František Kuřina

Matematika v obrazech (2)

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 2, 65–74

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151347

MATEMATIKA V OBRAZECH (2)

Geometrie a goniometrie

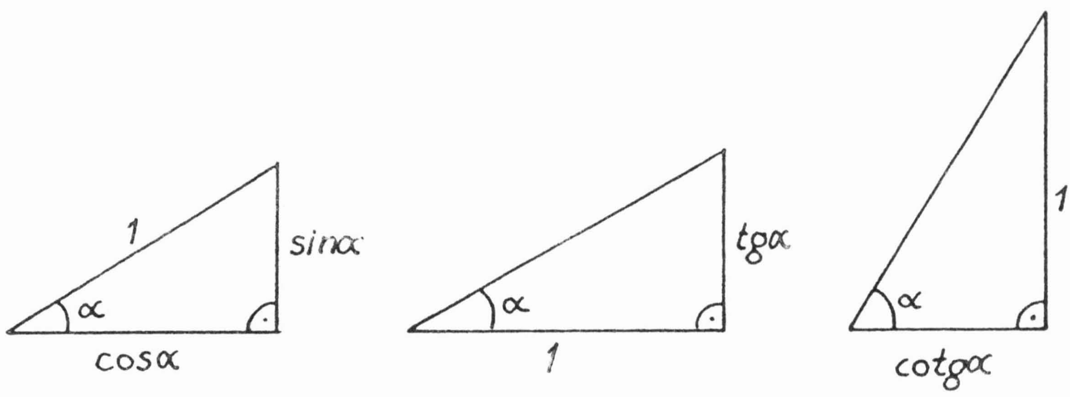
FRANTIŠEK KUŘINA

Existují dva protikladné druhy obrazů. První druh znázorňuje scény z vnějšího nebo vnitřního světa tvůrce obrazu, druhy zviditelňuje abstraktní myšlení, například matematické proporce nebo struktury poznání.

Vilém Flusser

V této části příspěvku se zaměříme na znázorňování geometrických vztahů, které souvisejí s goniometrickými funkcemi a analytickou geometrií.

Definice goniometrických funkcí můžeme přirozeně ilustrovat vhodnými pravoúhlými trojúhelníky podle obr. 1.



Obr. 1

Tato znázornění umožňují vyjádřit např. tvrzení Pythagorovy věty v goniometrickém tvaru

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

„Analytický tvar“ Pythagorovy věty je zřejmý z obr. 2. Jde zde, jak známo, o rovnici kružnice se středem v počátku a poloměrem 1:

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{2}$$

Za „vektorový tvar“ Pythagorovy věty můžeme považovat vztah

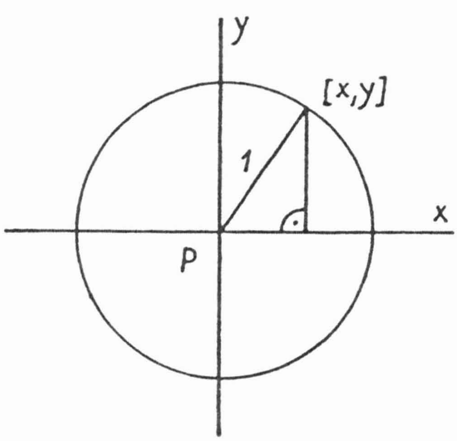
$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0, \tag{3}$$

který je v označení podle obr. 3 vyjádřením pythagorejské rovnosti

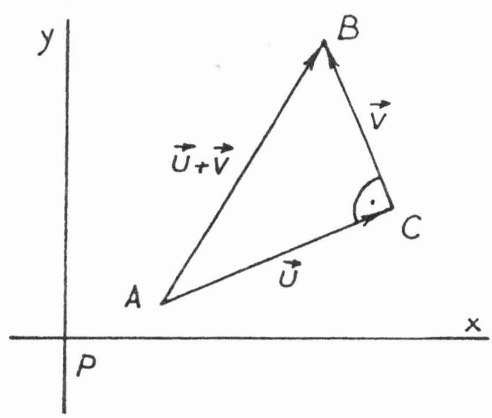
$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2,$$

kde

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} = (u_1, u_2)\,, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{v} = (v_1, v_2)\,,$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)\,.$$



