f(x)$. Posléze dokážeme pomocí AG-nerovnosti, že limitní funkce f vyhovuje podmínkám (a) – (b), resp. i (c), čímž bude tvrzení dokázáno[2]. Podotkněme, že obě nerovnosti (Bernoulli, AG-nerovnost) bychom měli mít k dispozici poměrně velmi brzo a tak můžeme například říci nejprve velmi vágně, že se v jistém smyslu dají hodnoty $\exp x$, resp. každé funkce se stejnými vlastnostmi (nemáme

[2]Ne zcela přirozeným trikem lze i AG-nerovnost eliminovat; srv. [Ap].

ještě dokázánu jednoznačnost) přiblížit libovolně přesně pomocí členů posloupností $\{a_n\}, \{b_n\}$. Lze zdůraznit, že exponenciála je bodovou *limitou* polynomů, tedy algebraických funkcí.

Nejprve odhadneme s využitím Bernoulliovy nerovnosti

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+x}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n+x-1}\right)^n \frac{n+x-1}{n-1} = \\ &= \left(\frac{n^2+nx-n-x}{n^2+nx-n}\right)^n \frac{n+x-1}{n-1} \geq \\ &\geq \left(1-\frac{nx}{n^2+nx-n}\right)\frac{n+x-1}{n-1} = \\ &= \frac{n-1}{n+x-1}\cdot\frac{n+x-1}{n-1} = 1\,,\end{aligned}$$

což je pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ možné vzhledem ke vztahu

$$\frac{x}{n+x-1} \longrightarrow 0\,.$$

Odtud dostáváme $a_{n-1} \leq a_n$ pro všechna dostatečně velká n. Zcela stejným způsobem dokážeme monotonii posloupnosti $\{b_n\}$ (také pro dostatečně velká n). Tato posloupnost je však klesající: použijeme stejný „trik" na odhad podílu b_{n-1}/b_n *zdola* číslem 1. Omezenost obou posloupností je důsledkem (11).

K tomu, abychom ukázali, že obě tyto posloupnosti mají tutéž limitu, stačí dokázat, že pro pevně zvolené $x \in \mathbb{R}$ a všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n - a_n \to 0\,;$$

poznamenejme, že obě posloupnosti a tedy i jejich rozdíl jsou pro dostatečně velká n monotónní. Je-li $n_0 \in \mathbb{N}$ zvoleno tak, že pro $n \geq n_0$ jsou již $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ monotónní, pak pro tato n dostáváme pomocí Bernoulliovy nerovnosti

$$\begin{aligned}b_n - a_n &= \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \\ &\leq \left(1-\frac{x}{n_0}\right)^{-n_0}\cdot\left(1-\left(1-n\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)\right) = \\ &= \left(1-\frac{x}{n_0}\right)^{-n_0}\frac{x^2}{n} = K(x)/n \longrightarrow 0\,. \qquad (14)\end{aligned}$$

Protože pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in \mathbb{R}$ lze z předchozí úvahy nalézt takové n, že pro všechna $m \geq n$ je $b_m - a_m < \varepsilon$, je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{15}$$

Vidíme tedy, že exponenciála (pokud máme zaručenu její existenci) je jednoznačně určena pomocí vztahu

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}\,;$$

(dokázali jsme de facto, že každá funkce uvedených vlastností je limitou sestrojených posloupností funkcí). Závěrečnou úvahu je nejlépe provést až u definice limity, například jako jeden z motivačních příkladů. Pokud jsme schopni zvládnout definici limity v nižším ročníku, můžeme naznačené vágní úvahy zpřesnit i dříve (ale také nikoli, pokud je to v některé skupině žáků střední školy prakticky nemožné — pak jen prozradíme výsledek).

