Karel Mačák

Geometrické pojetí pravděpodobnosti (2)

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 4, 204–212

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151378

GEOMETRICKÉ POJETÍ PRAVDĚPODOBNOSTI (2)

Karel Mačák

4. Komentář k úloze o jehle

Na historicko-matematickém semináři v Jevíčku v srpnu 1995 se při výkladu úlohy o jehle objevil dotaz, který sice vybočuje z rozsahu středoškolské látky, ale protože by se mohl objevit i jinde (třeba ve třídě) a odpověď není elementární, považujeme za vhodné krátce zde o něm pojednat.

DOTAZ. Úloha o jehle byla řešena v kartézských souřadnicích φ, x (viz obr. 3b). Přeznačíme-li však proměnnou x na ϱ a zobrazíme-li úlohu v polárních souřadnicích (což je vzhledem k charakteru veličin φ a ϱ zcela přirozené), budou mít příslušné množiny bodů tvar dle obr. 4, kde hranicí vyšrafované oblasti je křivka

$$\varrho = \frac{h}{2} \sin\varphi ,$$

což je v kartézských souřadnicích kružnice

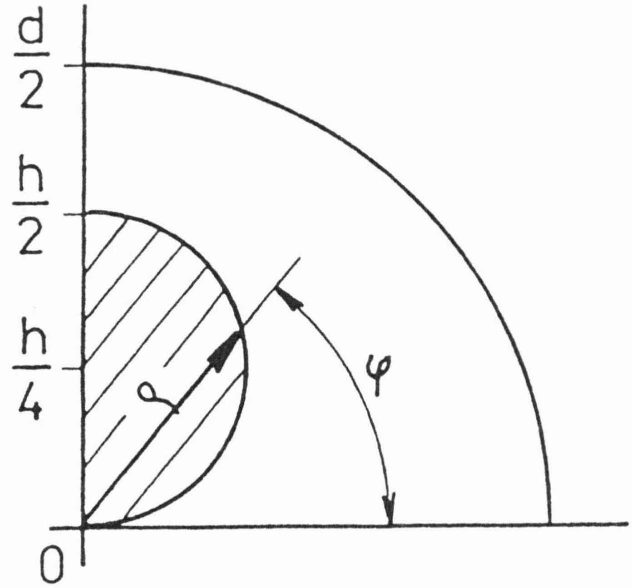
$$x^2 + \left(y - \frac{h}{4}\right)^2 = \frac{h^2}{16}$$

a příslušná geometrická pravděpodobnost tedy je

$$P = \frac{\frac{1}{2}\pi\frac{h^2}{16}}{\frac{1}{4}\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{h^2}{2d^2}.$$

Jak je možné, že to vyjde v různých souřadnicích různě, a jak je to vlastně správně?

ODPOVĚĎ na tuto otázku není jednoduchá, protože se jedná o přesnou matematickou otázku v oblasti, ve které jsme výchozí pojmy vymezili pouze intuitivně. Přesný obecný rozbor otázky vhodného souřadného systému k výpočtům geometrických pravděpodobností (nikoli ale náš dotaz) lze nalézt v [3], zde se pokusíme o zjednodušenou odpověď na náš dotaz.



Obr. 4

Říkáme-li (v intuitivním smyslu), že proměnná x může nabývat všech hodnot z nějakého intervalu $\langle a, b\rangle$ se stejnou pravděpodobností, pak vlastně předpokládáme, že pravděpodobnost hodnoty proměnné x z nějakého podintervalu $\langle a_1, b_1\rangle \subset \langle a, b\rangle$ je rovna

$$\frac{b_1 - a_1}{b - a}$$

a nezáleží na umístění tohoto podintervalu uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$.

Uvažujeme-li dvě proměnné $x \in \langle a, b\rangle$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$ se shora uvedenými vlastnostmi a jsou-li tyto proměnné nezávislé[1], pak musí platit, že pravděpodobnost současného výskytu $x \in \langle a_1, b_1\rangle \subset \langle a, b\rangle$ a $\varphi \in \langle \alpha_1, \beta_1\rangle \subset \langle \alpha, \beta\rangle$ je rovna

$$\frac{b_1 - a_1}{b - a}\,\frac{\beta_1 - \alpha 1}{\beta - \alpha}$$

a nezáleží na umístění dvojrozměrného intervalu $\langle a_1, b_1\rangle \times \langle \alpha_1, \beta_1\rangle$ uvnitř dvojrozměrného intervalu $\langle a, b\rangle \times \langle \alpha, \beta\rangle$. To platí v souřadnicích kartézských, ale ne v polárních, takže náš původní výsledek byl správný.

