Bohdan Zelinka

Axiomatika projektivní geometrie aneb skoro z ničeho krásná teorie

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 2, 75–80

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151399`

AXIOMATIKA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

aneb

SKORO Z NIČEHO KRÁSNÁ TEORIE

BOHDAN ZELINKA

Rovinná projektivní geometrie může být založena na soustavě axiomů, kterých je pouze pět, a z těch pěti pouze jeden je trochu složitější. A přitom se z těchto axiomů odvíjí krásná a bohatá teorie.

Felix Klein ve svém Erlangenském programu mluví o geometrii jako o zkoumání invariantů grup transformací a dělí ji na jednotlivé obory podle toho, o jaké grupy transformací jde. Invariantem grupy transformací se rozumí to, co se při žádné transformaci z této grupy nemění. Projektivní geometrie zkoumá invarianty projektivních transformací, to jest takové vlastnosti geometrických objektů, které se nemění při promítáních a tudíž ani při zobrazeních vzniklých skládáním promítání. (Jde obecně o středové promítání; rovnoběžné promítání je jeho zvláštním případem, kdy střed promítání je nevlastní bod. A jsme-li v rovině, bereme v úvahu promítání přímky na přímku.)

A co se tedy nemění při promítání? Je toho zdánlivě velice málo. Rozhodně není neměnná délka úsečky, ale dokonce ani sama vlastnost být úsečkou. Vidíme, že středovým průmětem úsečky AB klidně mohou být dvě polopřímky, a to polopřímka opačná k $A'B'$ a polopřímka opačná k $B'A'$, kde A', B' jsou průměty bodů A, B. Nebudeme tedy v projektivní geometrii mluvit o úsečkách, natož o jejich délkách. A co nám pak z této geometrie zbude? To uvidíme!

Prof. RNDr. Bohdan Zelinka, DrSc., (1940), absolvent MFF UK (matematika). Působí na TU v Liberci; je autorem více než 200 vědeckých prací, desetinásobným celostátním přeborníkem v řešení hádanek a devítinásobným držitelem hádankářské Grand prix.

Základní pojmy teorie budou bod, přímka a vztah incidence. Leží-li bod A na přímce p, můžeme to vyjádřit slovy „bod A je incidentní s přímkou p“ nebo „přímka p je incidentní s bodem A“ nebo konečně „bod A a přímka p jsou spolu incidentní“. Právě ta symetrie nám stojí za to, abychom zavedli cizí slovo. A víme, že při každém promítání se bod zobrazí jako bod, přímka jako přímka a vztah incidence zůstane zachován. Abychom to však mohli takto kategoricky tvrdit, musíme za body pokládat i nevlastní body a za přímku i nevlastní přímku. Víme totiž, že středovým průmětem vlastního bodu může být bod nevlastní a obráceně. Rovinu obohacenou o nevlastní body a o nevlastní přímku budeme nazývat projektivní rovina.

Jak už bylo uvedeno, axiomů je pět. Nebudeme je číslovat od jedné do pěti, ale budeme je označovat I, I', II, II', III. Proč tomu tak je, uvidíme za chvíli. Uveďme nejprve první dva axiomy.

Axiom I. Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka s oběma incidentní.

Axiom I'. Ke každým dvěma různým přímkám existuje právě jeden bod s oběma incidentní.

První z těchto axiomů je zcela jasný a druhý je jasný, jakmile si uvědomíme, že body mohou být i nevlastní. Ještě samozřejmější je další dvojice axiomů.

Axiom II. Existují alespoň čtyři body takové, že k žádným třem z nich neexistuje přímka se všemi incidentní.

Axiom II'. Existují alespoň čtyři přímky takové, že k žádným třem z nich neexistuje bod se všemi incidentní.

A už je vidět, proč volíme to označení pomocí čárek. V obou případech čárkovaný axiom vznikne z nečárkovaného tím, že všude navzájem zaměníme slova „bod“ a „přímka“. Říkáme, že takové dva axiomy jsou navzájem duální.

Další axiom je poměrně složitější a nazývá se Desarguesův. Zatímco u předešlých axiomů jsme důsledně používali slova „incidentní“, nyní si dovolíme vyjadřovat se trochu jednodušeji.