K důkazu existence funkce popsaných vlastností potřebujeme kromě definice limity i základní věty o limitách posloupností. Nevidím účelné je na tomto místě *dokazovat*, rád bych ale připojil komentář k probírání této partie na gymnáziu. Nepovažuji za ztrátu času dvojí začátek, tj. jeden vágní, ryze intuitivní a pak teprve později, např. až v oktávě, s potřebnou přesností. Ono intuitivní „blížení se“ lze pojmout např. tak, že $\{a_n\}$ *se blíží k* a*, jestliže v libovolném intervalu* (α,β) *takovém, že* $a \in (\alpha,\beta)$ *leží skoro všechna* a_n, kde skoro všechna (zkratka s.v.) z hlediska nekonečnosti $\mathbb{N}$ znamená *všechna až na konečný počet.* Jde tedy vlastně o *přesnou definici*, ale po jejím prvním vyslovení není ještě nutné žáky trápit úvahami o kvantifikátorech apod.

Tento přístup lze snadno modifikovat jak směrem k ε-δ-definici, tak i „topologickému“ pojetí (jeho výhodou je snadný a přirozený přechod k *nevlastní limitě*; abych předešel případným podezřením, upřesňuji, že podle mého přesvědčení by se z této části *mělo* žákům gymnázia předvést *pouze to*, že geometrická řada s kvocientem ≥ 1 a harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ divergují k $+\infty$). Dále explicitně vymezme minimální program týkající se limit posloupností:

- *Definice posloupnosti, její omezenost a monotonie, vybraná posloupnost.*
- *Definice (vlastní) limity posloupnosti v* $\mathbb{R}$*; jednoznačnost; limita vybrané posloupnosti; axiom úplnosti* $\mathbb{R}$.
- *Konvergentní posloupnost je omezená.*
- *Limita a nerovnosti, tj.*

$$(a_n \to a > 0) \Longrightarrow (a_n > 0 \quad pro\ s.v.\ n) ,$$
$$(a_n \geq 0,\ a_n \to a) \Longrightarrow (a \geq 0) .$$

- *Limita a aritmetické operace. tj.*

$$(a_n \to a,\ b_n \to b) \Longrightarrow (a_n \pm b_n \to a \ \pm b) ,$$
$$(a_n \to a,\ b_n \to b) \Longrightarrow (a_n \cdot b_n \to a \cdot b) ,$$
$$(a_n \to a,\ b_n \to b \neq 0) \Longrightarrow (b_n^{-1} \to b^{-1} ,\ a_n/b_n \to a/b) ;$$

poslední tvrzení o podílu a i některá jiná ani potřebovat nebudeme, organicky sem však patří.

Vraťme se k našemu vyšetřování exponenciály: k dokončení důkazu existence musíme ukázat, že limita v „definiční" rovnosti (15) vpravo vyhovuje rovnici z (a), tj. (4) a podmínkám (b) a (c) z dokazované věty.

K tomu se výborně hodí AG-nerovnost; srovnej [Me], [Wa], str. 78, nebo jiný přístup v [Kla], str. 24 a 45. Položme tedy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n , \qquad x \in \mathbb{R} ,$$

a dokažme, že f vyhovuje rovnici (a). Z triviální AG-nerovnosti pro nezáporná x_1, x_2 (13) plyne pro každou dvojici bodů $x, y \in \mathbb{R}$ a pro s.v. n

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x+y}{2n}\right)^{2n} ,$$

a po limitním přechodu pro $n \to \infty$ (limity existují, využíváme tvrzení o součinu limit) dostáváme $f(x).f(y) \leq f(x+y)$. Pro obrácenou nerovnost využijeme opět AG-nerovnost, tentokrát ve tvaru (14). Z ní plyne opět pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ a pro všechna dostatečně velká n

$$\left(1+\frac{x+y}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{xy}{n}\right) \leq$$
$$\leq \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n,$$

z níž dostaneme opět limitním přechodem potřebnou nerovnost $f(x+y) \leq f(x)\,f(y)$, a tedy funkce f splňuje funkcionální rovnici (4). Protože je pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ posloupnost $\{a_n\}$ od jistého n monotonní a $x/n > -1$, lze opět použít Bernoulliovu nerovnost a odvodit

$$f(x) \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{x}{n} = 1+x\,.$$

Tím jsme dokázali, že f má vlastnost (b).

Problémem zůstává (c), neboť bychom měli de facto dokázat Darbouxovu[3] vlastnost jedné speciální spojité funkce. Bylo by neúměrným plýtváním silami snažit se dokázat tuto vlastnost z definice (proto se tato vlastnost postulovala, i když se to z nadhledu ukázalo jako zbytečné).

