Učitel matematiky

Emil Calda

Permutace s omezujícími podmínkami a věžové polynomy

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 2, 75–88

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151349

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1998

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

PERMUTACE S OMEZUJÍCÍMI PODMÍNKAMI A VĚŽOVÉ POLYNOMY

EMIL CALDA

Jděme přímo k věci a začněme snadnou úlohou, která nám poslouží k objasnění jednoduché a hezké teorie týkající se tzv. věžových polynomů (v angl. literatuře: *rook polynomials*).

Určete počet všech permutací z pěti prvků a, b, c, d, e, jejichž prvním členem není prvek a ani b, druhým členem není prvek b, třetím není e, čtvrtým není d ani e a pátým není prvek c ani e.

Úlohu můžeme řešit tak, že ze všech 5! permutací vybereme ty, které splňují dané podmínky. Po mírném úsilí zjistíme, že jde o následujících 19 permutací:

$$\begin{array}{cccc}
c,e,d,a,b & c,e,d,b,a & c,e,a,b,d & c,e,b,a,d \\
d,e,c,a,b & d,e,c,b,a & d,e,a,c,b & d,e,b,c,a \\
e,c,d,a,b & e,c,d,b,a & e,c,a,b,d & e,c,b,a,d \\
e,d,c,a,b & e,d,c,b,a & e,d,a,c,b & e,d,b,c,a
\end{array}$$

$$e,a,b,c,d \qquad e,a,c,b,d \qquad e,a,d,c,b$$

Je jasné, že při větším počtu prvků a komplikovaných omezujících podmínkách nemusí být úsilí vynaložené na určení výčtu požadovaných permutací jenom mírné, takže od tohoto způsobu řešení raději upustíme. V tomto článku se pokusíme vysvětlit, že počet hledaných permutací dané úlohy dostaneme tak, že pomocí koeficientů polynomu

$$(1+3x+x^2)(1+5x+5x^2+x^3) = 1+8x+21x^2+21x^3+8x^4+x^5$$

utvoříme součet

$$1.5! - 8.4! + 21.3! - 21.2! + 8.1! - 1.0!\,.$$

Čtenář se jistě přesvědčí, že tento součet vskutku určuje hledaný počet permutací, neboť je roven číslu 19. Následující výklad by měl odpovědět na otázky, které po přečtení předchozích řádků napadnou každého: Jak to, že tuto úlohu lze vůbec pomocí nějakých polynomů řešit? Jak víme, které polynomy je nutno vynásobit, abychom dostali mnohočlen, z jehož koeficientů počet permutací daných vlastností určíme?

Připomeňme si nejprve *princip inkluze a exkluze.* V jeho následující formulaci znamená $|M|$ počet prvků konečné množiny M a A_i' doplněk množiny A_i v množině A.

Pro konečnou množinu A a její podmnožiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí

$$|A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_n'| = |A| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k P_k \ ,$$

kde

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \ ,$$

$$P_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| \ ,$$

$$P_3 = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ , \ \ldots \ ,$$

$$P_n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n=1 \\ i_1<\cdots<i_n}}^{n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}| = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \ .$$

Pro aplikaci tohoto principu na řešenou úlohu zavedeme podle daných podmínek podmnožiny $A_1, A_2, \ldots, A_5$ množiny A všech permutací prvků a, b, c, d, e tak, že všechny permutace, které mají na 1. místě prvek a nebo b, utvoří množinu A_1, které mají na 2. místě prvek b, utvoří množinu A_2, které mají na 3. místě prvek e, utvoří množinu A_3 a konečně permutace, které mají na 4. místě prvek d nebo e, budou tvořit množinu A_4, a ty, které mají na 5. místě prvek c nebo e, vytvoří množinu A_5.

Počet permutací požadované vlastnosti je tak roven počtu prvků množiny $A'_1 \cap A'_2 \cap \cdots \cap A'_5$, tj. součtu $|A| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k P_k$.