Obr. 2



Obr. 3

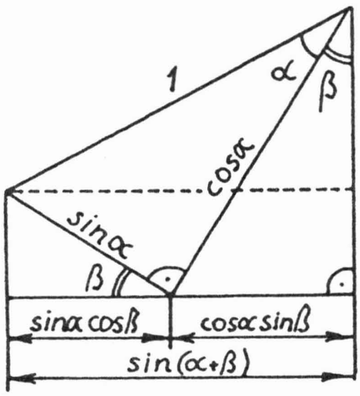
Přitom ovšem můžeme při vhodném didaktickém postupu považovat rovnost (3) i za motivaci zavedení skalárního součinu dvou vektorů.

Geometrické interpretace goniometrických funkcí umožňují názorně odvodit řadu goniometrických identit.

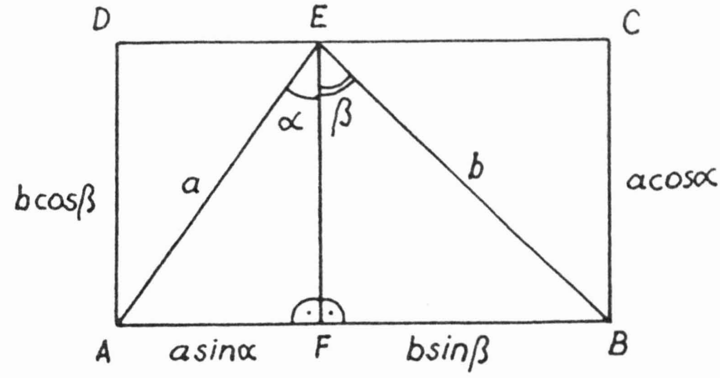
Platnost součtového vzorce

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \tag{4}$$

pro případ, že úhel $\alpha+\beta$ je ostrý, vidíme z obr. 4, který přebíráme z Hejného Žluté knihy.



Obr. 4



Obr. 5

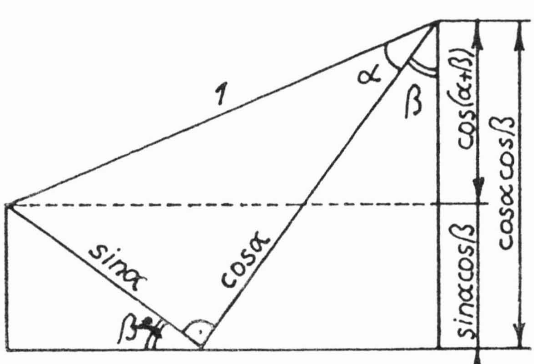
Tento vzorec můžeme ovšem odvodit i dvojím vyjádřením obsahu obdélníku podle obr. 5. Obdélník $ABCD$ má obsah

$$S = ab \sin(\alpha+\beta)\,.$$

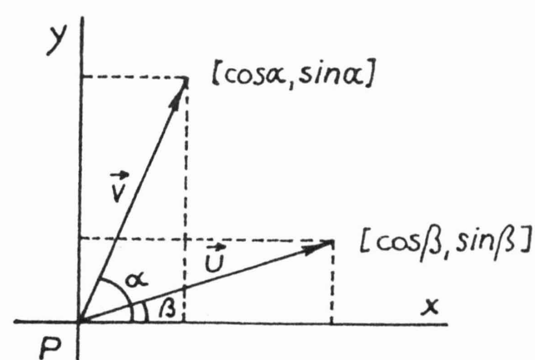
Tento obdélník je ovšem sjednocením nepřekrývajících se obdélníků $AFED$ a $FBCE$, takže pro jeho obsah platí:

$$S = ab \sin\alpha \cos\beta + ab \cos\alpha \sin\beta.$$

Odtud je tvrzení (4) zřejmé.