Můžeme však ideu důkazu přiblížit. Nechť funkce f má vlastnosti (a) a (b), avšak nenabývá hodnoty $T > 0$. Zvolíme $t_1 \in \mathbb{N}$ tak, aby $f(t_1) < T < f(t_1+1)$ a položíme $t_1 + 1 = t'_1$. Z čísel $t_1 + k/10$, $k = 0, \ldots, 9$, nalezneme to největší, pro nějž je $f(t_1 + k/10) < T$ a položíme je rovno t_2, zatímco t'_2 definujeme jako $t_2 + (k+1)/10$, atd. Pak existuje takové $x > 0$, že $t_n \nearrow x$ a $t'_n \searrow x$. Platí však $T_1 = \lim f(t_n) \leq T \leq \lim f(t'_n) = T_2$ a také $T_1 \leq f(x) \leq T_2$, tedy alespoň jedna nerovnost je ostrá. Proto $(f(t)-f(x))/(t-x)$ nemá pro $t \to x$ vlastní limitu $f(x)$, což vede

[3]GASTON JEAN DARBOUX (1842 – 1917) byl od r. 1900 sekretářem francouzské akademie. Vděčíme mu za mnoho originálních výsledků z více oblastí matematiky. Zmíněná vlastnost se někdy nazývá „vlastností nabývání mezihodnot“ .

ke sporu s formulí (8') a po ní následující úvahou. Nastíněná konstrukce není těžká a žákům připomene základní experiment při zavádění $\sqrt{2}$, je ale relativně zbytečná; neuškodí totiž konstatování, že se s důkazem obecnějšího tvrzení žáci setkají později při dalším studiu a že se zde důkaz proto vynechá.

I když se nepodaří dosáhnout toho, že látku pochopí *všichni žáci*, mělo by těm lepším uvíznout v hlavách dostatek poznatků, na něž lze navázat. Jako o doplňku této partie (např. v nepovinném semináři nebo v rámci výpočtů v základech informatiky, či při demonstracích na počítači) lze uvažovat o vyjádření čísla e; není obtížné dokázat, že (viz např. [Ja1])

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,.$$

Označíme-li pak s_k částečné součty řady vpravo, lehce lze obdržet odhad

$$0 < \mathrm{e} - s_n \leq \frac{1}{n\cdot n!}\,,$$

ze kterého se pak již vcelku jednoduše dokáže, že číslo e *není* racionální. Toto lze zvládnout patrně jen s vyspělejšími žáky střední školy, je to však užitečné pro poznání, že bez práce s iracionálními čísly se nemůžeme obejít; popsané doplňky naleznete opět např. v [Ja1].

Co podniknout s logaritmem

Bylo by možné začít i od logaritmu, museli bychom však stejně provést řadu analogických úvah jako výše. Na druhé straně můžeme těžit z toho, že jsme již mnoho věcí dokázali. Přirozený logaritmus tedy *definujme* jako inverzní funkci k exponenciále. Pozor, je to pojem obtížný, není proto vhodné šetřit při výkladu obrázky i jednoduchými příklady.

Na okamžik označme exponenciálu symbolem f a symbolem $\circ$ operaci skládání funkcí. Pak platí pro inverzní funkci f^{-1} (jde o speciální případ obecnější situace)

$$f^{-1}\circ f(x) = x,\ x\in\mathbb{R},\quad f\circ f^{-1}(u) = u,\ u\in(0,+\infty)\ ;$$

pro $u := f(x)$, $v := f(y)$, je tedy $f^{-1}(u) = x$, $f^{-1}(v) = y$. Snadno dostaneme

$$uv = f(x) \cdot f(y) = f(x+y), \text{ a tedy } f^{-1}(uv) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \ ;$$

srovnáním s (2) vidíme, že jsme na správné stopě: inverzní funkce k exponenciále skutečně vyhovuje základní rovnici pro logaritmy. Změníme nyní označení a budeme značit pomocí f inverzní funkci k exp. Stejnou úvahou jako jsme dospěli k funkcionální rovnici dospějeme postupně k dalším podmínkám a k formulaci tvrzení

Existuje jediná funkce f, pro kterou platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$

(a') $f(xy) = f(x) + f(y)$,

(b') $f(x) \leq x - 1$,

(c') $f : (0, +\infty) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}$.

