Emil Calda
Ještě jednou o věžových polynomech

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 3, 146–152

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151336

JEŠTĚ JEDNOU O VĚŽOVÝCH POLYNOMECH

EMIL CALDA

Matematik má mít doma
věžového polynoma!

V minulém čísle byl v článku *Permutace s omezujícími podmínkami a věžové polynomy* vysvětlen pojem věžového polynomu a naznačeno jeho využití pro řešení kombinatorických úloh. Připomeňme si, že věžovým polynomem $v(x,S)$ příslušným síti S se rozumí polynom

$$v(x,S) = v_0(S) + v_1(S)x + v_2(S)x^2 + v_3(S)x^3 + \dots ,$$

jehož koeficienty $v_k(S)$ pro $k > 0$ udávají, kolika způsoby lze na síť S rozmístit k vzájemně se neohrožujících věží; pro $k = 0$ se klade $v_0(S) = 1$. Využití věžových polynomů je založeno na větě:

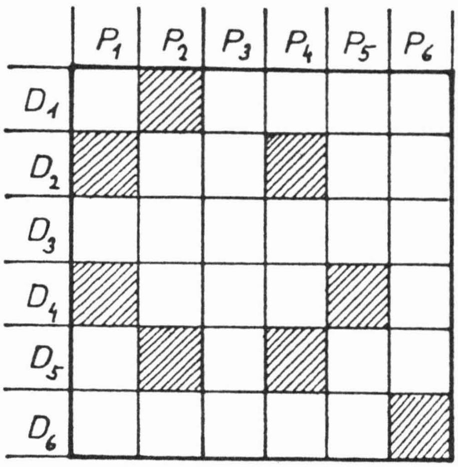
Počet permutací z n prvků s omezujícími podmínkami je dán výrazem

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)! ,$$

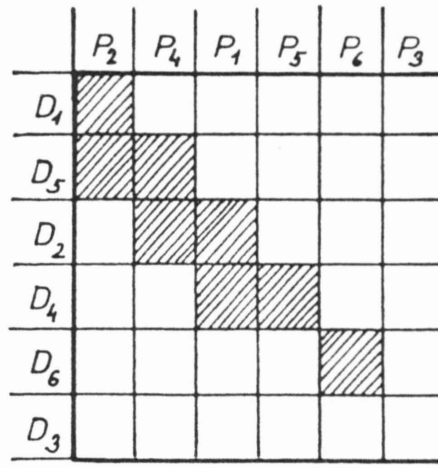
kde $v_k(S)$ jsou koeficienty věžového polynomu $v(x,S)$ příslušného síti S, která odpovídá daným omezujícím podmínkám.

Vyřešíme nyní několik úloh, na něž v uvedeném článku nezbylo místo.

Zajímejme se o počet tanečních párů sestavených z pánů $P_1, P_2, \dots, P_6$ a dam $D_1, D_2, \dots, D_6$, mají-li být splněny požadavky, aby dáma D_1 netančila s pánem P_2, dáma D_2 s pány P_1 a P_4, dáma D_4 s pány P_1 a P_5, dáma D_5 s pány P_2 a P_4 a dáma D_6 s pánem P_6.



Obr. 1



Obr. 2

Dané omezující podmínky znázorníme vyšrafovanými políčky na obr. 1 a pokusíme se určit věžový polynom $v(x, S)$ této síti S příslušný. Určujeme-li tento polynom podle definice, snadno zjistíme $v_0(S) = 1$, $v_1(S) = 8$ a ještě možná $v_2(S) = 22$, ale s určením počtu způsobů, jak na vyšrafovaná políčka rozmístit tři, čtyři a pět vzájemně se neohrožujících věží už budeme mít menší problémy a snadno uděláme chybu.

