Učitel matematiky

Pavel Leischner

Trojúhelníky a posloupnosti (2)

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 2, 71–74

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151398`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1997

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

TROJÚHELNÍKY A POSLOUPNOSTI (2)

PAVEL LEISCHNER

Vraťme se nejprve k úloze 2 z článku Trojúhelníky a posloupnosti (1) otištěném v minulém čísle:

Délky stran a, b, c ($a \leq b \leq c$) trojúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru 5 cm, tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete obvod trojúhelníka, je-li $b = 9$ cm.

Jak již bylo uvedeno, žáci určili $o = a+b+c = (b-d)+b+(b+d) = 3b = 27$ cm. Učitelka Jana je pak směrovala ke konstrukci tohoto trojúhelníka, aby zjistili, že úloha nemá řešení (trojúhelník neexistuje). Uveďme nyní numerické řešení:

Položme

$$a = 9 - d, b = 9, c = 9 + d. \tag{3}$$

Porovnáme-li Heronův vzorec pro obsah trojúhelníka s vyjádřením obsahu pomocí stran a poloměru R opsané kružnice, máme

$$\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \frac{abc}{4R},$$

kde s je polovina obvodu trojúhelníka. Po dosazení vztahů (3), umocnění a jednoduché úpravě dostaneme bikvadratickou rovnici

$$d^4 + 138 \cdot d^2 + 486 = 0,$$

jejíž nezáporné kořeny jsou

$$d_{1,2} = \sqrt{69 \pm 15\sqrt{19}},$$

tj. $d_1 \doteq 11{,}59$, $d_2 = 1{,}90$.

Mgr. Pavel Leischner (1948), absolvent PřF UJEP (nyní MU) Brno (matematika – fyzika), odborný asistent na katedře matematiky JU České Budějovice.

Uvažme, že řešení musí splňovat trojúhelníkovou nerovnost $0 < c < a + b$ a nejdelší strana trojúhelníka nemůže být větší než průměr opsané kružnice. To vede po dosazení z (3) na podmínky

$$(4) \qquad 0 < d < \frac{b}{2} = 4{,}5$$

a

$$(5) \qquad d \leq 2R - b = 1,$$

které námi určené kořeny nesplňují.

Tohle byl Janin způsob výpočtu. Poznamenejme ještě, že ze všech trojúhelníků vepsaných do téže kružnice má největší obsah trojúhelník rovnostranný (viz např. [3]). S využitím tohoto poznatku je výpočet jednodušší:

$$\frac{abc}{4R} \leq 0{,}5R^2 \cdot \sin 120°.$$

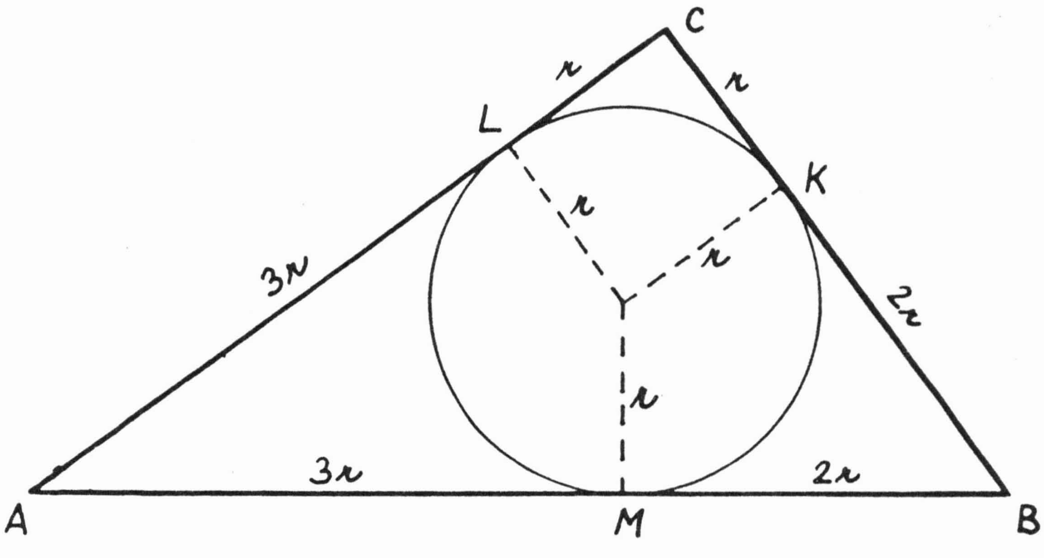
Po dosazení a úpravě máme $1 < 81 - \frac{125}{3\sqrt{3}} \leq d^2$, což nevyhovuje podmínce (5).