Okamžitě odvodíme důsledky, které z (a') a (b') lehce vyplynou: z (b') vyplývá dosazením $f(x) = f(x) + f(1)$, takže zřejmě platí

$$\boxed{f(1) = 0 \, .}$$

Dále pro $x \in (0, +\infty)$ lehce dostaneme

$$0 = f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) ,$$

tedy pro všechna $x \in (0, +\infty)$ je

$$\boxed{f(x) = -f(x^{-1}) \, .}$$

Zároveň dostáváme pro $x, y \in (0, +\infty)$

$$\boxed{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \, .}$$

Vzhledem k (b') platí

$$\boxed{f(x) < 0 \, , x \in (0,1) \text{ a } f(x) > 0 \, , x \in (1, +\infty) \, .}$$

Konečně ze vztahů

$$f(x^2) = 2f(x)\ ,$$
$$f(x^{n+1}) = f(x^n \cdot x) = f(x^n) + f(x) = (n+1)f(x)$$

dostáváme indukcí pro všechna $x \in (0, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{f(x^n) = n\, f(x)\ .}$$

Snadno též ukážeme, že pro p celé a q přirozené, resp. $r \in \mathbb{Q}$ platí

$$f(x^{p/q}) = (p/q)\, f(x), \quad \text{resp.} \quad f(x^r) = rf(x)\ .$$

K tomu stačí položit $x^{p/q} = t$ a uvážit, že pak $x^p = t^q$ a tedy

$$pf(x) = f(x^p) = f(t^q) = qf(t), \quad \text{resp.} \quad f(t) = (p/q)\, f(x)\ ,$$

odkud již snadno vyplyne žádané.

Ještě jednou malý nadhled

Všimněme si, že všechna řešení rovnice (2) nabývají v bodě 1 hodnoty 0; použijeme k inspiraci rovnosti v (8'); hledejme tedy řešení rovnice (2), pro něž platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+1)}{x} = 1\ . \tag{16}$$

Snadno nahlédneme, že jde o podmínku

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1\ , \tag{17}$$

což s ohledem na $f(1) = 0$ dává

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 1\ .}$$

Zkusíme podobnou úvahu, jakou jsme již úspěšně použili pro případ rovnice (4), i na (2):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f((x+h)/x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h/x + 1)}{h/x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} .$$

Snadno jsme tedy vypočetli, že každé řešení rovnice (2) vyhovující na intervalu $(0, \infty)$ podmínce (16) nebo (17) splňuje podmínku: $f'(x) = 1/x$ (a samozřejmě podmínku $f(1) = 0$).

Pokud bychom použili základních znalostí o primitivních funkcích, ukáže se, že takovým řešením rovnice (2) je opět *jediná funkce*. Dospěli jsme zároveň k poznatku, který v historii logaritmu sehrál významnou roli, tj. k jeho souvislosti s hyperbolou $xy = 1$.

Zde si povšimneme toho, že problém jednoznačnosti řešení (2) byl vcelku jednoduše řešitelný na základě jedné hlubší věty[4] reálné analýzy, rozhodně však jednodušeji než problém jednoznačnosti řešení (4). Analyzujeme-li situaci, jde o jednoduchou aplikaci Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Ta však patří mezi „hlubší tvrzení“, neboť její důkaz využívá tvrzení o nabývání maxima pro spojitou funkci na uzavřeném intervalu. Pro každá dvě diferencovatelná řešení f, g rovnice (2) máme

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = x^{-1} - x^{-1} = 0 ,$$

a tedy jejich rozdíl (na *intervalu* $(0, \infty)$) musí být konstantní. S ohledem na rovnost $f(1) = g(1) = 0$ je $f \equiv g$.

Zpět na zem ...