Vypočteme-li

$$|A| = 5!\,,$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{5} |A_i| = 8.4!\,,$$

$$P_2 = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{5} |A_i \cap A_j| = 21.3!\,,$$

$$P_3 = \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{5} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 21.2!\,,$$

$$P_4 = \sum_{\substack{i,j,k,m=1\\ i<j<k<m}}^{5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m| = 8.1!\,,$$

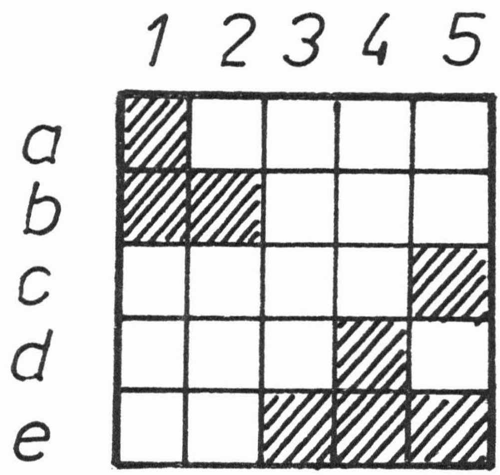
$$P_5 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1\,,$$

dostaneme

$$|A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap A'_4 \cap A'_5| = 5! - 8.4! + 21.3! - 21.2! + 8.1! - 1 = 19.$$

V souladu s předchozím výsledkem jsme tak zjistili, že všech permutací daných vlastností je devatenáct, zároveň však vidíme, že i tento postup je poněkud zdlouhavý. Pokusíme se proto sčítance P_i, které v principu inkluze a exkluze vystupují, určit nikoli jako součet počtu prvků množin A_i, ale jinak.

Přiřaďme naší úloze čtvercovou síť na obr. 1, ve které jsou vyšrafována políčka $a1, b1, b2, c5, d4, e3, e4, e5$. Tato políčka představují zakázaná místa jednotlivých prvků: prvek a nesmí být na 1. místě, prvek b na 1. a 2. místě, prvek c na 5. místě, prvek d na 4. místě a prvek e na 3., 4. a 5. místě. Množiny $A, A_1, A_2, \ldots, A_5$, které jsme definovali výše, můžeme nyní interpretovat takto: A je množina všech výběrů pěti políček, z nichž žádné dvě neleží v témže řádku ani sloupci, A_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, je podmnožina množiny A tvořená všemi výběry pěti políček, ve kterých je políčko i-tého sloupce vyšrafované (zbývající mohou být vyšrafovaná, ale nemusí).



Obr. 1

Uvědomme si nyní, co vlastně z tohoto hlediska určují výrazy P_k. Součet $\sum_{i=1}^{5} |A_i| = P_1$ udává počet výběrů pěti políček z různých řádků i sloupců, ve kterých je aspoň jedno políčko vyšrafované. A protože vyšrafovaných políček je celkem 8 a ke každému existuje 4! způsobů, jak ze zbývajících čtyř řádků a čtyř sloupců vybrat čtyři políčka, z nichž žádné dvě neleží v témže řádku ani sloupci, platí $P_1 = 8.4!$.

Podobně udává součet

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{5} |A_i \cap A_j| = P_2$$

počet výběrů pěti políček z různých řádků i sloupců, ve kterých jsou aspoň dvě políčka vyšrafovaná. A protože dvojic vyšrafovaných políček, pro které jsou v každé dvojici políčka z různých řad i sloupců, je 21, platí $P_2 = 21.3!$. Počet těchto dvojic vyšrafovaných políček přitom určíme podle obr. 1 poměrně snadno – jsou to dvojice

$$\begin{gathered}(a1, b2)\ ,\ (a1, e3)\ ,\ (a1, e4)\ ,\ (a1, e5)\ ,\ (a1, d4)\ ,\ (a1, c5)\ ,\\ (b1, e3)\ ,\ (b1, e4)\ ,\ (b1, e5)\ ,\ (b1, d4)\ ,\ (b1, c5)\ ,\ (b2, e3)\ ,\\ (b2, e4)\ ,\ (b2, e5)\ ,\ (b2, d4)\ ,\ (b2, c5)\ ,\ (e3, d4)\ ,\ (e3, c5)\ ,\\ (e4, c5)\ ,\ (e5, d4)\ ,\ (d4, c5)\ .\end{gathered}$$