Axiom III (Desarguesův). Nechť A, B, C a A', B', C' jsou dvě trojice bodů neležících v přímce. Spojnice AA', BB', CC' procházejí jedním bodem P právě tehdy, jestliže průsečíky $AB \times A'B'$, $AC \times A'C'$, $BC \times B'C'$ leží na jedné přímce p.

K tomuto axiomu už není další čárkovaný, protože je duální sám k sobě. V rovinné geometrii je to skutečně axiom; nelze jej planimetrickými prostředky dokázat. Pokud však rovinu bereme jako část třírozměrného prostoru, pak jej stereometrickými prostředky dokázat lze; je to potom Desarguesova věta. Nebudeme uvádět tento důkaz; poznamenejme jen, že je založen na faktu, že v popsaném případě existuje trojboký jehlan, pro nějž trojúhelník ABC je podstavou a trojúhelník $A'B'C'$ je pravoúhlým průmětem rovinného řezu jehlanu do roviny jeho podstavy. Pak bod P je pravoúhlý průmět hlavního vrcholu jehlanu a přímka p je průsečnice roviny podstavy s rovinou řezu.

Viděli jsme, že ke každému axiomu existuje axiom duální. Protože každá věta teorie se dokazuje z axiomů, existuje také ke každé větě věta duální. To je takzvaný princip duality. (Podobný princip je v teorii svazů.) Když se zavádějí definice nových pojmů, dochází se rovněž k dvojicím navzájem duálních pojmů. Navzájem duální jsou například pojmy „průsečík dvou přímek“ a „spojnice dvou bodů“.

Bylo řečeno, že projektivní geometrie se zabývá invarianty projektivních zobrazení. Proto se v ní zavádějí především pojmy perspektivního a projektivního zobrazení.

Máme-li dvě různé přímky p, q a bod O neležící na žádné z nich, můžeme promítnout bodovou řadu na přímce p na bodovou řadu na přímce q středovým promítáním o středu O. (Bodová řada na přímce je množina všech bodů incidentních s přímkou. Samotnou přímku nebereme jako množinu bodů, ale jako základní pojem duální k pojmu bodu.) Máme tu zobrazení, které se nazývá perspektivní. Podobně máme-li dva různé body P, Q, můžeme definovat perspektivní zobrazení svazku přímek o středu P na svazek přímek o středu Q. Nechť o je přímka neprocházející žádným z bodů P, Q. Je-li a přímka ze svazku o středu P, pak jejím obrazem bude přímka a' spojující bod Q s průsečíkem přímek a, o. Jak vidíme, je to duální definice k té předešlé.

Zobrazení vzniklé složením několika perspektivních zobrazení (ať už mezi bodovými řadami nebo mezi svazky přímek) se nazývá projektivní zobrazení. Důležitá jsou zejména taková projektivní zobrazení, kde množina vzorů i množina obrazů je tatáž. Mezi nimi pak ještě má zvláštní důležitost zobrazení involutorní, to jest inverzní k sobě samému.

Pomocí projektivních zobrazení lze vybudovat teorii kuželoseček. Máme-li svazky přímek o různých středech P, Q a projektivní zobrazení jednoho na druhý, které není perspektivní, pak průsečíky jednotlivých přímek s jejich obrazy vytvoří kuželosečku. Podobně máme-li bodové řady na různých přímkách p, q a projektivní zobrazení jedné na druhou, které není perspektivní, pak spojnice jednotlivých bodů s jejich obrazy jsou právě všechny tečny některé kuželosečky.

V projektivní geometrii mluvíme vždy pouze obecně o kuželosečce, nikoliv o elipse, parabole či hyperbole. Jednotlivé typy kuželoseček se totiž liší podle svého vztahu k nevlastní přímce. Elipsa nemá s nevlastní přímkou společný žádný bod, parabola má jeden (nevlastní bod osy) a hyperbola dva (nevlastní body asymptot). V projektivní geometrii neodlišujeme nevlastní přímku od vlastních přímek ani nevlastní body od vlastních, takže nemůžeme typy kuželoseček rozlišit. Pokud bychom jednu přímku prohlásili za nevlastní přímku a všechny body s ní incidentní za nevlastní body, potom bychom získali geometrii afinní; v ní už lze typy kuželoseček rozlišit.

Vykládat projektivní geometrii lze v zásadě dvěma způsoby. Stylově čistý je ten, při němž předstíráme, že jsme dříve nic o geometrii neslyšeli, a všechno odvozujeme přímo z axiomů. Druhý způsob pak přece jen staví na našich předchozích znalostech. Má například tu výhodu, že se při něm může používat pojmu dvojpoměru.

