Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 4, 235–245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151432

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 21. – 24. 4. 1996 se uskutečnilo na Gymnáziu v Bílovci celostátní kolo 45. ročníku Matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C, pro školní rok 1996 – 1997.

Úlohy celostátního kola 45. ročníku Matematické olympiády

Bílovec, 21.–24. dubna 1996

1. Jestliže pro posloupnost $\bigl(G(n)\bigr)_{n=0}^{\infty}$ celých čísel platí platí

$$G(0) = 0$$
$$G(n) = n - G(G(n-1)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

potom

(a) pro každé přirozené číslo k je $G(k) \geqq G(k-1)$,

(b) neexistuje přirozené číslo k takové, že $G(k-1) = G(k) = G(k+1)$.

Dokažte. (M. Engliš)

Řešení: (a) Po určení několika prvních členů dané posloupnosti si můžeme všimnout, že pro malé hodnoty n je rozdíl $G(n) - G(n-1)$ buď 0, nebo 1. Toto tvrzení (z kterého už plyne tvrzení (a) úlohy) dokážeme matematickou indukcí.

První krok. Pro $n = 1$ je $G(0) = 0$, $G(1) = 1 - G\left(G(0)\right) = 1$, tedy $G(1) - G(0) = 1$, tj. uvedené tvrzení platí.

Druhý krok. Nechť $G(k) - G(k-1) \in \{0, 1\}$ pro každé přirozené číslo $k \leq n$. Odtud především plyne, že $0 \leq G(k) \leq k$ pro každé $k \leq n$, protože $G(0) = 0$. Dále je

$$G(n+1) - G(n) = 1 + G\left(G(n-1)\right) - G\left(G(n)\right).$$

Je-li $G(n-1) = G(n)$, je $G\left(G(n-1)\right) = G\left(G(n)\right)$, a tedy $G(n+1) - G(n) = 1$.

V opačném případě je $G(n) = G(n-1)+1$, čili $G(G(n-1)) - G(G(n)) = G(a) - G(a+1)$, kde $a = G(n-1)$ je nezáporné celé číslo nepřevyšující $n-1$, proto podle indukčního předpokladu platí $G(a) - G(a+1) \in \{-1, 0\}$. Tím je důkaz indukcí uvedeného tvrzení a zároveň i důkaz tvrzení (a) úlohy hotov.

(b) Postupujme sporem. Předpokládejme, že existuje přirozené číslo k, pro něž

$$G(k-1) = G(k) = G(k+1) = A.$$

Ze zadání ovšem plyne, že

$$A = G(k+1) = k+1 - G(G(k)) = k+1 - G(A).$$
$$A = G(k) = k - G(G(k-1)) = k - G(A),$$

takže

$$k+1 = G(A) + A = k.$$

což je hledaný spor, protože $k+1 \neq k$.

Dokázali jsme, že přirozené číslo k, pro které by platilo $G(k-1) - G(k) = G(k+1)$, neexistuje.

2. V prostoru je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AP, BQ a CR. Dokažte, že pro každý vnitřní bod V trojúhelníku PQR existuje čtyřstěn $ABCD$ takový, že bod V má ze všech bodů stěny ABC největší vzdálenost (po povrchu čtyřstěnu) od bodu D. (P. Černek)

Řešení: Nechť V je pevný vnitřní bod trojúhelníku PQR a předpokládejme, že hledaný čtyřstěn $ABCD$ existuje. Stěny ABD, BCD a CAD (prozatím neznámého) čtyřstěnu $ABCD$ sklopíme do roviny ABC. Dostaneme tak síť tohoto čtyřstěnu, ohraničenou lomenou čarou $AD_1BD_2CD_3A$. Naším cílem bude vybrat bod D tak, aby trojúhelník $D_1D_2D_3$ byl ostroúhlý, obsahoval trojúhelník ABC a aby bod V byl středem kružnice mu opsané. Platí totiž tvrzení: *Je-li S střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku KLM, pak pro každý jeho bod $X \neq S$ platí*

$$\min\{|XK|, |XL|, |XM|\} < |SK| = |SL| = |SM|.$$

(Toto tvrzení plyne z toho, že celý trojúhelník KLM je pokryt třemi kruhovými výsečemi o středech K, L, M a poloměru $|SK|$, přitom každý vnitřní bod $X \neq S$ trojúhelníku KLM leží uvnitř jedné z nich.)