Obr. 6



Obr. 7

Podobně můžeme podle obr. 6 z Hejného dílny odvodit vzorec

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Pěkné odvození vzorce

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \tag{6}$$

uvádí J. Polák v Přehledu středoškolské matematiky. Jsou-li u, v jednotkové vektory se souřadnicemi

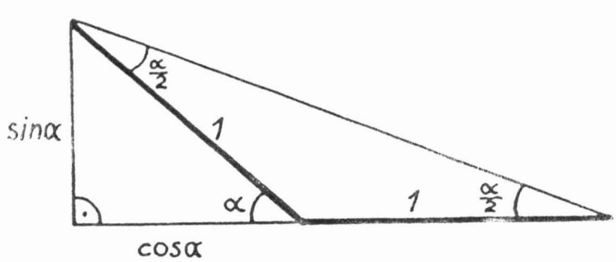
$$\vec{u} = (\cos\beta, \sin\beta)\,, \quad \vec{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)\,,$$

vyplývá tvrzení (6) bezprostředně z geometrického významu a definice skalárního součinu (obr. 7).

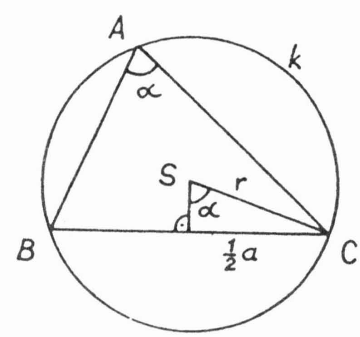
Platnost vzorce

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

vidíme z obr. 8.



Obr. 8



Obr. 9

Souvislost délek stran a velikostí úhlů v trojúhelníku vyjadřují známé věty. Sinovou větu můžeme odvodit z geometrického významu poměru

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r,$$

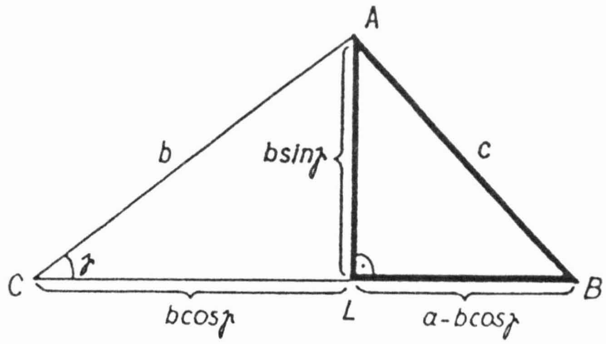
kde r je poloměr kružnice trojúhelníku opsané, podle obr. 9.

Kosinovou větu např. ve tvaru

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{9}$$

můžeme odvodit mnoha zajímavými způsoby. Uveďme zde aspoň tři.

V Čechově učebnici pro 3. ročník gymnázií z roku 1953 se odvozuje kosinová věta z věty Pythagorovy podle obr. 10.