Situace se poněkud zjednoduší, všimneme-li si, že síť S lze rozložit na disjunktní sítě S_1 (tvořenou všemi vyšrafovanými políčky kromě políčka D_6P_6) a S_2 (tvořenou jen políčkem D_6P_6). Jak víme, pro hledaný polynom $v(x, S)$ platí

$$v(x, S) = v(x, S_1).v(x, S_2) ,$$

přičemž

$$v(x, S_2) = 1 + x .$$

Chceme-li však určit polynom $v(x, S_1)$, narazíme na podobné potíže – i když poněkud menší – o kterých byla řeč výše. Jak však víme, můžeme polynom $v(x, S_1)$ určit volbou vhodného políčka w sítě S_1. Platí pak

$$v(x, S_1) = v(x, S_{1w}) + xv(x, S'_{1w}) ,$$

kde S_{1w} je síť S_1, ze které je vynecháno políčko w, a S'_{1w} je síť S_1, ze které jsou vynechána všechna políčka ležící v témže řádku a sloupci jako políčko w (včetně něho). Zvolíme-li za políčko w třeba pole D_5P_2, dostaneme:

$$v(x,S_1) = (1+6x+11x^2+7x^3+x^4)+x(1+4x+3x^2) =$$

$$= 1+7x+15x^2+10x^3+x^4 \ .$$

A protože

$$v(x,S_2) = 1+x \ ,$$

máme pro věžový polynom sítě S vyjádření

$$v(x,S) = v(x,S_1)\cdot v(x,S_2) = (1+7x+15x^2+10x^3+x^4)(1+x) =$$

$$= 1+8x+22x^2+25x^3+11x^4+x^5 \ .$$

Hledaný počet tanečních párů je tedy roven

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k(S)(6-k)! =$$

$$= 1.6! - 8.5! + 22.4! - 25.3! + 11.2! - 1.1! + 0.0! = 159 \ .$$

Poznamenejme ještě, že výpočet polynomu $v(x,S)$ se patrně zjednoduší, když řádky a sloupce sítě na obr. 1 vhodným způsobem přemístíme podle obr. 2. Takto vzniklou síť S rozložíme na disjunktní sítě S_1 (všechna vyšrafovaná políčka ve sloupcích P_2, P_4, P_1, P_5) a S_2 (políčko D_6P_6) a v síti S_1 zvolíme za políčko w pole D_2P_4; jeho vynecháním se totiž síť S_1 rozpadne na další dvě disjunktní sítě, takže pro polynom $v(x,S)$ dostaneme:

$$v(x,S) = (1+x)[(1+3x+x^2)^2+x(1+2x)^2] =$$

$$= 1+8x+22x^2+25x^3+11x^4+x^5 \ .$$

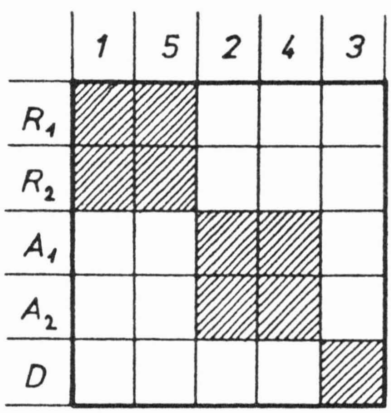
V následující úloze se budeme zajímat o to, kolika způsoby lze permutovat písmena slova RADAR tak, aby žádné nebylo na původním místě, tj. aby písmeno R nebylo první ani páté, A nebylo druhé ani čtvrté a písmeno D nebylo třetí. Tuto úlohu můžeme samozřejmě vyřešit i bez věžového polynomu tak, že vypíšeme všechny možnosti:

ADRRA, ARARD, ARRDA, DRARA.

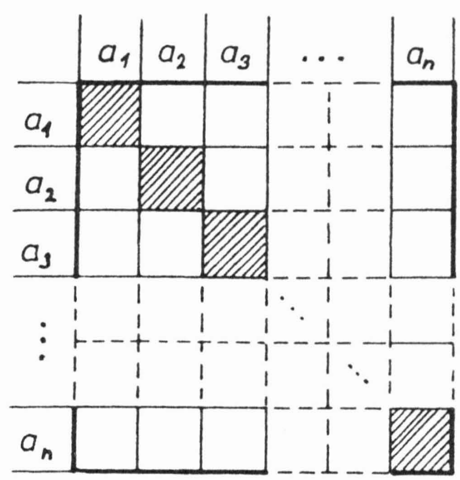
Je však jasné, že tento způsob řešení není vždycky nejvhodnější; kdybychom se o totéž zajímali např. u slova CECILIE, museli bychom vypsat možností mnohem více.