Tímto způsobem zjistíme, že pro čísla P_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, platí

$$P_k = p_k(5-k)!\ ,$$

kde p_k je počet způsobů, jak vybrat k vyšrafovaných políček z různých řad i sloupců. Definujeme-li ještě $p_0 = 1$, je hledaný počet permutací:

$$|A_1' \cap \cdots \cap A_5'| = |A| + \sum_{k=1}^{5}(-1)^k P_k = |A| + \sum_{k=1}^{5}(-1)^k p_k(5-k)! =$$

$$= \sum_{k=0}^{5}(-1)^k p_k(5-k)!$$

Tyto výsledky budeme nyní formulovat jednodušším způsobem tak, že si ze šachové terminologie vypůjčíme pojem vzájemně se neohrožujících věží.

Čtenáři je jistě známo, která políčka prázdné šachovnice ohrožuje věž; jsou to právě ta políčka, která leží v téže řadě a v témže sloupci, ve kterých je políčko, na němž věž stojí. Je zřejmé, že počet výběrů k vyšrafovaných políček, z nichž žádné dvě neleží v témže řádku ani sloupci, je roven počtu způsobů, jak na vyšrafovaná políčka rozmístit k vzájemně se neohrožujících věží. Tento fakt nám umožní, abychom místo komplikovaného obratu „výběr k vyšrafovaných políček, z nichž žádné dvě neleží v témže řádku ani sloupci" mluvili o „k vzájemně se neohrožujících věžích."

Vraťme se ke čtvercové síti na obr. 1 a označme S její část tvořenou všemi vyšrafovanými políčky, část sítě S tvořenou políčky $a1, b1, b2$ označíme S_1, část tvořenou políčky $e3, e4, e5, d4, c5$ označíme S_2. Všimněme si, že sítě S_1, S_2 jsou tvořeny různými řádky i sloupci: S_1 je tvořena řádky a, b a sloupci 1,2, zatímco S_2 je tvořena řádky c, d, e a sloupci $3, 4, 5$. O takových sítích budeme říkat, že jsou disjunktní.

Označme dále $v_k(S)$, kde $k \geq 1$, počet způsobů, jak na S umístit k vzájemně se neohrožujících věží, a podobně $v_k(S_1)$ a $v_k(S_2)$ počet způsobů, jak umístit k vzájemně se neohrožujících věží na S_1 a S_2. Pro $k = 0$ definujme ještě $v_0(S_1) = v_0(S_2) = v_0(S) = 1$. Podle obr. 1 snadno určíme, že

$$v_1(S_1) = 3 \ , \ v_2(S_1) = 1 \ , \ v_k(S_1) = 0 \text{ pro } k \geq 3 \ ,$$

$$v_1(S_2) = 5 \ , \ v_2(S_2) = 5 \ , \ v_3(S_2) = 1 \ , \ v_k(S_2) = 0 \text{ pro } k \geq 4 \ .$$

Podobně můžeme určit i $v_1(S), v_2(S)$ atd; ukážeme však, jak je lze určit pomocí $v_k(S_1)$ a $v_k(S_2)$. Vzhledem k tomu, že sítě S_1 a S_2 jsou disjunktní, můžeme na S rozmístit k vzájemně se neohrožujících věží tak, že jich rozmístíme:

0 na S_1 a k na S_2 — lze provést $v_0(S_1) \cdot v_k(S_2)$ způsoby,
1 na S_1 a $k-1$ na S_2 — lze provést $v_1(S_1) \cdot v_{k-1}(S_2)$ způsoby,
2 na S_1 a $k-2$ na S_2 — lze provést $v_2(S_1) \cdot v_{k-2}(S_2)$ způsoby,

. . . .

k na S_1 a 0 na S_2 — lze provést $v_k(S_1) \cdot v_0(S_2)$ způsoby.

