Učitel matematiky

Jarmila Šotová
Ukázka programu v systému FAMULUS (1)

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 2, 89–96

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151348

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1998

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

UKÁZKA PROGRAMU V SYSTÉMU FAMULUS (1)

JARMILA ŠOTOVÁ

V časopise *Učitel matematiky*, roč. 5, č. 2, byla uvedena informace o systému FAMULUS, který byl vyvinut pro počítačovou podporu výuky matematiky, fyziky a řady nematematických disciplín, např. biologie, ekonomie aj. Dnes je tento systém pro svoji jednoduchost, bohaté vybavení nadstavbami a pro možnost vytváření vlastních programů užíván na řadě středních i vysokých škol.

Článek informuje o jednom z programů vytvořených na katedře matematiky VVŠ PV ve Vyškově pro výuku předmětu *Numerické metody*. Program demonstruje dvojrozměrné posloupnosti postupných aproximací generovaných iteračními formulemi pro řešení systémů lineárních rovnic. Přestože problematika iteračních metod patří k tradiční náplni vysokoškolských kursů numerické matematiky a její zvládnutí předpokládá znalosti lineární algebry a teorie matic, vystačíme při aplikaci iteračních metod na soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými se středoškolskými znalostmi analytické geometrie. Proto zde tuto problematiku a samotný program nabízíme jako náplň pro zájmové semináře z matematiky, pro experimentování s počítačem apod.

Iterační metody se v praxi používají pro řešení systémů lineárních rovnic o velkém počtu neznámých. Neposkytují přesné řešení, ale pouze jeho aproximaci, a to s libovolnou přesností, takže přibližné řešení systému je pak prakticky rovnocenné řešení přesnému. Princip iteračních metod spočívá v konstrukci posloupnosti postupných aproximací, vektorů

$$\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}, \ldots,$$

která je konvergentní, tj.

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{\xi},$$

kde $\boldsymbol{\xi}$ je přesné řešení systému rovnic. Přesné řešení $\boldsymbol{\xi}$ se pak nahrazuje některou z aproximací $\boldsymbol{x}^{(k)}$. Postupné aproximace se počítají tzv. iteračním procesem. Výpočetní schémata jsou zpravidla jednoduchá a velmi dobře se hodí pro zpracování počítačem.

V první části článku ukážeme na systému dvou lineárních rovnic o dvou neznámých konstrukci nejjednoduššího iteračního procesu zvaného *Jacobiova metoda*, a konstrukci dalších dvou iteračních procesů, které se získají jeho mírnou modifikací a které se v literatuře uvádějí jako *Gaussova-Seidelova metoda* a jako *relaxační metoda s parametrem*. V druhé části článku předvedeme grafické znázornění postupných aproximací vykreslené zmíněným programem a ukážeme některé speciální typy těchto posloupností.

I. Iterační metody pro řešení systémů dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

A. Jacobiova metoda

Mějme systém lineárních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{1}$$

splňující podmínku $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$, která znamená, že systém má právě jedno řešení. Abychom mohli provádět bez obtíží všechny výpočty, budeme navíc předpokládat, že $a_{11}\,a_{22} \neq 0$. Systém rovnic nejprve upravíme na tvar

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{b_1}{a_{11}} \\ y &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}} \end{aligned} \tag{2}$$

a zvolíme libovolně tzv. počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})$. Aproximace $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)})$ pro $k = 1, 2, \ldots$ získáme opakovaným dosazováním do tzv. iteračních* formulí tvaru

*latinsky *iterātiō* znamená opakování

$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}} y^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\
y^{(k)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}} x^{(k-1)} + \frac{b_2}{a_{22}},
\end{aligned} \tag{3}
$$

které dostaneme z rovnic (2) připojením iteračních indexů k a $k-1$ tak, jak je uvedeno. Výpočet postupných aproximací předvedeme na následujícím příkladě.

Příklad 1. Řešme Jacobiovou iterační metodou soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
2x - y &= 4 \\
x - 2y &= -1.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Ř e š e n í . Snadno ověříme, že řešením dané soustavy rovnic je vektor $\boldsymbol{\xi} = (3, 2)$. Podle (2) nejprve soustavu rovnic upravíme na tvar

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2} y + 2 \\
y &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

a podle (3) určíme iterační formule

$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= \frac{1}{2} y^{(k-1)} + 2 \\
y^{(k)} &= \frac{1}{2} x^{(k-1)} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Počáteční aproximaci volíme libovolně. Nechť je to např. vektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = (6, 5)$. Nyní je

$$
\left.
\begin{aligned}
x^{(1)} &= \frac{1}{2} y^{(0)} + 2 = \frac{1}{2} 5 + 2 = \frac{9}{2} \\
y^{(1)} &= \frac{1}{2} x^{(0)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} 6 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^{(1)} = (4.5, 3.5) \,,
$$

$$\left.\begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{1}{2}\,y^{(1)} + 2 = \frac{15}{4} \\ y^{(2)} &= \frac{1}{2}\,x^{(1)} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = (3.75, 2.75)\,,$$

další aproximace vypočteme stejným postupem. V tab. 1 je uvedeno prvních 13 aproximací přesného řešení.