Vraťme se však zpět k jednodušším úvahám.[5] Nejjednodušší je použít to, co již máme dokázáno o exponenciále: z její existence

---

[4] Věty, které využívají úplnosti reálné osy, bývá zvykem označovat jako „hlubší věty analýzy“, ale i ony jsou podle mého názoru různě technicky složité. Zde použitá věta patří k těm „méně obtížným“ .

[5] Pro čtenáře možná však ke složitějším, to je velice subjektivní; jistě si lze představit, že v oktávě se podobná úvaha provést již dá.

a jednoznačnosti dostáváme totéž pro logaritmus. Musíme ukázat to, co jsme v opačném pořadí dělali při motivační úvaze: je třeba dokázat, že *každá* funkce f vyhovující (a'), (b') a (c') má za inverzní funkci exponenciálu.

Lze si snadno představit, že by učitel z nějakých důvodů chtěl začít od logaritmů a na nich si „vše odpracovat". I to je možné, je to tak například provedeno v [BF]. Ve značně zhuštěné formě naznačme, jak se to dá udělat. Z nerovnosti obsažené v (b') plyne pro $x > 0$

$$-f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1\,,$$

takže dostáváme dvojici nerovností

$$1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x - 1\,. \tag{18}$$

Protože pro všechna $h > 0$ platí vztah

$$f(x+h) - f(x) = f\left(1 + \frac{h}{x}\right) > 0\,,$$

dostáváme odtud fakt, že log je rostoucí (a tedy prostá) funkce na $(0,\infty)$. Snadno dospějeme[6] dosazením $\sqrt[n]{x}$ za x do (18) k nerovnostem, které platí pro všechna $x > 0$:

$$1 - x^{-1/n} \leq f(x^{1/n}) \leq x^{1/n} - 1\,,$$

resp.

$$n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \leq f(x) \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\,. \tag{19}$$

S nalezenými posloupnostmi se již postupuje obdobně jako výše s (11) v případě exponenciály.

---

[6]Zde přeskakujeme jedno úskalí: existence n-té odmocniny není vůbec samozřejmá, ale není to však nadměrně obtížné.

Ještě není konec

Nyní si již patrně každý dokáže představit, jak definovat obecnou exponenciálu či obecnou logaritmickou funkci (o jiném základu). Klíč leží ve vztahu

$$a^b := \exp(b \log a), \quad a \in (0, +\infty), \ b \in \mathbb{R} . \tag{21}$$

Za zmínku stojí, že tyto funkce vyhovují opět zkoumaným funkcionálním rovnicím, k jejich jednoznačnému určení je třeba jen modifikovat dodatečnou podmínku. Jestliže ještě definujeme číslo e jako takovou hodnotu $a \in \mathbb{R}$, pro kterou je $\log a = 1$ (ekvivalentně: $\mathrm{e} = \exp 1$), dostáváme

$$\exp x = \mathrm{e}^x , \qquad a^x = \exp(x \log a) , \qquad x^b = \exp(b \log x) ;$$

u posledního vztahu je potřeba malé vysvětlení, neboť jde vlastně o jisté rozšíření či modifikaci stávající definice: je třeba říci, že je někdy účelné mít např. $\sqrt[3]{x}$ definovánu na celém $\mathbb{R}$ a dospět ke konsistentní dohodě (nejprve se musí ukázat, že staré a nové označení, zavedené jiným způsobem, nejsou ve sporu). Jde však o úvahy zcela běžné.

Na závěr malou filosofickou úvahu: krásné a těžké věci nejsou nikdy dostupné bez jisté námahy. Královských cest není nikdy dost a k mnoha věcem takový přístup neexistuje.[7] Dobrý učitel by je měl hledat celý život: je dělníkem, často mizerně placeným, přicházejícím mnohdy po krkolomných cestách do míst, kam pomáhá budovat cesty lepší. Jeden fakt je vcelku zřejmý: se „vzdělávacími dálnicemi“ vedoucími odkudkoli kamkoli se počítat nedá.

Vědomosti nejsou zboží a nedají se *koupit* ani v rozvinuté tržní společnosti. Lepší učebnice nebo snazší přístup k informacím se sice koupit dají, ale ne norimberský trychtýř. Cestu ke vzdělání si lze penězi někdy ulehčit, je však otázkou, zda je to vždy dobré. Vede to k tomu, že si vědomostí někteří přestávají vážit. Zejména u lidí, kteří se domnívají, že vědí všechno, je toto nebezpečí značné. A tak je vlastně docela dobré, že královské cesty *v podstatě neexistují*.