Podle kombinatorického pravidla součtu pak platí:

$$v_k(S) = v_0(S_1) \cdot v_k(S_2) + v_1(S_1) \cdot v_{k-1}(S_2) + \cdots + v_k(S_1) \cdot v_0(S_2)$$

Pro naši síť S to znamená, že je

$$v_1(S) = v_0(S_1) \cdot v_1(S_2) + v_1(S_1) \cdot v_0(S_2) = 1.5 + 3.1 = 8 \ ,$$

$$\begin{aligned} v_2(S) &= v_0(S_1) \cdot v_2(S_2) + v_1(S_1) \cdot v_1(S_2) + v_2(S_1) \cdot v_0(S_2) = \\ &= 1.5 + 3.5 + 1.1 = 21 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3(S) &= v_0(S_1) \cdot v_3(S_2) + v_1(S_1) \cdot v_2(S_2) + v_2(S_1) \cdot v_1(S_2) + \\ &+ v_3(S_1) \cdot v_0(S_2) = 1.1 + 3.5 + 1.5 + 0.1 = 21 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_4(S) &= v_0(S_1) \cdot v_4(S_2) + v_1(S_1).v_3(S_2) + v_2(S_1) \cdot v_2(S_2) + \\ &+ v_3(S_1) \cdot v_1(S_2) + v_4(S_1) \cdot v_0(S_2) = \\ &= 1.0 + 3.1 + 1.5 + 0.5 + 0.1 = 8 \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_5(S) &= v_0(S_1) \cdot v_5(S_2) + v_1(S_1) \cdot v_4(S_2) + v_2(S_1) \cdot v_3(S_2) + \\ &+ v_3(S_1) \cdot v_2(S_2) + v_4(S_1) \cdot v_1(S_2) + v_5(S_1) \cdot v_0(S_2) = \\ &= 1.0 + 3.0 + 1.1 + 0.5 + 0.1 = 1 \,. \end{aligned}$$

Rovnost, kterou jsme pro $v_k(S)$ získali, nápadně připomíná vztah pro koeficienty polynomu $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_mx^m$, který je součinem polynomů $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r$, $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_sx^s$:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_kb_0 \,,$$

kde $a_i = 0$ pro $i > r$, $b_i = 0$ pro $i > s$. Můžeme si proto představit, že $v_k(S)$ jsou koeficienty polynomu

$$v(x, S) = v_0(S) + v_1(S)x + v_2(S)x^2 + \ldots + v_m(S)x^m \,,$$

který vznikne součinem polynomů

$$v(x, S_1) = v_0(S_1) + v_1(S_1)x + v_2(S_1)x^2 + \cdots + v_r(S_1)x^r \,,$$

$$v(x, S_2) = v_0(S_2) + v_1(S_2)x + v_2(S_2)x^2 + \cdots + v_s(S_2)x^s \,.$$

Polynom

$$v(x, S) = v_0(S) + v_1(S)x + v_2(S)x^2 + v_3(S)x^3 + \ldots$$

se nazývá *věžový polynom příslušný síti* S. Jeho koeficienty $v_k(S)$ pro $k \geq 1$ udávají, kolika způsoby lze na síť S rozmístit k vzájemně se neohrožujících věží, pro $k = 0$ je definitoricky $v_0(S) = 1$ pro každou síť S.