[1]Definici nezávislosti lze nalézt např. v [1], str. 105; intuitivně je zřejmé, že proměnné x a φ v úloze o jehle jsou nezávislé.

5. Bertrandův paradox

V r. 1896 vyslovil francouzský matematik Josef Louis François Bertrand (1822 - 1900) v knize [5] názor, že nekonečné množiny jevů nemohou být v teorii pravděpodobnosti studovány, protože to vede k logickým rozporům[2]. Toto tvrzení ilustroval příkladem, ke kterému uvedl tři různé postupy řešení; všechny tři postupy byly očividně správné, ale každý výsledek byl jiný. Tuto úlohu, která je v literatuře nazývána Bertrandův paradox, si nyní předvedeme.

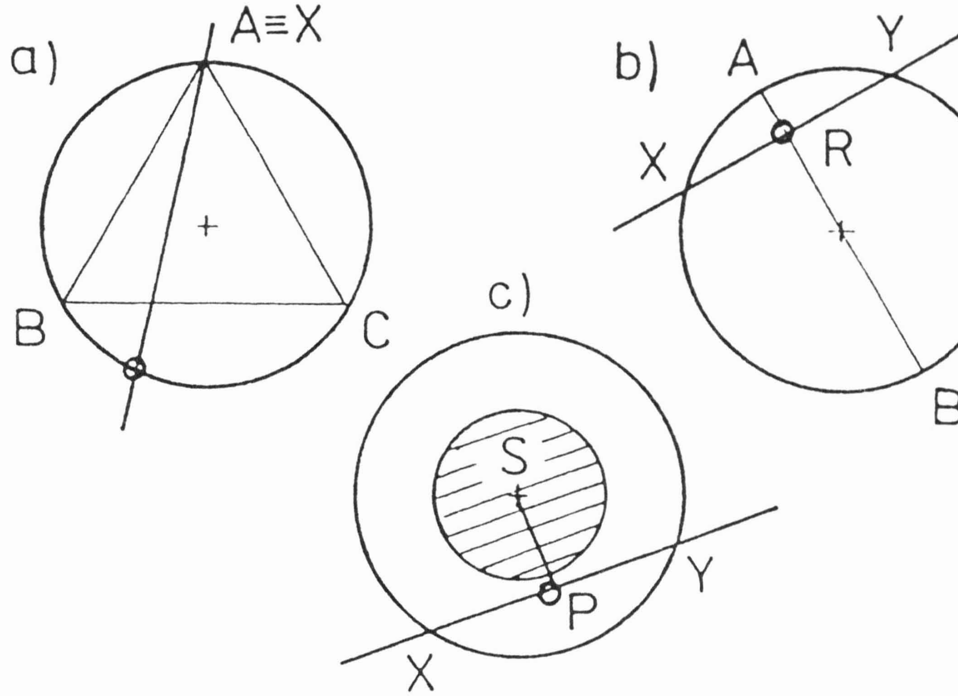
PŘÍKLAD. V kružnici o jednotkovém poloměru je náhodně vedena sečna. Najděte pravděpodobnost toho, že délka této sečny (tj. délka úsečky $\overline{XY}$ ležící na této sečně uvnitř dané kružnice) je větší než $\sqrt{3}$.

Komentář. V každém z následujících řešení je úloha převedena na náhodnou volbu jediného bodu z nějaké množiny, přičemž všechny možné volby tohoto bodu jsou v dané množině v intuitivním smyslu „stejně pravděpodobné". Náhodně volený bod je v obrázku zvýrazněn.

ŘEŠENÍ I (viz obr. 5a). Lze předpokládat, že body X, Y jsou na kružnici rozloženy rovnoměrně a vzájemně nezávisle. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že jeden z těchto bodů (třeba X) je vrcholem rovnostranného trojúhelníka vepsaného do dané kružnice; náhodné sestrojení sečny pak odpovídá náhodné volbě bodu Y. Jak známo, strana onoho vepsaného rovnostranného trojúhelníka má délku $\sqrt{3}$; má-li být délka sečny větší než $\sqrt{3}$, musí bod Y padnout na oblouk BC, takže hledaná pravděpodobnost je rovna $1/3$.