[7]Přírodní zákon o zachování nutné námahy funguje velmi spolehlivě.

LITERATURA:

[Ap] Apostol T. M. and al., *A century of calculus I, II*, The Mathematical Association of America, 1992.

[BF] Barner M., Flohr F., *Analysis I*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

[Bo1] Bourbaki N., *Elements of the History of Mathematics*, Springer Ver., Berlin, 1994, (překlad francouzského vydání z r. 1984; ruský překlad dřívejšího vydání je z r. 1963).

[Bo2] Bourbaki N., *Funkcii dějstvitělnogo peremenogo*, Nauka, Moskva, 1965, (ruský překlad francouzského díla „Fonctions d'une variable réelle" (Éléments de Mathématique, Livre IV)).

[BT] Blum W., Törner G., *Didaktik der Analysis*, Wanderhoek & Ruprecht, Göttingen, 1983.

[Če1] Čech E., *O funkcích* x^s, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$., Časopis pro pěst. mat. **82** (1957), 208 – 216.

[Če2] Čech E., *Elementární funkce*, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1947.

[Čer] Černý I., *Matematická analýza (1. část)*, TU Liberec, Ped. fakulta, Liberec, 1995.

[Ca] Cauchy L. A., *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Vol. 1 Analyse algébrique (Chap. V.)*, Œuvres, Ser. 2, Vol. 3, Paris 1897, pp. 98 – 113, 220, Paris, 1821.

[Do] Dontová E., *Matematika I (pro JCHI)*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1993.

[Da] Davidov L., *Funkcionální rovnice*, ÚVMO v Mladé Frontě, Praha, 1984.

[Ed] Edwards C. H., *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[Ev] Eves, H., *An introduction to the history of mathematics*, CBS College Publishing, New York, 1982, (5. vydání, první je z roku 1953).

[Go] Goldstine, H. H., *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*, Springer Ver., New York, 1977.

[Ja1] Jarník V., *Diferenciální počet I*, Academia, Praha, 1984, (7. vydání, první je z roku 1946).

[Ja2] Jarník V., *Integrální počet II*, Academia, Praha, 1984, (4. vydání, první je z roku 1955).

[Kla] Klambauer G., *Aspects of Calculus*, Springer Ver., Berlin, 1986.

[Kle] Klein F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer Ver., Berlin, 1908.

[Kli] Kline M., *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[Ko] Koecher M., *Klassische elementare Analysis*, Birkhäuser Ver., Basel, 1987.

[π] Lukeš & kol., *Problémy z matematické analýzy*, SPN, Praha, 1972.

[Me] Mendelsohn N. S., *An Application of a Famous Inequality*, Amer. Math. Monthly **58** (1951), 563 - 565.

[Ne] Neuman F., *Funkcionální rovnice*, SNTL (Matematický seminář 24), Praha, 1986.

[Ru] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Comp., New York, 1976.

[Sm] Smítal J., *O funkciách a funkcionálnych rovniciach*, Alfa, Bratislava, 1984.

[Stu] Struik D. J., *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963, (český překlad německého originálu Abriss der Geschichte der Mathematik, Berlin, 1963; existuje rovněž ruský překlad, který je snadno dostupný).

[To] Toeplitz O., *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Erster Band*, Springer Ver., Berlin, 1949, (svazek LVI řady „Die Grundlehren der Mathematische Wissenschaften“).

[Wa] Walter W., *Analysis 1*, Springer Ver., Berlin, 1992, (3. vydání, původně třetí svazek řady „Grundwissen Mathematik“).

[Wh] White A. J., *Real analysis: an introduction*, Addison-Wesley, London, 1968.

★ ★ ★

D

René Descartes

Jednou ráno vzbudil jsem se v obavě,
že ležím v cizí kartézské soustavě.
Upokojil jsem se ale brzy.
— Žádná soustava mi není cizí!

E. Calda