Potřebujeme tedy, aby přímka AV byla osou úsečky D_3D_1, přímka BV osou D_1D_2 a přímka CV osou D_2D_3. Musí proto platit

$$|\sphericalangle D_1D_2D_3| = \pi - |\sphericalangle BVC|, |\sphericalangle D_2D_3D_1| = \pi - |\sphericalangle CVA|,$$
$$|\sphericalangle D_3D_1D_2| = \pi - |\sphericalangle AVB|.$$

Díky tomu, že $V \in \triangle PQR$, jsou úhly BVC, CVA a AVB tupé (stačí uvážit Thaletovy kružnice s průměry BC, CA a AB), takže vnitřní úhly hledaného trojúhelníku $D_1D_2D_3$ jsou známé a ostré. Můžeme tedy sestrojit libovolný trojúhelník $D'_1D'_2D'_3$ podobný neznámému trojúhelníku $D_1D_2D_3$, označit V' střed jeho opsané kružnice a na třech polopřímkách s počátkem V', které procházejí středy stran $D'_3D'_1, D'_1D'_2$ a $D'_2D'_3$. sestrojit (dostatečně blízko od bodu V') po řadě body A', B' a C' tak, aby $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (známe velikosti úhlů $V'A'B'$ a $V'A'C'$). Pak lomená čára $A'D'_1B'D'_2C'D'_3A'$ ohraničuje síť nějakého čtyřstěnu $A'B'C'D'$, který je podobný hledanému čtyřstěnu $ABCD$.

3. Je dáno šest tříprvkových podmnožin konečné množiny X. Dokažte, že prvky množiny X je možno obarvit dvěma barvami tak, aby žádná ze šesti daných podmnožin nebyla jednobarevná, tj. neměla všechny tři prvky stejné barvy. (P. Hliněný)

Řešení: Označme dané podmnožiny $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu n prvků množiny X. Začneme s případem $n = 6$. (Pokud má mnopžina X méně než 6 prvků, doplníme ji na šestiprvkouvou přidáním nových prvků, které nezmění množiny A_i.) Protože $\binom{6}{3} = 20 > 2 \cdot 6$, existuje tříprvková množina $Y \subset X$, která se nerovná ani žádné z množin A_i, ani žádnému doplňku $X - A_i$. Obarvíme-li prvky Y jednou barvou a prvky $X - Y$ barvou druhou, dostaneme „správné“ obarvení.

Nyní předpokládejme, že množina X má aspoň 7 prvků. Pak existuje dvojice různých prvků $u, v \in X$, které spolu neleží v žádné z množin A_i. (Opravdu, existuje totiž nejvýše $6 \cdot \binom{3}{2} = 18$ dvojic prvků, které patří do některé z množin A_i, zatímco všech dvojic prvků z X je aspoň $\binom{7}{2} = 21$.) Tuto dvojici prvků u, v „slepíme" do jednoho nového prvku w. Jinými slovy, pokud množina A_i obsahuje prvek u nebo prvek v, nahradíme ho prvkem w. Dostaneme opět šest tříprvkových podmnožin množiny X', která má o 1 prvek méně než původní množina X. Prvky množiny X' můžeme podle indukčního předpokladu „správně" obarvit; dáme-li prvkům u, v barvu prvku w a barvy ostatních prvků v X' zachováme, dostaneme „správné" obarvení množiny X. Tím je dokázán indukční krok, a tedy i tvrzení úlohy.

4. Je dán ostrý úhel XCY a na jeho ramenech CX, CY po řadě body A a B tak, že $|CX| < |CA| = |CB| < |CY|$. Popište konstrukci přímky, která protíná rameno CX a úsečky AB, BC po řadě v bodech K, L a M tak, že platí $|KA| \cdot |YB| = |XA| \cdot |MB| = |LA| \cdot |LB| \neq 0$. (P. Černek)

Řešení: Trojúhelníky ALK a BYL jsou podobné, protože $|\sphericalangle LAK| = |\sphericalangle YBL|$ ($|CA| = |CB|$) a

$$\frac{|KA|}{|LA|} = \frac{|LB|}{|YB|} \qquad \text{(ze zadání)}.$$

Odtud $|\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle BYL|$. Analogicky z podobnosti trojúhelníků ALX a BML vyjde $|\sphericalangle AXL| = |\sphericalangle MLB|$. Protože však body M, L a K leží v přímce, je také $|\sphericalangle MLB| = |\sphericalangle ALK|$. Potom $|\sphericalangle LYB| = |\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle AXL|$. Nyní

$$|\sphericalangle XLY| = |\sphericalangle XLB| + |\sphericalangle BLY| =$$
$$= (|\sphericalangle XAL| + |\sphericalangle AXL|) + (|\sphericalangle ABM| - |\sphericalangle LYB| = 2|\sphericalangle ABC|.$$

Odtud už vyplývá konstrukce hledané přímky:

1. oblouk $k = XDY$ v polorovině XYA, kde $|\sphericalangle XDY| = 2|\sphericalangle ABC|$.
2. L; $L \in k \cap AB$,
3. $\sphericalangle BLM|$; $M \in BC$, $|\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle AXL|$.
4. K; $K \in LM \cap \overrightarrow{CA}$.