S použitím věžových polynomů vyřešíme danou úlohu následovně. Stejná písmena rozlišíme indexy a utvoříme příslušnou síť S podle obr. 3, pro jejíž věžový polynom $v(x, S)$ platí:

$$v(x,S) = (1+4x+2x^2)^2(1+x) = 1+9x+28x^2+36x^3+20x^4+4x^5 \, .$$



Obr. 3



Obr. 4

Odtud dostáváme, že počet permutací, v nichž písmena R_1, R_2 nejsou na 1. ani 5. místě, písmena A_1, A_2 nejsou na 2. ani 4. místě a písmeno D není na 3. místě, je

$$1.5! - 9.4! + 28.3! - 36.2! + 20.1! - 4.0! = 16 \, .$$

Abychom se vrátili k původnímu slovu RADAR, ztotožníme písmena rozlišená indexy, takže počet permutací slova RADAR, v nichž žádné písmeno není na původním místě, je dán číslem

$$\frac{16}{2!2!} = 4 \, .$$

Pomocí věžových polynomů se dá snadno určit, kolika způsoby je možno přestavět n-členný zástup tak, aby žádný jeho člen nezůstal na místě. Počet permutací tohoto typu se obvykle značí D_n, což pochází z anglického názvu pro tyto permutace: *derangements* – nepořádky. (Platí např. $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_3 = 3$, $D_4 = 9$, $D_5 = 44$).

Mějme tedy n prvků $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ a hledejme počet permutací, ve kterých prvek a_i není na i-tém místě pro všechna $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Síť S, která těmto podmínkám odpovídá, je tvořena vyšrafovanými políčky na obr. 4; jejím postupným rozložením na disjunktní sítě skládající se z jednotlivých políček zjistíme její věžový polynom $v(x, S)$:

$$v(x,S) = (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^n .$$

Pro počet D_n permutací uvažované vlastnosti tak platí:

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}0! =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} .$$

Stojí za povšimnutí, že $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ je součet prvních $n+1$ členů řady $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$, jejíž součet je e^{-1}, odkud vyplývá pozoruhodný vztah:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} .$$

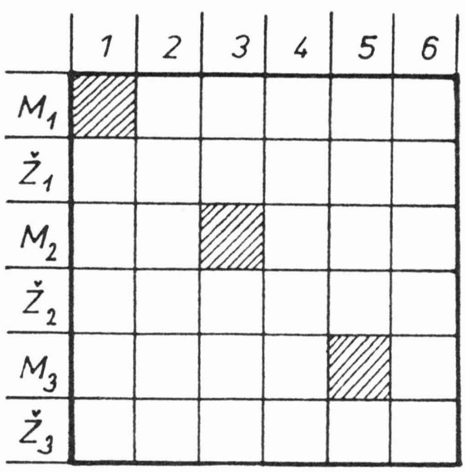
V následujícím příkladu půjde o to, kolika způsoby se dá šestičlenný zástup, na jehož lichých místech stojí muži a na sudých místech ženy, přestavět tak, aby žádný muž nestál na svém původním místě.

Předpokládejme, že v daném počátečním zástupu stojí muži M_1, M_2, M_3 na místech 1, 3, 5 a ženy $Ž_1, Ž_2, Ž_3$ na místech 2, 4, 6. Síť, která odpovídá požadovaným permutacím, je tvořena vyšrafovanými políčky na obr. 5; z jejího věžového polynomu