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	6.000000	5.000000	7	3.023438	2.023438
1	4.500000	3.500000	8	3.011719	2.011719
2	3.750000	2.750000	9	3.005859	2.005859
3	3.375000	2.375000	10	3.002930	2.002930
4	3.187500	2.187500	11	3.001465	2.001465
5	3.093750	2.093750	12	3.000732	2.000732
6	3.046875	2.046875	13	3.000366	2.000366

TAB. 1

Jako míru přesnosti aproximace $\boldsymbol{x}^{(k)}$ lze vzít délku vektoru $\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}$, jak ji známe z analytické geometrie, a výpočet zastavit poté, co bude splněna podmínka

$$|\,\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\,| = \sqrt{(x^{(k)} - x^{(k-1)})^2 + (y^{(k)} - y^{(k-1)})^2} < 10^{-n}$$

pro některé vhodné n. Pak se říká, že aproximace $\boldsymbol{x}^{(k)}$ je vypočtena s přesností 10^{-n}. Protože v předchozím příkladě je

$$|\,\boldsymbol{x}^{(13)} - \boldsymbol{x}^{(12)}\,| = \sqrt{0.000366^2 + 0.000366^2} \doteq 0.00052 < 0.001\,,$$

je aproximace $\boldsymbol{x}^{(13)}$ vypočtena s přesností 10^{-3}. Později uvidíme, že konvergence posloupnosti iterací je v tomto případě relativně pomalá a že zmíněné modifikace Jacobiova iteračního procesu mohou konvergenci urychlit.

Iterační metody mají zpravidla omezenou možnost použití. Pro některou soustavu rovnic může daná metoda konvergovat, pro jinou však už konvergentní být nemusí. Rovněž se může stát, že metoda konverguje, ale konvergence metody je tak pomalá, že požadovanou přesnost řešení prakticky dosáhnout vůbec nemůžeme. Např. Jacobiova metoda aplikovaná na systém rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned} \tag{5}$$

diverguje, tatáž metoda aplikovaná na systém rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 0.93\,x + 2y &= 3 \end{aligned} \tag{6}$$

dává velmi pomalu konvergující posloupnost. Přesnosti 10^{-3} je zde dosaženo až po 197 iteračních krocích. Pro praxi je taková konvergence bezcenná a je nutné hledat vhodnější iterační metodu.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci Jacobiovy metody je formulována jednoduchým způsobem v následující větě. Její důkaz však vyžaduje znalost některých pojmů lineární algebry, proto jej neuvedeme.

Věta 1. *V soustavě rovnic* (1) *označme*

$$q = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}. \tag{7}$$

Jacobiova iterační metoda aplikovaná na soustavu (1) *konverguje, právě když*

$$|q| < 1. \tag{8}$$

U Jacobiovy metody pro $n = 2$ lze navíc ukázat, že čím je $|q|$ blíže k jedné, tím je konvergence pomalejší, pro $|q| \to 0$ se konvergence posloupnosti postupných aproximací zrychluje.

V soustavě rovnic (4) je $q = 0.25$, v soustavě rovnic (5) je $q = 4$, v soustavě rovnic (6) je $q = 0.93$. Tomu odpovídá i chování posloupností postupných aproximací. Sami si můžete zkusit nalézt soustavy rovnic takové, že posloupnosti postupných aproximací mají předem požadované chování.

U Jacobiovy metody dochází k zajímavému jevu, zaměníme-li ve výchozí soustavě pořadí rovnic. Studenti vědí, že takovou záměnou se řešení systému rovnic nezmění, avšak při aplikování Jacobiovy iterační metody na takto pozměněný systém rovnic získáme iterační proces opačné kvality, tj. z konvergentního iteračního procesu dostaneme divergentní proces a naopak, z divergentního procesu dostaneme konvergenní proces. Je to jednoduchý důsledek vztahů (7) a (8).