Mějme přímku a na ní kartézskou soustavu souřadnic (každý bod A má právě jednu souřadnici x_A). Jsou-li A, B, C tři různé body této přímky, pak dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B, označovaný (ABC), je

$$(ABC) = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B}.$$

Jsou-li nyní A, B, C, D čtyři různé body na zmíněné přímce, pak jejich dvojpoměr, značený $(ABCD)$, je

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

Moment, řeknete. Tady se mluví o délkách úseček, takže co to má společného s projektivní geometrií? Je to zvláštní, ale dvojpoměr je invariant projektivních transformací. Promítáme-li totiž (navzájem různé) body A, B, C, D na přímce p středovým promítáním na přímku q, pak pro jejich průměty A', B', C', D' platí $(A'B'C'D') = (ABCD)$. Dokázal to Pappos z Alexandrie a podle něho se toto tvrzení nazývá Pappova věta. Pomocí dvojpoměru lze zjednodušit důkazy mnohých vět, které by se však bez jeho použití daly dokázat také, ale značně složitěji.

Kdo vnikne do axiomatické projektivní geometrie, ocení ji jako krásnou teorii vytvořenou téměř z ničeho.

Tato teorie má však i jiné modely než projektivní rovinu tvořenou všemi vlastními i nevlastními body roviny a všemi přímkami roviny včetně nevlastní. Můžeme vzít pouze některé body a některé přímky. Mějme v rovině kartézskou soustavu souřadnic. Vlastní bod nazveme racionální, jsou-li obě jeho souřadnice racionální čísla. Vlastní přímku nazveme racionální, jestliže ji lze vyjádřit rovnicí $ax + by + c = 0$, kde a, b, c jsou čísla racionální. Nevlastní bod je racionální, je-li nevlastním bodem racionální přímky. Konečně nevlastní přímka je racionální. Omezíme-li se na racionální body a racionální přímky, dostaneme model projektivní geometrie, který má spočetně mnoho bodů i přímek, a ty jsou skutečně body a přímkami projektivní roviny.

Existují i modely s konečným počtem bodů a přímek, takzvané konečné projektivní geometrie. Jejich „body“ a „přímky“ však nelze interpretovat jako body a přímky v obvyklém smyslu. Nejmenší takovýto model má sedm bodů a sedm přímek. Body jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a přímky jsou tříprvkové množiny $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,6,7\}$, $\{2,4,7\}$, $\{2,5,6\}$, $\{3,4,6\}$, $\{3,5,7\}$. Bod je incidentní s přímkou, je-li jejím prvkem. Můžete si sami ověřit platnost jednotlivých axiomů.

V konečné projektivní geometrii je počet bodů incidentních s libovolnou přímkou i počet přímek incidentních s libovolným bodem stejný. Odečteme-li od něho jedničku, dostaneme číslo, které se nazývá řád této geometrie (proč tu jedničku odčítáme, to by bylo dlouhé vysvětlování). Náš uvedený příklad je konečná projektivní geometrie řádu 2, protože každý bod je incidentní s třemi přímkami a každá přímka je incidentní s třemi body. Je-li r řád, pak počet všech bodů i počet všech přímek je $r^2 + r + 1$.

Někdy se zkoumají i konečné projektivní geometrie nesplňující Desarguesův axiom. Ty, které jej splňují, takzvané desarguesovské, mohou mít pouze řád tvaru p^n, kde p je prvočíslo a n je přirozené číslo. (Souvisí to s Galoisovými tělesy v algebře.)

V algebře lze brát projektivní geometrii (i nekonečnou) jako svaz. Jeho prvky jsou body a přímky a dále přidaný nejmenší a největší prvek. Nejmenší prvek lze interpretovat jako prázdnou množinu, největší prvek jako celou rovinu. Spojení dvou bodů je jejich spojnice, jejich průsek je prázdná množina. Spojení dvou přímek je celá rovina, jejich průsek je jejich průsečík. (Ejhle terminologie!) Je-li bod A incidentní s přímkou p, pak spojení bodu A a přímky p je přímka p, jejich průsek je bod A; v opačném případě jejich spojení je celá rovina a jejich průsek je prázdná množina.

Projektivní geometrie takto prolíná do dalších oblastí matematiky.