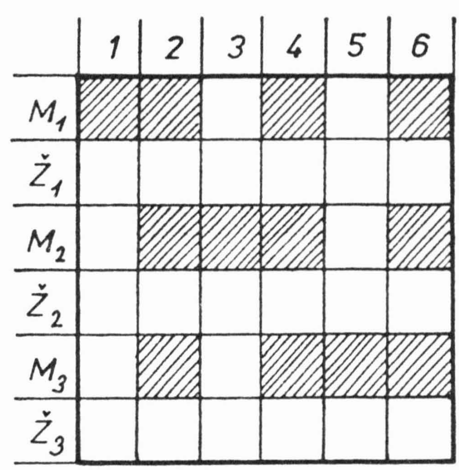
$$v(x, S) = (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

vyplývá, že hledaný počet způsobů přestavění daného zástupu, ve kterých žádný muž není na svém původním místě, je

$$6! - 3.5! + 3.4! - 1.3! = 366 .$$



Obr. 5



Obr. 6

Podívejme se nyní, jak se tento počet změní, budeme-li požadovat, aby kromě toho, že v přestavěném zástupu není žádný muž na svém původním místě, zůstal každý na místě lichém.

Těmto permutacím odpovídá síť na obr. 6, jejíž věžový polynom – jak s nevelkými potížemi zjistíme – má tvar

$$1 + 12x + 39x^2 + 34x^3 .$$

Pro počet permutací požadovaných vlastností odtud dostaneme

$$6! - 12.5! + 39.4! - 34.3! = 12 .$$

Pozorný čtenář nepochybně vidí, že celý tento výpočet jsme si mohli ušetřit, kdybychom si uvědomili, že počet možností, jak daným způsobem přemístit muže, je D_3 a že ke každému tomuto přemístění mužů existuje 3! možností, jak přemístit ženy. Hledaný počet permutací je tedy

$$D_3.3! = 2.6 = 12 .$$

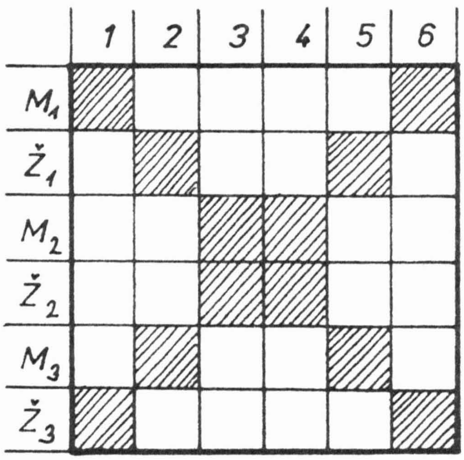
Závěrem obměníme tuto úlohu ještě tak, aby zakázaným pozicím v přestavěném zástupu odpovídala vyšrafovaná políčka na obr. 7. Věžový polynom této sítě určíme tak, že přemístíme její řádky a sloupce podle obr. 8, čímž dostáváme:

$$v(x,S) = (1+4x+2x^2)^3 =$$

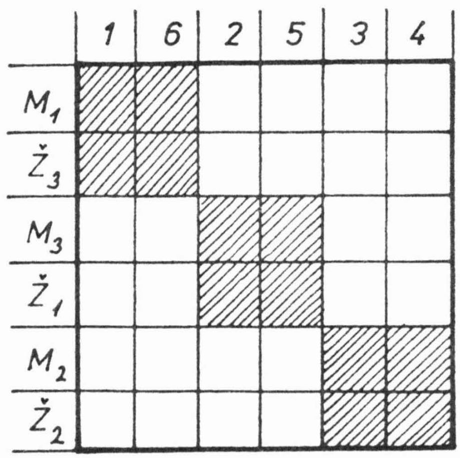
$$= 1 + 12x + 54x^2 + 112x^3 + 108x^4 + 48x^5 + 8x^6 .$$

Hledaný počet přestavěných zástupů je

$$6! - 12.5! + 54.4! - 112.3! + 108.2! - 48.1! + 8.0! = 80 .$$



Obr. 7



Obr. 8

Všechny uvedené úlohy týkající se šestičlenného zástupu si pilný čtenář jistě zobecní na případ zástupu n-členného. Zároveň doufám, že z výše uvedených řádků je vidět, že teorie věžových polynomů je nejen jednoduchá a hezká, ale že v řadě úloh – a to i středoškolských – může být také užitečná.