ŘEŠENÍ II (viz obr. 5b). Délka sečny je určena její vzdáleností od středu kružnice a nezávisí na směru sečny. Bez újmy na obecnosti lze proto předpokládat, že sečna má pevně daný směr, který je kolmý na průměr AB; náhodné sestrojení sečny pak

[2] *Une remarque encore est nécessaire: l'infini n'est pas un nombre; on ne doit pas, sans explication, l'introduire dans les raisonnements. La précision illusoire des mots pourrait faire naîtredes contradictions. Choisir au hasard, entre un nombre infini de cas possibiles, n'est pas une indication suffisante.* (Citace z [5], str. 4.)

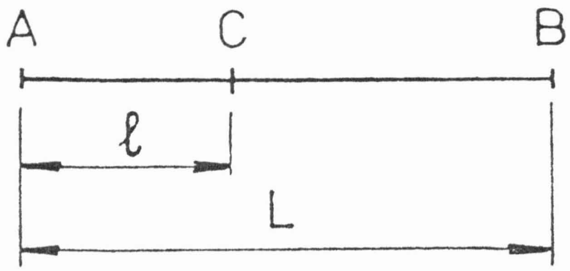


Obr. 5

odpovídá náhodnému zvolení průsečíku R sečny s průměrem AB. Má-li být délka sečny větší než $\sqrt{3}$, musí být vzdálenost bodu R od středu kružnice menší než $1/2$, takže hledaná pravděpodobnost je rovna $1/2$.

Řešení 3 (viz obr. 5c). Poloha sečny je určena patou P kolmice spuštěné ze středu kružnice na sečnu; náhodné sestrojení sečny pak odpovídá náhodnému zvolení bodu P. Má-li být délka sečny větší než $\sqrt{3}$, pak musí bod P ležet ve vyšrafovaném kruhu o poloměru $1/2$, z čehož podle geometrické definice pravděpodobnosti plyne, že hledaná pravděpodobnost je rovna $1/4$.

V celém tomto příkladu ve skutečnosti není nic paradoxního; jádro problému je v tom, že formulaci „náhodně vedená sečna“ lze pochopit různě a trojímu různému neekvivalentnímu chápání této formulace odpovídají i uvedené tři různé výsledky. Podrobný rozbor tohoto příkladu lze nalézt v různých učebnicích teorie



Obr. 6

pravděpodobnosti (např. v [3]).

6. Několik slov a několik úloh na závěr

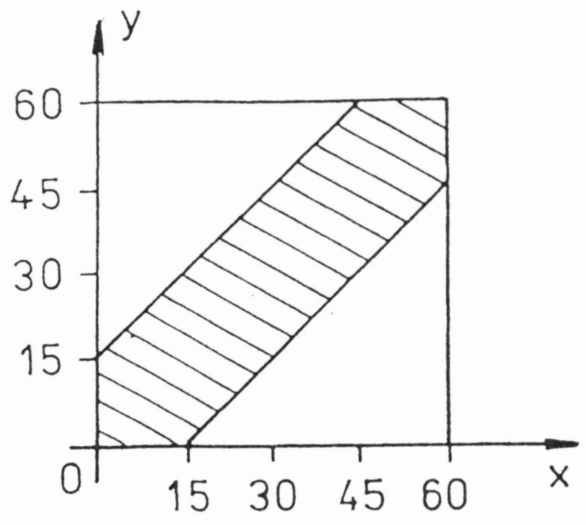
Geometrický přístup k pravděpodobnostním úlohám je dodnes používán, protože v celé řadě případů je efektivní (různé příklady jeho využití jsou uvedeny v [3]). Pro středoškoláky je to asi jediný možný přístup umožňující aspoň v některých případech matematicky zvládnout pravděpodobnostní úlohy s nekonečnou množinou možných situací; proto považujeme tuto problematiku za vhodné doplnění gymnaziální učebnice [1].

Asi nejrozsáhlejší dostupný soubor úloh k procvičení této problematiky lze nalézt v již jednou citované sbírce [4]. Jsou zde uvedeny 4 úlohy s podrobným postupem řešení a 24 úloh neřešených, ale s výsledky (u některých výsledků je postup řešení stručně naznačen); čtyřmi z nich uzavřeme tento článek.

