Jiří Veselý
Zlatý řez a co vše s ním souvisí

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 3, 153–158

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151337

ZLATÝ ŘEZ

a co vše s ním souvisí

JIŘÍ VESELÝ

V dnešní době je běžnému středoškolákovi *zlatý řez* neznámým pojmem. Je to škoda, neboť nabízí ilustraci souvislostí zdánlivě velmi vzdálených partií matematiky, a to na různé úrovni vyspělosti matematického uvažování. Článek objasňuje některé z těchto souvislostí a uvádí nezbytné historické poznámky; vznikl z textu přednášky konané 19. 11. 1997 na soustředění talentovaných středoškoláků v Jevíčku.

1. Jednou z úloh, které řešil EUKLEIDES (kolem 300 před n. l.) v díle *Základy* (Kniha 2, Věta 11), bylo rozdělení úsečky délky a na dvě části tak, aby poměr a k délce x první části byl roven poměru x k délce zbytku $a - x$. V tom případě je

$$g = \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}\,, \quad \text{a je tedy} \quad a(a-x) = x^2\,.$$

Proto platí

$$g^2 = \left(\frac{x}{a-x}\right)^2 = \frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{a-x} + \frac{x}{a-x} = g+1$$

a rovnice

$$g^2 - g - 1 = 0 \tag{1}$$

má kořeny

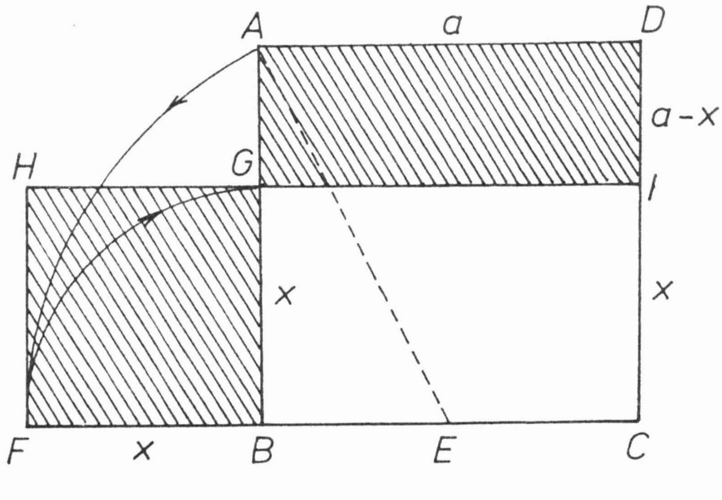
$$g = (1+\sqrt{5})/2 \quad \text{a} \quad g' = (1-\sqrt{5})/2\,.$$

Zadání úlohy vyhovuje pouze kladný kořen g. Pro lepší představu uveďme, že $g = 1{,}6180339887\ldots$; převrácená hodnota $h = 1/g$ vyhovuje rovnici

$$h^2 + h - 1 = 0 \tag{2}$$

o kořenech $h = 1/g = g - 1 = (\sqrt{5} - 1)/2$ a $h' = -g$. Čísla g, g', h a h' jsou zřejmě iracionální.

Eukleides řešil tuto úlohu geometrickými prostředky. Poznamenejme, že tak současně řešil i jednoduchou kvadratickou rovnici $x^2 + ax - a^2 = 0$. Analogicky řešil i podobné rovnice. Poměr g je dlouho znám: nazývá se zpravidla *zlatý řez* (dříve též *zlatý sek*) a je pokládán za ideální harmonický kompoziční prvek (někdy se tak označuje jeho převrácená hodnota h). Za esteticky nejuspokojivější byl pokládán obdélník o délkách stran v poměru $g : 1$. Také v dnešní době by měla podle typografických pravidel potištěná část stránky textu v ideálním případě vyplňovat obdélník, jehož strany jsou v poměru g. Popišme si pro úplnost Eukleidovu konstrukci (je jednou z mnoha možných; viz [Kli], str. 66) jako ilustraci geometrizace matematiky, která souvisela s potížemi vyvolanými objevem nesouměřitelnosti. Žáci si při jejím zdůvodnění mohou ověřit užitečnost Pythagorovy věty.