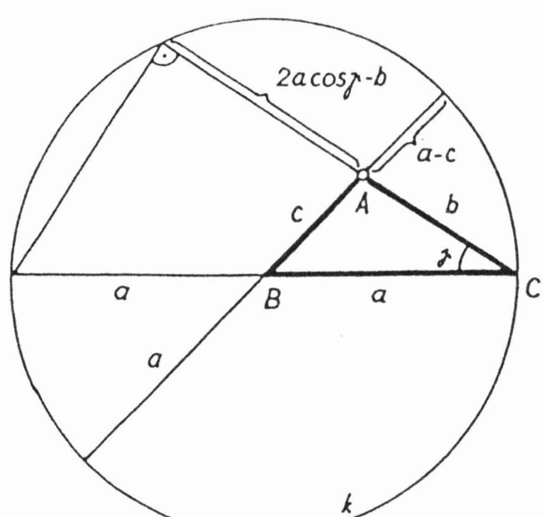
Obr. 10

Z rovnosti

$$c^2 = b^2 \sin^2 \gamma + (a - b\cos\gamma)^2$$

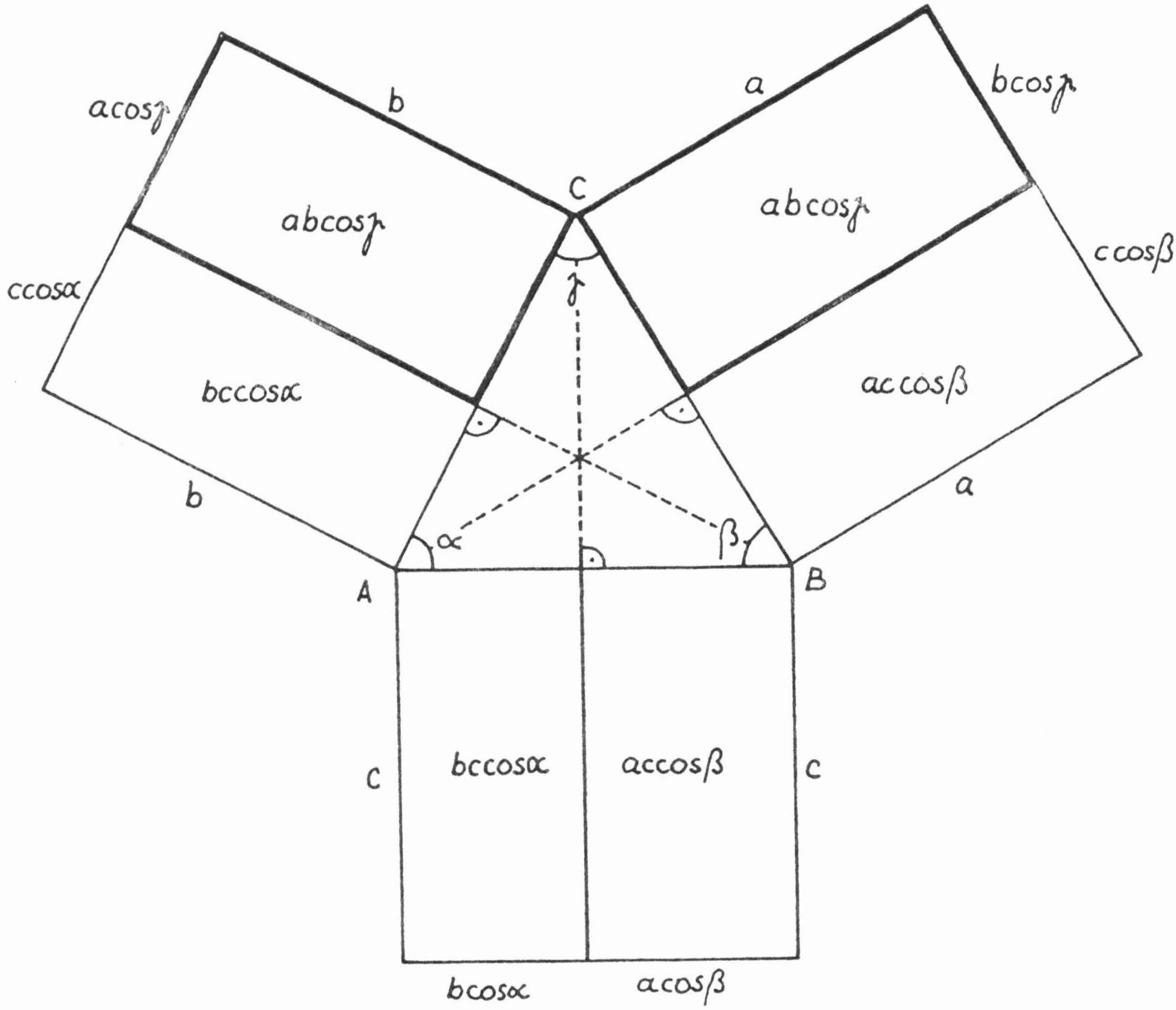
vyplývá tvrzení (9) pouhou algebraickou úpravou.

Je-li strana a trojúhelníku ABC menší než jeho strana c, vyplývá kosinová věta z věty o mocnosti bodu ke kružnici podle obr. 11 (S. K. Kung, 1990).