ÚLOHA (úloha 3.1). V bodě C, jehož poloha na telefonním vedení AB délky L je všude stejně možná, nastalo přerušení linky. Určete pravděpodobnost toho, že vzdálenost bodu C od bodu A je aspoň l.

ŘEŠENÍ (viz obr. 6). Jedná se o elementární úvodní úlohu; z geometrického pojetí pravděpodobnosti je zřejmé, že hledaná pravděpodobnost je rovna

$$P = \frac{L - l}{L}.$$



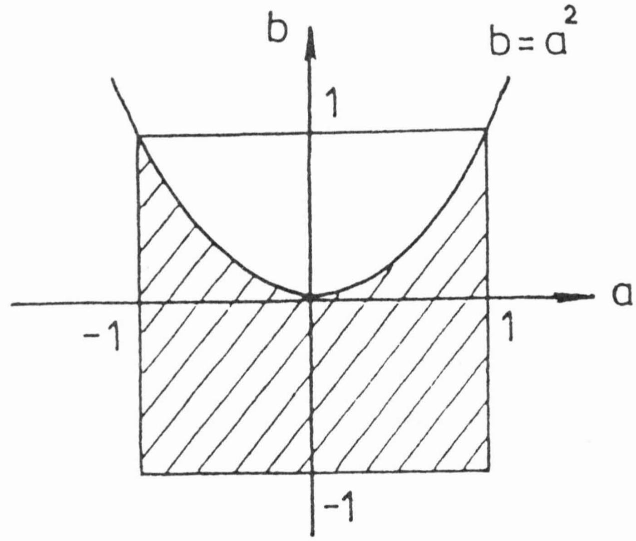
Obr. 7

ÚLOHA (úloha 3.17 s trochu pozměněnou formulací). Dva studenti se dohodli, že každý přijde na určité místo v době od 12 do 13 hodin, počká čtvrt hodiny na druhého a nedočká-li se, odejde. Jaká je pravděpodobnost, že se za těchto podmínek setkají, jestliže předpokládáme stejnou možnost příchodu v kterémkoliv okamžiku stanovené hodiny?

ŘEŠENÍ (viz obr. 7). Z formálních důvodů doplňme ještě předpoklad, že okamžiky příchodů obou studentů jsou navzájem nezávislé. Označíme-li $x =$ čas příchodu prvního studenta, $y =$ čas příchodu druhého studenta, pak každý bod uvnitř zakresleného čtverce odpovídá jedné možné situaci (tj. jedné možné dvojici časů příchodů) a vyšrafovaná oblast zahrnuje situace, kdy se studenti potkají, protože $|x-y| \leq 15$ (čas v minutách). Snadno se zjistí, že poměr obsahu vyšrafované části k obsahu celého čtverce (tj. hledaná pravděpodobnost) je 7/16.

ÚLOHA (část úlohy 3.23 s trochu zjednodušeným zadáním). Určete pravděpodobnost toho, že kořeny kvadratické rovnice $x^2 + 2ax + b = 0$ jsou reálné, jsou-li stejně možné hodnoty koeficientů v obdélníku $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$.

ŘEŠENÍ (viz obr. 8). Při řešení úlohy je třeba použít určitého



Obr. 8

integrálu k výpočtu obsahu plochy; tato problematika je v současné době součástí středoškolské matematiky a nemělo by to tedy být na závadu.

Má-li mít daná rovnice reálné kořeny, musí být diskriminant nezáporný, tj. musí platit $4a^2-4b \geq 0$. Všem příznivým případům pak odpovídá vyšrafovaná část obrázku, jejíž obsah je roven

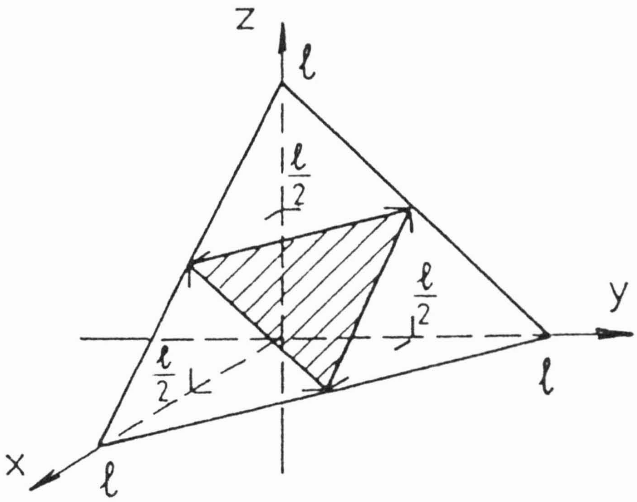
$$2(1+\int_0^1 a^2 da) = \frac{8}{3},$$

takže hledaná pravděpodobnost je rovna $2/3$.