Vrátíme-li se opět k řešené úloze, snadno zjistíme, že věžové polynomy $v(x, S_1)$, $v(x, S_2)$ disjunktních sítí S_1, S_2 na obr. 1 jsou polynomy

$$v(x, S_1) = 1 + 3x + x^2 \,,$$

$$v(x, S_2) = 1 + 5x + 5x^2 + x^3 \,.$$

Věžový polynom příslušný síti S je pak polynom

$$v(x,S)=v(x,S_1)\cdot v(x,S_2)=(1+3x+x^2)(1+5x+5x^2+x^3)=$$

$$=1+8x+21x^2+21x^3+8x^4+x^5.$$

Koeficient při členu x^k tohoto polynomu určuje, kolika způsoby lze na políčka sítě S umístit k vzájemně se neohrožujících věží, tj. kolika způsoby je možno z políček sítě S vybrat k políček, z nichž každé dvě leží v různých řádcích i sloupcích. To však znamená, že koeficient při x^k v polynomu $v(x,S)$, tj. číslo $v_k(S)$, je rovno číslu p_k vystupujícímu ve výrazu $(-1)^k p_k(5-k)!$, který udává hledaný počet permutací. Došli jsme tak k tomu, že platí:

$$|A_1'\cap\cdots\cap A_5'|=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k p_k(5-k)!=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k v_k(S)(5-k)!=$$

$$=v_0(S)5!-v_1(S)4!+v_2(S)3!-v_3(S)2!+v_4(S)1!-v_5(S)0!=$$

$$=1.5!-8.4!+21.3!-21.2!+8.1!-1.0!=19\ .$$

Tento výsledek je možno zobecnit na permutace s omezujícími podmínkami libovolného počtu prvků:

Počet permutací z n prvků s omezujícími podmínkami je dán výrazem

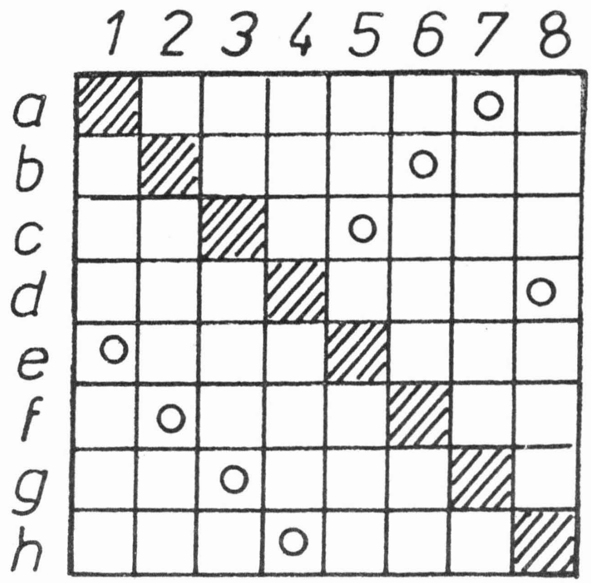
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k(S)(n-k)!\ ,$$

kde $v_k(S)$ jsou koeficienty věžového polynomu $v(x,S)$ příslušného síti S, která odpovídá daným omezujícím podmínkám.

Poznámka. Věžový polynom $v(x,S)$ lze takto vyjádřit pouze v případě, že sítě S_1 a S_2 jsou disjunktní.

Užití této věty si ukážeme v následujících dvou příkladech.

1. *Určete, kolika způsoby je možno na šachovnici* 8×8 *rozmístit osm korunových mincí tak, aby v každém řádku i sloupci byla právě jedna a žádná nebyla na zvolené diagonále.*