Obr. 11

Vyjádříme-li obsahy čtverců „nad odvěsnami" ostroúhlého trojúhelníku podle obr. 12, je rovněž tvrzení (9) bezprostředně patrné.



Obr. 12

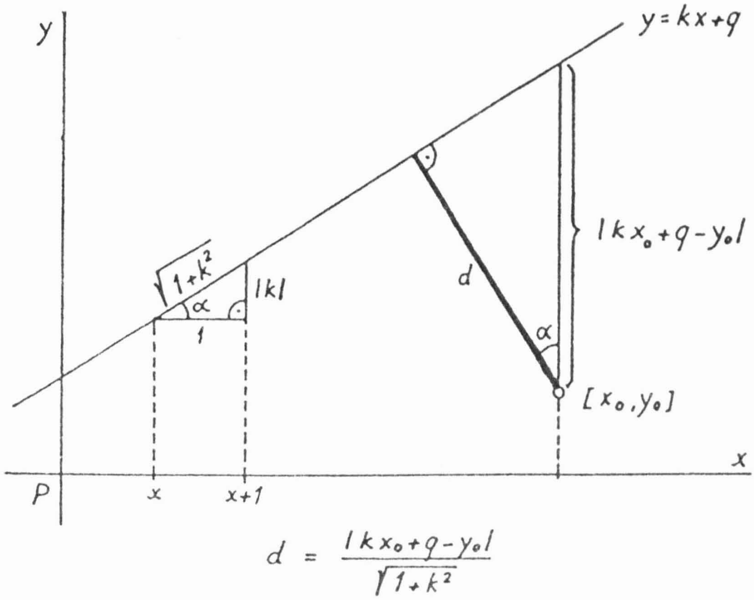
Obraťme nyní naši pozornost k analytické geometrii. Vzorec

$$d = \frac{|kx_0 + q - y_0|}{|1 + k^2|} \tag{10}$$

pro vzdálenost bodu $X_0[x_0, y_0]$ od přímky $y = kx + q$ v rovině můžeme vyčíst z podobnosti trojúhelníků podle obr. 13. Jestliže označíme $k = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$, přejde vzorec (10) ve známý vzorec

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{11}$$

pro vzdálenost bodu $X_0[x_0, y_0]$ od přímky s rovnicí $ax+by+c=0$.



Obr. 13

Pomocí geometrického významu skalárního součinu dvou vektorů můžeme určit velikost pravoúhlého průmětu úsečky BX_0 do přímky p dané parametrickým vyjádřením

$$X = X_0 + s\,\vec{u}, \text{ kde } s \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

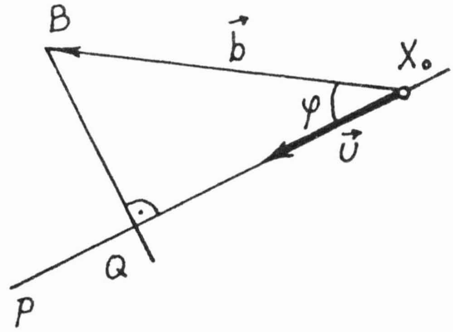
Protože vektor

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$$

je jednotkový, platí podle obr. 14

$$|\vec{b} \cdot \vec{n}| = \left| |\vec{b}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\varphi \right| = |X_0 Q|\,. \tag{13}$$

Odvození tohoto vzorce pro tupý úhel φ přenechávám čtenáři.