B. GAUSSOVA-SEIDELOVA METODA

Druhá z nabízených metod je Gaussova-Seidelova metoda. Její iterační formule se získjí také z rovnic (2), ale iterační exponenty se připojí jiným způsobem. Souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)})$ pro $k = 1, 2, \dots$ počítáme pomocí vztahů

$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}} y^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\
y^{(k)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}} x^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Při aplikaci metody se tedy již vypočtená x-ová souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}^{(k)}$ použije k výpočtu y-ové souřadnice tohoto vektoru. Tím dochází k urychlení konvergence posloupnosti postupných aproximací.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci Gaussovy-Seidelovy metody je formulována stejně jako u Jacobiovy metody. Konverguje-li tedy jedna metoda, konverguje i druhá a totéž platí pro jejich divergenci. V případě konvergence pak Gaussova-Seidelova metoda konverguje vždy rychleji. Pro závislost rychlosti konvergence metody na čísle q platí totéž, co pro Jacobiovu metodu. Tyto vlastnosti však platí pouze pro $n = 2$, pro $n > 2$ je lze dokázat pouze ve speciálních případech.

Příklad 2. Řešme Gaussovou-Seidelovou metodou soustavu rovnic z příkladu 1.

Řešení. Podle (9) určíme iterační formule

$$x^{(k)} = \frac{1}{2}\, y^{(k-1)} + 2$$
$$y^{(k)} = \frac{1}{2}\, x^{(k)} - \frac{1}{2}.$$

Protože pro q dané vztahem (7) platí $q = 0.25$, je Gaussova-Seidelova metoda konvergentní. Abychom ji mohli srovnat s metodou Jacobiovou, zvolíme stejnou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^{(0)} = (6, 5)$ a výpočet ukončíme stejnou podmínkou, tj. po dosažení přesnosti 10^{-3}. Výpočet postupných aproximací probíhá nyní takto:

$$\left.\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{1}{2}\, y^{(0)} + 2 = \frac{1}{2}\, 5 + 2 = \frac{9}{2} \\ y^{(1)} &= \frac{1}{2}\, x^{(1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^{(1)} = (4.5, 2.75)\,,$$

$$\left.\begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{1}{2}\, y^{(1)} + 2 = \frac{27}{8} \\ y^{(2)} &= \frac{1}{2}\, x^{(2)} + \frac{1}{2} = \frac{35}{16} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = (3.375, 2.1875)\,,$$

atd. Postupné aproximace jsou uvedeny v tab. 2. Vidíme, že konvergují k řešení $\boldsymbol{\xi} = (3, 2)$ rychleji, k dosažení požadované přesnosti stačilo pouze 8 iteračních kroků:

$$|\,\boldsymbol{x}^{(8)} - \boldsymbol{x}^{(7)}\,| \doteq 0.000307\,.$$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	6.000000	5.000000	5	3.005859	2.002930
1	4.500000	2.750000	6	3.001465	2.000732
2	3.375000	2.187500	7	3.000366	2.000183
3	3.093750	2.046875	8	3.000092	2.000046
4	3.023438	2.011719			

TAB. 2

C. Relaxační metoda s parametrem

Iterační formule třetí ze zmíněných metod, tzv. *relaxační metody s parametrem*, se získají z formulí Gaussovy-Seidelovy metody pomocí parametru $\omega \in \mathbb{R}$ takto:

$$
\begin{aligned}
x^{(k)} &= \omega\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}y^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}}\right) + (1-\omega)x^{(k-1)} \\
y^{(k)} &= \omega\left(-\frac{a_{21}}{a_{22}}x^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}}\right) + (1-\omega)y^{(k-1)}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

V důsledku závislosti iteračních formulí na reáném parametru ω je průběh posloupností postupných aproximací velmi rozmanitý, jak uvidíme dále. Všimněme si, že pro $\omega = 1$ dostaneme iterační formule Gaussovy-Seidelovy metody.

Nutnou podmínkou pro konvergenci metody je $\omega \in (0, 2)$. Pro některé soustavy rovnic relaxační metoda konverguje pro všechna $\omega \in (0, 2)$, pro jiné pouze pro některá $\omega \in (0, 2)$. Pro $\omega \notin (0, 2)$ je už metoda divergentní. V intervalu $(0, 2)$ vždy existuje právě jedna tzv. optimální hodnota relaxačního parametru, při které je rychlost konvergence iteračního procesu největší. Z praktického hlediska má tato hodnota největší význam. Postup na její výpočet neuvádíme, je však zabudován v nabízeném programu a lze ji tedy získat odtud.

Aplikujeme-li relaxační metodu na soustavu (4) z příkladu 1, pak pro optimální hodnotu parametru ω, tj. pro $\omega = 1.071797$, získáme dosud nejrychlejší konvergenci. Přesnosti 10^{-3} je dosaženo již po šesti iteračních krocích. Výpočet postupných aproximací „ručně“ je u relaxační metody poněkud pracnější než u obou předchozích metod, proto jej přenecháme počítači.

Dokončení v příštím čísle.