Obr. 2

Každé rozmístění osmi mincí představuje permutaci osmi prvků a, b, c, d, e, f, g, h s omezujícími podmínkami znázorněnými vyšrafovanými políčky na obr. 2. (Mince, které jsou zde zakresleny kroužky, znázorňují permutaci e, f, g, h, c, b, a, d). Vezměme nyní síť S tvořenou všemi vyšrafovanými políčky a rozložme ji na disjunktní sítě S_1 a S_2 tak, že S_1 se skládá z políček $a1, b2, c3, d4$ a síť S_2 z políček $e5, f6, g7, h8$. Pro věžové polynomy $v(x, S_1)$, $v(x, S_2)$ sítí S_1 a S_2 dostaneme

$$v(x, S_1) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 = v(x, S_2)\ ,$$

takže věžový polynom sítě S je polynom

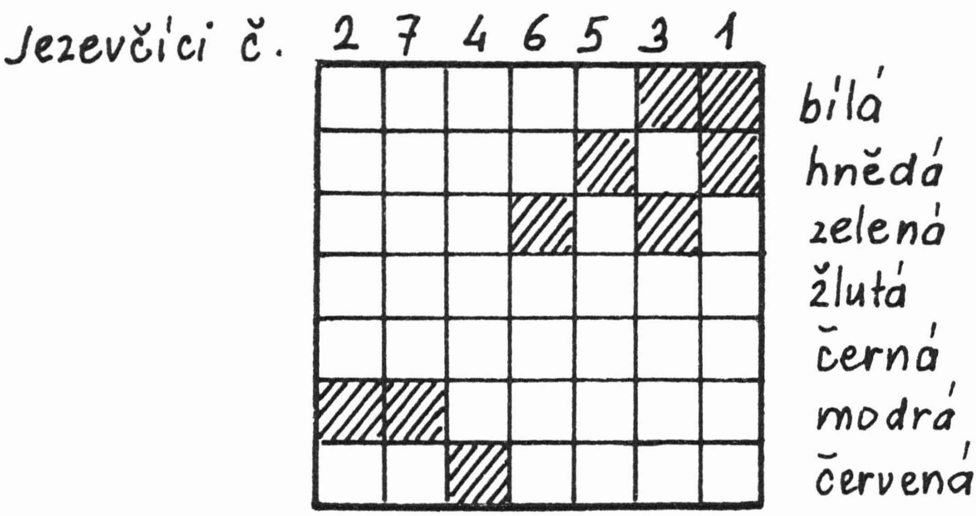
$$v(x, S) = v(x, S_1) \cdot v(x, S_2) = (1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4)^2 =$$

$$= 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 + 8x^7 + x^8\ .$$

Odtud dostáváme, že počet daných permutací, tj. počet rozmístění mincí na šachovnici, je dán číslem

$$1.8! - 8.7! + 28.6! - 56.5! + 70.4! - 56.3! + 28.2! - 8.1! + 1.0! = 14\,833\ .$$

2. *Sedm téměř stejných jezevčíků* $J_1, J_2, \ldots, J_7$ *chceme lépe rozlišit čepičkou. Určete, kolika způsoby to lze provést, máme-li k dispozici po jedné čepičce barvy bílé, hnědé, černé, žluté, zelené, červené a modré, a jestliže jezevčík* J_1 *nechce čepičku bílou ani hnědou,* J_2 *si nepřeje modrou,* J_3 *nemá rád bílou ani zelenou,* J_4 *nemá v oblibě červenou,* J_5 *nesnáší hnědou,* J_6 *nemá rád zelenou a* J_7 *modrou.*



Obr. 3

Ve čtvercové síti na obr. 3 znázorníme omezující podmínky tak, aby se síť S všech vyšrafovaných políček skládala z disjunktních sítí S_1 (vpravo nahoře) a S_2 (vlevo dole). Pro věžové polynomy těchto sítí dostaneme snadno:

$$v(x, S_1) = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3 \ ,$$

$$v(x, S_1) = 1 + 3x + 2x^2 \ ,$$

takže pro věžový polynom sítě S máme

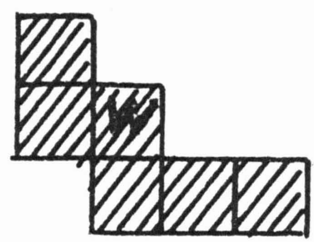
$$v(x, S) = (1 + 6x + 10x^2 + 4x^3)(1 + 3x + 2x^3) =$$