Obr. 14

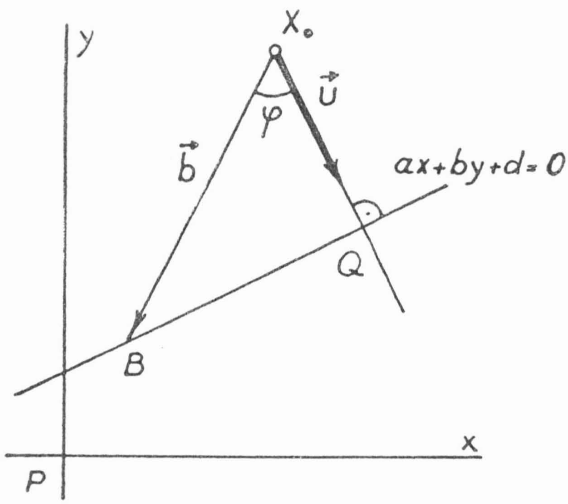
Vzorec (13) můžeme uplatnit při určení vzdálenosti bodu X_0 od přímky p dané obecnou rovnicí

$$ax + by + d = 0 \tag{14}$$

v rovině nebo od roviny ϱ dané obecnou rovnicí

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{15}$$

v prostoru.



Obr. 15

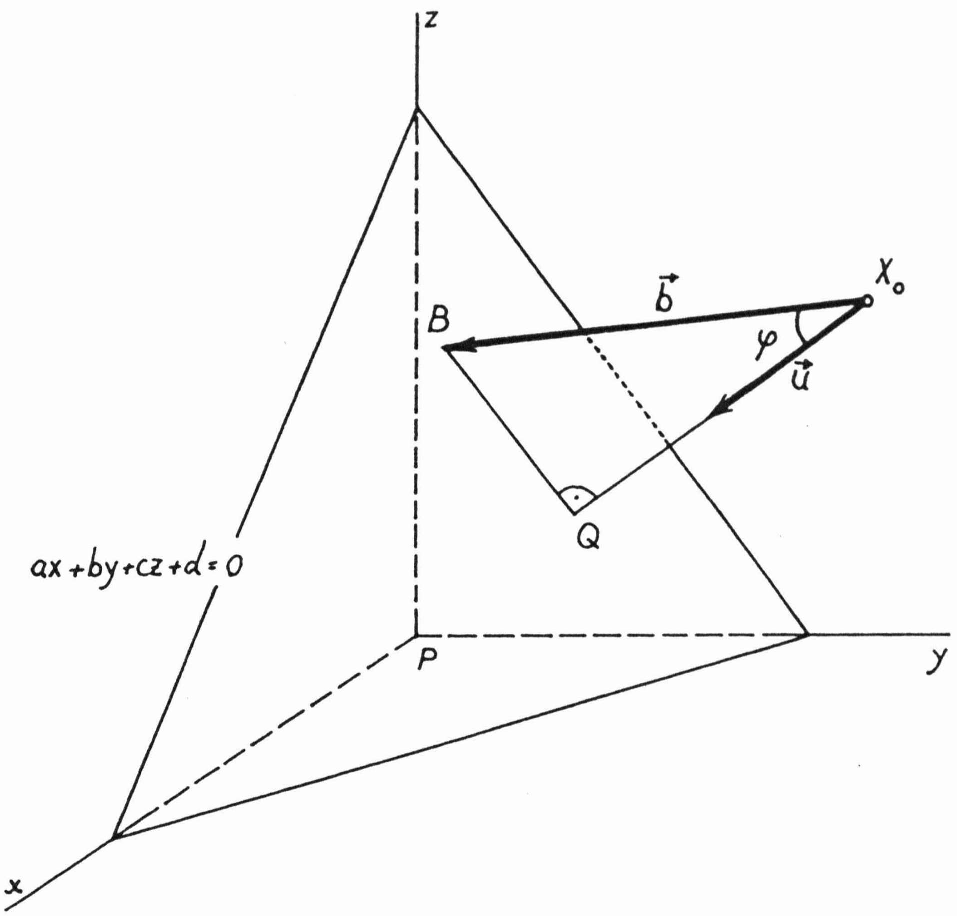
Je-li B libovolný bod přímky p (roviny ϱ), pak $\vec{u} = (a, b)$ (resp. $\vec{u} = (a, b, c)$) je normálový vektor přímky p (roviny ϱ) a označíme-li $\overrightarrow{X_0B} = \vec{b}$, $\vec{n} = \dfrac{1}{|\vec{u}|}$, vyjadřuje vztah (13) vzdálenost bodu X_0 od přímky p (roviny ϱ).