Správnost konstrukce vyplývá z rozboru. Úloha má vždy právě jedno řešení.

5. Pro která celá čísla k existuje funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splňující

(i) $f(1995) = 1996$,

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y) + k \cdot f(D(x, y))$ pro všechna přirozená čísla x, y?

$D(x, y)$ označuje největší společný dělitel čísel x, y. (P. Hliněný)

Řešení: Ze vztahu (ii) pro $x = y$ vyplývá $f\left(x^2\right) = f(x \cdot x) = (k+2) \cdot f(x)$. Dvojnásobnou aplikací předchozího vztahu dostaneme

$$f\left(x^4\right) = f\left(x^2 \cdot x^2\right) = (k+2) \cdot f\left(x^2\right) = (k+2)^2 \cdot f(x).$$

Jiným postupem ale dostaneme

$$\begin{aligned} f\left(x^4\right) = f\left(x \cdot x^3\right) = f(x) + f\left(x^3\right) + k \cdot f(x) = (k+1) \cdot f(x) + \\ + f\left(x \cdot x^2\right) = (k+1) \cdot f(x) + f(x) + f\left(x^2\right) + k \cdot f(x) = \\ = (2k+2) \cdot f(x) + f\left(x^2\right) = (3k+4) \cdot f(x). \end{aligned}$$

Nyní stačí najít libovolné x, pro které je $f(x) \neq 0$, tedy například podle (i) $x = 1\,995$. Porovnáním předchozích dvou vztahů dostaneme podmínku

$$\begin{gathered} (k+2)^2 \cdot f(1\,995) = f\left(1\,995^4\right) = (3k+4) \cdot f(1\,995), \\ (k+2)^2 = 3k+4, \\ k \in \{0, -1\}. \end{gathered}$$

Pro $k = -1$ dostáváme funkcionální rovnici z domácího kola. Víme, že jejím obecným řešením je pro $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = f(p_1) + \cdots + f(p_n) - (n-1) \cdot f(1).$$

Podmínku (i) úlohy můžeme splnit například volbou $f(5) = 1\,996$, $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ a $f(1) = 0$.

Pro $k = 0$ dostáváme funkcionální rovnici

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

Odtud především pro $x = y = 1$ plyne $f(1) = 0$. Obecným řešením této rovnice pak je pro $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ funkce

$$f(x) = \alpha_1 \cdot f(p_1) + \cdots + \alpha_n \cdot f(p_n),$$

kde $f(p_i)$ jsou libovolná celá čísla. Opět stačí zvolit $f(5) = 1\,996$ a $f(p) = 0$ pro všechna prvočísla $p \neq 5$ jako výše.

6. Na stranách AB, BC a CA daného trojúhelníku ABC jsou dány po řadě body K, L a M tak, že platí

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} = \frac{1}{3}.$$

Jsou-li kružnice opsané trojúhelníkům AKM, BLK a CML shodné, jsou shodné i kružnice těmto třem trojúhelníkům vepsané. Dokažte. (J. Šimša)

Řešení: Dokážeme, že za uvedených předpokladů je trojúhelník ABC rovnostranný. Označme strany a úhly trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Z rovností

$$|KL| = 2R\sin\beta, |LM| = 2R\sin\gamma, |MK| = 2R\sin\alpha,$$

kde R je společný poloměr tří opsaných kružnic, vychází

$$|KL| : |LM| : |MK| = \sin\beta : \sin\gamma : \sin\alpha$$

takže $\triangle ABC \sim \triangle LMK$. Proto platí

$$|KL| = \lambda b, |LM| = \lambda c, |MK| = \lambda a,$$

přičemž koeficient podobnosti λ určíme úvahou o obsazích trojúhelníků: z rovností

$$S_{AKM} = S_{BLK} = S_{CML} = \frac{2}{9} S_{ABC}$$

plyne, že $S_{KLM} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, takže $\lambda^2 = \frac{1}{3}$. Napišme kosinové věty pro trojúhelníky ABC a KLM:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$\frac{1}{3}a^2 = (\frac{2b}{3})^2 + (\frac{c}{3})^2 - 2\cdot\frac{2b}{3}\cdot\frac{c}{3}\cdot\cos\alpha.$$

Odečteme–li od devítinásobku druhé rovnosti dvojnásobek první, dostaneme rovnost $a^2 = 2b^2 - c^2$. Z dalších dvojic kosinových vět odvodíme analogicky rovnosti $b^2 = 2c^2 - a^2$ a $c^2 = 2a^2 - b^2$, takže $a - b = c$. Trojúhelníky AKM, BLK a CMA jsou tedy shodné a mají shodné i vepsané kružnice.