Obr. 1

Sestrojíme čtverec $ABCD$ o straně a. Pak postupně konstruujeme body E, F, G, H tak, aby pro délky úseček platilo

$$\overline{BE} = \overline{EC}, \quad \overline{AE} = \overline{EF}, \quad \overline{BF} = \overline{BG};$$

Čtverec $BGHF$ o straně x má týž obsah jako obdélník $GIDA$, jehož strany mají délky $a, a - x$.

2. Připomeňme nejprve, že symboly $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ se užívají po řadě k označení množin všech přirozených, celých, racionálních a reálných čísel. Pro $\mathbb{N} \cup \{0\}$ užíváme označení $\mathbb{N}_0$. K prohloubení znalostí o posloupnostech a o geometrické řadě může sloužit následující úloha o rekurenci, kterou připomeneme včetně historických souvislostí.

V r. 1202 vydal LEONARDO Z PISY (1180 – 1240), známější pod jménem *Fibonacci*, knihu *Liber Abaci*, v níž se vyskytl známý problém o růstu králičí populace. Převezmeme modernější úpravu úlohy z [Kon], str. 112: *Kolik párů králíků se během jednoho roku narodí z jednoho páru, jestliže každý pár dá měsíčně přírůstek jeden pár, jenž bude schopen plodit po dvou měsících, když přitom žádný pár nezahyne?*[1]

Při řešení úlohy dospíváme k posloupnosti čísel $c_n \in \mathbb{N}_0$, popsané rekurentním vzorcem

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

a podmínkami $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Jde tedy o posloupnost $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ tzv. *Fibonacciho čísel*

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots\}; \tag{4}$$

její část popisuje postupně stav po jednotlivých měsících: na začátku máme (např. k 1.1. kalendářního roku) 1 produktivní pár, po měsíci 2 páry, z toho jeden produktivní, po dvou měsících 3 páry, po třech 5, ..., a po dvanácti celkem 377 párů. Populaci bude tvořit původní pár a dalších 376 párů narozených v uvažovaném období jednoho roku; čísla tvoří podposloupnost $\{F_n\}_{n=2}^{14}$.

Lze nalézt nějaký vzorec vyjadřující přímo n-tý člen Fibonacciovy posloupnosti? Předpokládejme, že vztahu (3) vyhovuje geometrická posloupnost a položme $c_n = x^n$; z (3) dostáváme rovnici

$$x^{n+1} = x^n + x^{n-1}, \quad \text{resp.} \quad x^2 - x - 1 = 0, \tag{5}$$

takže jsme dospěli opět k rovnici (1) o kořenech g a g'. Snadno nahlédneme, že posloupnosti $\{g^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{(g')^n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovují rekurenci (3) a že tuto vlastnost má pro libovolně zvolená $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i posloupnost

$$\{\alpha g^n + \beta (g')^n\}_{n=0}^{\infty}.$$

[1]Formulace se mohou trochu lišit, v [Kon] je teprve z řešení patrné, jak je zadání chápáno.

Z podmínek $c_0 = \alpha + \beta = 0$ a $c_1 = \alpha g + \beta g' = 1$ určíme snadno

$$\alpha = -\beta = 1/(g - g') = 1/\sqrt{5}\,,$$

odkud dostaneme tzv. *Binetovu formuli* pro Fibonacciova čísla

$$F_n = \frac{g^n - (g')^n}{g - g'} = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{6}$$

Tento vzorec objevil v 19. stol. JACQUES–PHILIPPE–MARIE BINET (1786 – 1856); pokud je vzorec (6) již znám, snadno se dokáže matematickou indukcí. Poznamenejme, že posloupnosti vyhovující (3) se často nazývají podle FRANÇOISE-ÉDOUARDA ANATOLA LUCASE (1842 – 1891) posloupnosti *Lucasovy.*