Podobným způsobem můžeme určit např. vzdálenost mimoběžných přímek

$$\begin{aligned} p\colon X &= A + s\vec{u}, \qquad s \in \mathbb{R} \\ q\colon X &= B + t\vec{v}, \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{16}$$

Označíme-li směrový vektor osy o mimoběžných přímek p, q jako vektor

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{u},$$



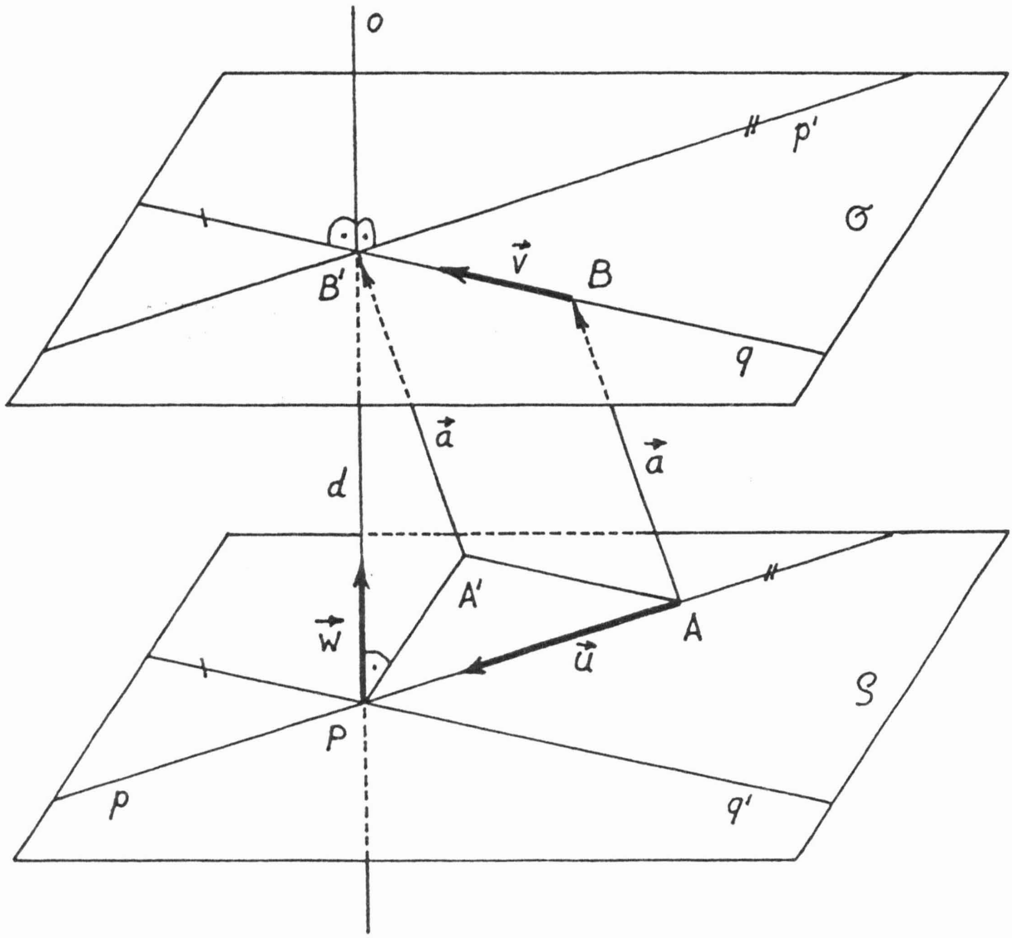
Obr. 16

kde $\vec{u} \times \vec{v}$ je vektorový součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, je

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{w}|} \cdot \vec{w}$$

jednotkový vektor zaměření osy o. Je-li $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, pak podle obr. 17 platí pro vzdálenost d mimoběžných přímek p, q

$$d = |\vec{a} \cdot \vec{n}|\,.$$



Obr. 17

Myšlení je zajímavější než vědění, není však zajímavější než hledění.

J. W. Goethe