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 1996-97
Kategorie A

A-I-1

Pro přirozené číslo k označme n_k součin prvních k prvočísel (např. $n_3 = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$). Zjistěte, pro která čísla k je možno zlomek

$$\frac{3^{n_k} - 1}{n_k}$$

krátit číslem větším než 2. (*R. Kollár*)

A-I-2

Najděte všechny dvojice mnohočlenů

$$f(x) = x^2 + ax + b, g(x) = x^2 + cx + d,$$

které splňují tyto podmínky:

(1) Každý z mnohočlenů f, g má dva různé reálné kořeny
(2) Je–li s libovolný kořen f, je i $g(s)$ kořen f
(3) Je–li s libovolný kořen g, je i $f(s)$ kořen g. (*J. Šimša*)

A-I-3

V libovolném trojúhelníku ABC označme a, b, c délky jeho stran a t_a, t_b, t_c délky jeho těžnic obvyklým způsobem. Rozhodněte, zda některá z nerovností

$$a < \frac{b+c}{2}, \qquad t_a > \frac{t_b + t_c}{2}$$

je důsledkem druhé, nebo se dokonce jedná o dvě ekvivalentní nerovnosti. (*J. Šimša*)

A-I-4

Do dané kruhové úseče jsou vepsány kružnice k_1, k_2. Kružnice k_1 se oblouku úseče dotýká v bodě A a základny úseče v bodě B. Kružnice k_2 se oblouku úseče dotýká v bodě C a základny úseče v bodě D.

(a) Dokažte, že body A, B, C, D leží na jedné kružnici.

(b) Uvažme nyní všechny takové dvojice kružnic k_1, k_2, které se navíc vzájemně dotýkají. Jaký útvar vyplní body jejich dotyku? (*J. Zhouf*)

A-I-5

Uvnitř čtyřstěnu $ABCD$ jsou dány body E, F tak, že žádné čtyři z bodů A, B, C, D, E, F neleží v jedné rovině. Čtyřstěn $ABCD$ je beze zbytku rozřezán na několik menších čtyřstěnů, jejichž vrcholy tvoří množinu A, B, C, D, E, F. Určete všechny možné počty menších čtyřstěnů, na které lze daný čtyřstěn uvedeným způsobem rozřezat. (*P. Hliněný*)

A-I-6

Každá z úhlopříček pravidelného n–úhelníku ($n \geq 5$) je obarvena jednou ze dvou barev (modře nebo červeně). Je povoleno postupně přebarvovat úhlopříčky tak, že v každém kroku vybereme jeden vrchol a změníme barvy všech úhlopříček, které z něj vycházejí (z modré na červenou a naopak). Rozhodněte, zda lze vždy úhlopříčky přebarvit tak, aby existovala

a) lomená čára

b) uzavřená lomená čára

složená vesměs z modrých úhlopříček a procházející každým vrcholem n–úhelníku právě jednou. (*J. Kratochvíl*)

Kategorie B

B-I-1

Pro která přirozená čísla n lze v pravidelném n–úhelníku najít uzavřenou lomenou čáru složenou z jeho n úhlopříček tak , aby procházela všemi jeho vrcholy a aby každé dvě z těchto n úhlopříček měly společný bod? (*P. Hliněný*)

B-I-2

Najděte všechny kvadratické funkce, které zobrazí interval $\langle 2, 5\rangle$ na interval $\langle 15, 27\rangle$ a jejichž graf prochází počátkem souřadné soustavy. (*P. Černek*)

B-I-3

Kolik dvacetičtyřmístných čísel, jejichž dekadický zápis obsahuje 22 číslic 1 a dvě číslice 2, je dělitelných sedmi? (*T. Hecht*)

B-I-4

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= 0,\\ \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} &= \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}. \end{aligned}$$

(*J. Šimša*)