$$= 1 + 9x + 30x^2 + 46x^3 + 32x^4 + 8x^5 \ .$$

Zjistili jsme tak, že počet způsobů, jak mezi jezevčíky rozdělit čepičky, je

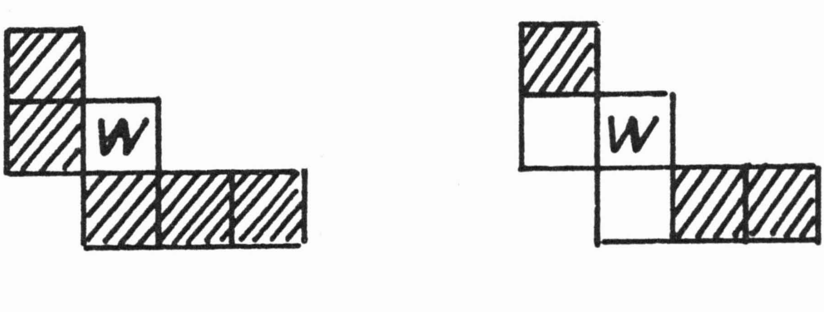
$$7! - 9.6! + 30.5! - 46.4! + 32.3! - 8.2! + 0.1! - 0.0! = 1\,232\ .$$

Na závěr si ještě ukážeme, jakým způsobem se dá postupovat v případě, že síť S nelze rozložit na disjunktní sítě S_1, S_2 .



Obr. 4

Vezměme síť S vyšrafovaných políček podle obr. 4 a určeme $v_k(S)$, tj. počet způsobů, jak na síť S umístit k vzájemně se neohrožujících věží. Všechny tyto způsoby rozložíme do dvou disjunktních tříd: v jedné jsou právě ta rozmístění, ve kterých jedna z věží stojí na vhodně zvoleném políčku (na obr. 4 je toto políčko označené písmenem w), ve druhé jsou právě ta rozmístění, ve kterých na tomto políčku žádná věž nestojí. Označme nyní S_w síť, která vznikne ze sítě S vynecháním políčka w, a S'_w síť, která vznikne ze sítě S vynecháním políčka w a všech políček ležících v témže řádku i sloupci, v nichž políčko w leží. (Obě vzniklé sítě jsou znázorněny na obr. 5a, b).



Obr. 5a, b

Je zřejmé, že počet $v_k(S)$ způsobů rozmístění k vzájemně se neohrožujících věží na síť S je roven součtu $v_k(S_w)$ a $v_{k-1}(S'_w)$:

$$v_k(S) = v_k(S_w) + v_{k-1}(S'_w) .$$

Nestojí-li totiž na políčku w žádná věž, je nutno všech k vzájemně se neohrožujících věží rozmístit na síť S_w, stojí-li věž na políčku w, je nutno zbývajících $k-1$ věží rozmístit na síť S'_w.

Pro věžové polynomy příslušné sítím S, S_w a S'_w proto platí:

$$\begin{aligned} v(x,S) &= v_0(S) + v_1(S)x + v_2(S)x^2 + v_3(S)x^3 + \cdots = \\ &= v_0(S) + [v_1(S_w) + v_0(S'_w)]x + [v_2(S_w) + v_1(S'_w)]x^2 + \\ &\qquad + [v_3(S_w) + v_2(S'_w)]x^3 + \cdots = \\ &= [v_0(S_w) + v_1(S_w)x + v_2(S_w)x^2 + v_3(S_w)x^3 + \ldots] + \\ &\qquad + x[v_0(S'_w) + v_1(S'_w)x + v_2(S'_w)x^2 + \ldots] = \\ &= v(x,S_w) + x \cdot v(x,S'_w) . \end{aligned}$$