<u>ÚLOHA</u> (úloha 3.11) Na úsečce o délce l se náhodně umístí dva body, takže se úsečka rozdělí na tři části. Určete pravděpodobnost toho, že ze vzniklých tří úseček lze sestavit trojúhelník.

<u>ŘEŠENÍ</u> (viz obr. 9). Označme x, y, z délky vzniklých úseček. Pak platí $x + y + z = l$, což je rovnice roviny; aby bylo možno z úseček x, y, z sestrojit trojúhelník, musí platit současně $(x + y > z) \wedge (x + z > y) \wedge (y + z > x)$. Všem příznivým případům pak odpovídá vyšrafovaná část obrázku, takže hledaná pravděpodobnost je zřejmě rovna $1/4$.

* * *



Obr. 9

Z historického hlediska připomeňme na závěr alespoň dva matematiky z českých zemí, kteří se geometrickými pravděpodobnostmi zabývali; je zajímavé, že oba působili v Brně (i když jeden z nich jen krátký čas).

Prvním z nich byl pražský rodák EMANUEL CZUBER (1851 - 1925), který byl v letech 1886 - 1891 profesorem německé techniky v Brně (pak přešel na vídeňskou techniku); jeho kniha *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* vyšla v r. 1884 v Lipsku (byla tedy napsána ještě v době, kdy E. Czuber byl soukromým docentem na německé technice v Praze) a v r. 1902 ve francouzském překladu v Paříži[3].

Druhým byl profesor Masarykovy univerzity v Brně BOHUSLAV HOSTINSKÝ (1884 - 1951); pro seznámení s jeho pravděpodobnost-

[3]Poznamenejme pro zajímavost, že s dcerou prof. Czubera Bertou (narozená r. 1879 v Praze) se r. 1909 v Churu (Švýcarsko) tajně oženil arcivévoda Ferdinand Karl (1868 - 1915), mladší bratr následníka trůnu Franze Ferdinanda (1863 - 1914). Pro tento hierarchicky nerovný sňatek byl zbaven šlechtictví a žil pak jako soukromník Ferdinand Burg v jižních Tyrolích a v Mnichově, kde také zemřel. Berta ho daleko přežila; dle [6] zemřela r. 1979 na zámku Rottenstein u Merana a je pohřbena po boku Ferdinanda Karla v kryptě pod hlavním oltářem kostela Panny Marie - Utěšitelky v Meranu - Untermais.

ními pracemi je asi nejvhodnější knížka [7], kde lze nalézt jednak celou kapitolu o geometrických pravděpodobnostech, jednak odkazy na další práce.

LITERATURA

[1] Calda, E., Dupač, V., *Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*, (2. vyd.), Prometheus, Praha, 1994.

[2] Todhunter, I., *A History of the Mathematical Theory of Probability*, Chelsea Publ. Comp, New York, 1965.

[3] Kendall, M. G., Moran, P. A. P., *Geometričeskije verojatnosti*, Nauka, Moskva, 1972, (Anglický originál vyšel r. 1963).

[4] Svešnikov, A. A. a kol., *Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí*, SNTL, Praha, 1971, (Ruský originál vyšel r. 1970).

[5] Bertrand, J., *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1889.

[6] Reifenscheid, R., *Die Habsburger in Lebensbildern*, 4. Auflage, Verlag Styria, Graz - Wien - Köln, 1990.

[7] Hostinský, B., *Počet pravděpodobnosti*, JČMF, Praha, 1950.

★ ★ ★

R

B. Riemann

Dej si pozor na Riemannův integrál,
řekla jedna funkce funkci druhé.
Nedaleko za lesem je interval,
kde tě, holka, i když nechceš, zintegruje!

E. Calda