B-I-5

V rovnoběžníku $ABCD$ označme po řadě E, F středy stran BC, CD. Veďte rovnoběžku s přímkou BD, která protne obvod čtyřúhelníku v bodech K, L tak, aby úsečka KL byla rozdělena úsečkami AE, AC, AF na čtyři shodné úsečky. (*J. Zhouf*)

B-I-6

Nad stranami ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou vně sestrojeny polokružnice. Označme po řadě K, L, M průsečíky prodloužených výšek trojúhelníku z vrcholů A, B, C s těmito polokružnicemi. Dokažte, že obrazec $AMBKCL$ tvoří plášť čtyřstěnu (trojbokého jehlanu s podstavou ABC). (*P. Leischner*)

Kategorie C

C-I-1

Číslo 4 896 je dělitelné jak svým prvním dvojčíslím (48), tak svým posledním dvojčíslím (96). Kolik je čtyřciferných čísel s tou to vlastností, která jsou navíc dělitelná číslem 17? (*J. Šimša*)

C-I-2

Každá strana konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je dvěma body rozdělena na tři shodné úsečky (obr.1). Ukažte, že čtyřúhelníky $KLMN$ a $PQRS$ mají stejný obsah. (*J. Zhouf*)

C-I-3

V pravoúhlém trojúhelníku ABC je K střed přepony AB a bod M leží na odvěsně AC tak, že $|AM| = 2|MC|$. Dokažte, že úhly MKC a ABM jsou shodné. (*Převzatá úloha*)

C-I-4

Karel si myslel dvě dvojciferná čísla. Mirkovi prozradil jejich rozdíl. Ten správně našel všech devět takových dvojic s daným rozdílem. Jardovi Karel prozradil součin obou dvojciferných čísel. Jarda správně určil všech osm takových dvojic s daným součinem. Která čísla si Karel myslel? (*P. Černek*)

C-I-5

V pravidelném trojbokém jehlanu $ABCV$ je délka boční hrany AV rovna 5 cm, délka hrany podstavy $|AB| = 4\sqrt{3}$ cm. Body K, L, M jsou paty kolmic vedených vnitřním bodem X podstavy ABC na boční hrany AV, BV, CV. Jak je třeba volit bod X, aby kulová plocha procházející body K, L, M a X měla co nejmenší průměr? Vypočtěte tento průměr. (*P. Leischner*)

C-I-6

Najděte všechny trojice celých čísel x, y, z, pro která platí $x + yz = z + xy = 6$. (*J. Zhouf*)

Výsledková listina celostátního kola 45. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.	David Opěla	4	GMK Bílovec	7 3 7 3 7 7	34
2.	Tomáš Bárta	4	G Zborovská, Praha	7 6 5 7 6 1	32
3.	Jan Spěvák	3	G Hellichova, Praha	7 - 7 7 6 2	29
4.	Michal Beneš	4	G Zborovská, Praha	7 4 3 7 7 0	28
5.-6.	Robert Špalek	4	G kpt. Jaroše, Brno	7 4 7 2 3 3	26
5.-6.	Daniel Král	4	G Zlín	7 5 0 0 7 7	26
7.-8.	Tomáš Brauner	3	G Moravský Krumlov	4 1 0 7 4 7	23
7.-8.	Petr Vilím	4	GMK Bílovec	4 5 0 0 7 7	23
9.	Jan Vybíral	3	GMK Bílovec	7 2 3 3 5 2	22
10.-11.	Karel Výborný	4	G Zborovská, Praha	7 6 0 0 7 1	21
10.-11.	Petr Vodstrčil	4	G Polička	7 0 0 0 7 7	21

Úspěšní řešitelé:

12.-13.	Roman Žeňka	4	G Jírovcova, Č. Budějovice	7 1 4 0 6 2	20
12.-13.	Pavel Strnad	5	GFXŠ Liberec	7 6 0 0 5 2	20
14.	Zbyněk Pawlas	4	GMK Bílovec	3 2 3 1 1 7	17
15.-17.	Petr Pudlák	3	G Zborovská, Praha	0 6 0 2 7 0	15
15.-17.	Jana Flašková	3	Svob. cheb. škola, Cheb	3 6 0 3 1 2	15
15.-17.	Petr Škovroň	4	GMK Bílovec	3 5 0 0 5 2	15
18.-20.	Jan Štola	3	G Zborovská, Praha	3 5 0 - 5 1	14
18.-20.	Radek Pelánek	2	G kpt. Jaroše, Brno	7 4 0 0 1 2	14
18.-20.	Jiří Benedikt	4	G Mikulášské nám., Plzeň	7 6 0 0 0 1	14
21.	Karel Zikmund	4	G Jihlava	0 1 0 6 5 1	13