Zabývejme se nyní obecněji trojúhelníky, jejichž délky stran a, b, c $(a \leq b \leq c)$, tvoří aritmetickou posloupnost. Ve shodě s předchozími úvahami je $a = b - d$, $c = b + d$ a platí $s = 1{,}5b$. Z trojúhelníkové nerovnosti (stejně jako u vztahu (4)) zjistíme $0 \leq d < \frac{b}{2}$. Označme r poloměr vepsané kružnice a v_b výšku na stranu AC. Dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníka

$$s \cdot r = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b$$

zjistíme $v_b = 3r$. Je-li trojúhelník navíc pravoúhlý, je $a = v_b$ a tedy $b = 3r + d$. Z Pythagorovy věty $(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$ máme navíc $b = 4d$, takže $d = r$, $a = 3r$, $b = 4r$ a $c = 5r$.

Všechny pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran tvoří aritmetickou posloupnost, jsou navzájem podobné a jejich rozměry jsou určeny číselnou volbou poloměru r vepsané kružnice. Vlastnosti takových trojúhelníků přehledně vystihuje obrázek 4. Snadno zjistíme, že poloměr opsané kružnice je $R = \frac{c}{2} = 2{,}5 \cdot r$, obsah trojúhelníka je $S = \frac{1}{2} \cdot ab = 6r^2$ a podobně bychom mohli pomocí r vyjadřovat v trojúhelníku i jiné délky. Jana si při práci s žáky obrázek představovala a tak mohla zpaměti zadávat úlohy a hned věděla i jejich řešení. Zadala-li například $R = 7{,}5$ cm, udělala to volbou $r = 3$ cm a bylo jí hned jasné, že $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm, $S = 54$ cm^2 atd.



Obr. č. 4

Snad stojí za zmínku, že k obrázku 4 jsme se nemuseli pracně „propočítávat“. Náš trojúhelník má totiž $a + c = 2b$ a tím je jednoznačně určen jeho tvar. Stačí uhodnout, že jeden z množiny navzájem podobných trojúhelníků má strany délek 3, 4 a 5 a zjistit $r = 1$.

Všimněme si ještě postavení pravoúhlého trojúhelníka v množině všech trojúhelníků, které mají všechny stejně dlouhou stranu b a jejichž délky stran jsou členy aritmetické posloupnosti s prostředním členem b. Z předchozích úvah plyne, že diference příslušných posloupností patří do intervalu $\langle d_1, d_2)$, kde $d_1 = 0$ a $d_2 = \frac{b}{2}$. Hodnota d_1 odpovídá rovnostrannému trojúhelníku, při hodnotě d_2 se trojúhelník zvrhne na úsečku. Pravoúhlý trojúhelník má diferenci rovnu aritmetickému průměru obou mezních hodnot: $d = \frac{d_1+d_2}{2}$.

Úlohy:

6. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku, jehož délky stran tvoří aritmetickou posloupnost, platí (při označení používaném v článku):

$$6Rr = b^2 - d$$

$$12r^2 = b^2 - 4d^2$$

7. Uvažujme trojúhelník, jehož délky stran a, b, c $(a \leq b \leq c)$ tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem a. Dokažte:

a) Kvocient q této posloupnosti splňuje vztah $q_1 \leq q \leq q_2$, kde $q_1 = 1$ a $q_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (poměr zlatého řezu).

b) Je-li trojúhelník navíc pravoúhlý, pak jeho kvocient je geometrickým průměrem čísel q_1, q_2.

LITERATURA:

[3] P. Leischner, *Trojúhelník vepsaný do kružnice*, Rozhledy matematicko-fyzikální, **70** (1992), 204.