Je-li tedy políčko w vybráno tak, že umíme určit věžové polynomy $v(x,S)$, $v(x,S'_w)$, umíme určit věžový polynom $v(x,S)$, neboť platí:

$$v(x,S) = v(x,S_w) + x \cdot v(x,S'_w) .$$

V případě sítě S na obr. 4 bylo políčko w vybráno tak, aby sítě S_w a S'_w byly disjunktní, takže jejich věžové polynomy určíme snadno:

$$v(x,S_w) = (1+2x)(1+3x) = 1 + 5x + 6x^2$$

$$v(x,S'_w) = (1+x)(1+2x) = 1 + 3x + 2x^2$$

Pro věžový polynom sítě S tak dostaneme

$$\begin{aligned} v(x,S) &= v(x,S_w) + x \cdot v(x,S'_w) = \\ &= (1+5x+6x^2) + x \cdot (1+3x+2x^2) = \\ &= 1 + 6x + 9x^2 + 2x^3 . \end{aligned}$$

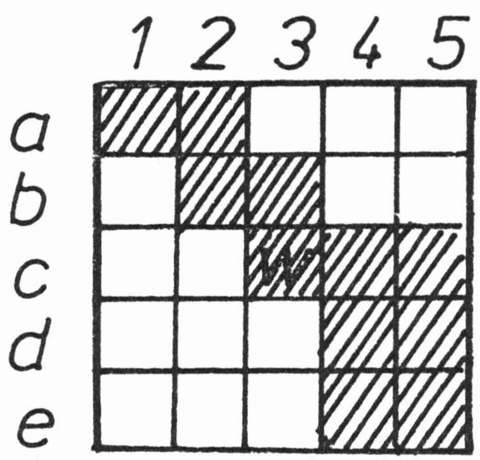
Tento výsledek, který jsme získali pro síť S na obr. 4, platí obecně:

Pro každou síť S a příslušné sítě S_w a S'_w definované pomocí zvoleného políčka w výše uvedeným způsobem platí rovnost

$$v(x, S) = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w) \, .$$

Závěrečný příklad nám poslouží už jenom k ilustraci předcházejících řádků.

Určete počet permutací z pěti prvků a, b, c, d, e s omezujícími podmínkami znázorněnými na obr. 6.



Obr. 6

Vhodně zvoleným políčkem w je zřejmě políčko $c3$; nyní je

$$v(x, S_w) = (1 + 4x + 3x^2)(1 + 6x + 6x^2) \, ,$$

$$v(x, S'_w) = (1 + 3x + x^2)(1 + 4x + 2x^2) \, .$$

Pro věžový polynom sítě S tvořené vyšrafovanými políčky na obr. 6 tak máme

$$v(x, S) = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w) =$$

$$= (1 + 10x + 33x^2 + 42x^3 + 18x^4) + x(1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + 2x^4) =$$

$$= 1 + 11x + 40x^2 + 57x^3 + 28x^4 + 2x^5 \, .$$

Počet permutací dané vlastnosti je tedy

$$1.5! - 11.4! + 40.3! - 57.2! + 28.1! - 2.0! = 8 \ .$$

Protože tento počet není příliš velký, můžeme se pro kontrolu pokusit všechny tyto permutace vypsat:

$$\begin{array}{cccc} c,d,e,a,b & c,d,e,b,a & c,e,d,a,b & c,e,d,b,a \\ d,c,e,a,b & d,c,e,b,a & e,c,d,a,b & e,c,d,b,a \end{array}$$

S potěšením lze konstatovat, že jich je vskutku osm.

V úvodu tohoto článku byla teorie věžových polynomů označena jako jednoduchá a hezká. Doufám, že čtenáři, kteří se s ní právě seznámili, získali tentýž dojem.

★ ★ ★

W

J. Watt

Na parách, jež z vroucí vody vystupují,
ihned poznám, co zas mají v úmyslu.
Pokličku mi zvedaj a tak demonstrují,
jak nastala revoluce v průmyslu!

E. Calda