3. Také trojúhelníkové schéma binomických koeficientů, které nazýváme *Pascalův trojúhelník*, je velmi staré a bylo známo již mnoho let před dobou BLAISE PASCALA (1623 – 1672), významného matematika a konstruktéra prvního počítacího stroje. V Evropě se objevuje v tištěné podobě v knížce z r. 1527[2]. Souvisí posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ s *Pascalovým trojúhelníkem*? Ač to nemusí být na první pohled patrné, odpověď zní ano. V následujícím schématu sečtěte prvky, označené stejnými horními indexy:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1^0 & & & & & & \\
 & & & & & 1^1 & & 1^2 & & & & & \\
 & & & & 1^2 & & 2^3 & & 1^4 & & & & \\
 & & & 1^3 & & 3^4 & & 3^5 & & 1^6 & & & \\
 & & 1^4 & & 4^5 & & 6^6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1^5 & & 5^6 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1^6 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Pokud se to bude zdát čtenáři málo přesvědčivé, může si za cvičení samostatně indukcí dokázat vzorec

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{7}$$

[2] V Číně již v r. 1261; viz článek [KrL].

kde se podle standardní definice binomických koeficientů některé členy součtu anulují. Této souvislosti lze využít při procvičování vlastností binomických koeficientů či indukce.

4. Podívejme se na něco odlišného: máme-li určit největšího společného dělitele dvou přirozených čísel a, b, je standardním postupem užití tzv. *Eukleidova algoritmu.* Jím se zabývá Eukleides v *Základech* (Kniha 7). Ukažme si to na příkladu. Zvolme např. dvojici čísel 57, 17; pak platí

$$\frac{57}{17} = 3 + \frac{6}{17}, \qquad \frac{17}{6} = 2 + \frac{5}{6}, \qquad \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5},$$

a vzhledem k tomu, že zbytek v posledním dělení je roven 1, jsou čísla 17 a 57 nesoudělná. Z předchozího však také dostáváme

$$\frac{57}{17} = 3 + \frac{6}{17} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{6}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}. \tag{8}$$

Zde lze patrně nalézt základ vyjadřování čísel pomocí tzv. *řetězových zlomků,* což je způsob opět velmi starý. Seznámíme se s ním nejprve intuitivně. Popíšeme několik dalších příkladů. Vyjádření v této formě nemusí být jako v (8) „ukončené“; již z r. 1685 je formule, kterou uvádí JOHN WALLIS (1616 – 1703):

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}.$$

Wallis, který rovněž patrně první zavedl název řetězový zlomek (v originále „continued fraction“), píše, že k tomuto vzorci dospěl WILLIAM BROUNCKER (1620 – 1684) úpravou známé formule (u nás bývá nazývána Wallisova a uvádí se zpravidla ve formě pro vyjádření $\pi/2$)

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdots}.$$

Již r. 1572 uvádí RAFAEL BOMBELLI (1526 – 1572) následující vyjádření

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}.$$

Zřejmá pravidelnost ve vyjádření vyplývá z faktu, že $\sqrt{2}$ vyhovuje jednoduchému vztahu $\alpha = 1 + 1/(1 + \alpha)$. Podobně z již dříve zmíněné rovnosti $g = 1 + h = 1 + 1/g$ plyne vyjádření

$$g = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}. \tag{9}$$

Zlatý řez má tedy při vyjádření řetězovým zlomkem patrně *nejjednodušší tvar*. Pro číslo π platí např.

$$\pi = 0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cdots}}}}, \qquad \pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}.$$

Uvedená souvislost může zpestřit výklad o π, o numerickém počítání apod.

LITERATURA:

[Kli] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[Kon] Konforovič, A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989.

[KrL] Křížek, M., Liu, L., *Matematika ve starověké Číně*, Pokroky MFA **42** (1997), 223 – 233.