

Učitel matematiky

Jarmila Šotová

Ukázka programu v systému FAMULUS (2)

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 3, 137–145

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/151335>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1998

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

UKÁZKA PROGRAMU V SYSTÉMU FAMULUS (2)

JARMILA ŠOTOVÁ

II. Grafické znázornění

posloupností postupných aproximací v rovině

Ve druhé části článku ukážeme, jak lze posloupnosti postupných aproximací popsané v předchozí části článku graficky znázornit v rovině a demonstrovat na počítači pomocí nabízeného programu v systému FAMULUS.

Program pracuje interaktivně, vstupní hodnoty, tj. koeficienty systému rovnic a počáteční aproximace, se zadávají z klávesnice. Program umožňuje řešit libovolný systém rovnic libovolnou z uvedených metod. Student si může zvolit metodu, kterou použije k řešení daného systému, resp. může zvolenou metodou řešit různé systémy rovnic. Grafy lze zobrazovat i do více oken (až čtyř) na obrazovce a srovnávat tak získané výsledky mezi sebou.

Nechť je v eukleidovské rovině dána kartézská souřadnicová soustava s počátkem P a nechť $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_0^\infty$ je posloupnost postupných aproximací generovaných iteračními formulami Jacobiovy, Gaussovy-Seidelovy, případně relaxační metody (viz. vzorce (3), (9) a (10)). Pak místo vektorů $\mathbf{x}^{(k)}$ můžeme uvážit body $X^{(k)}$ takové, že

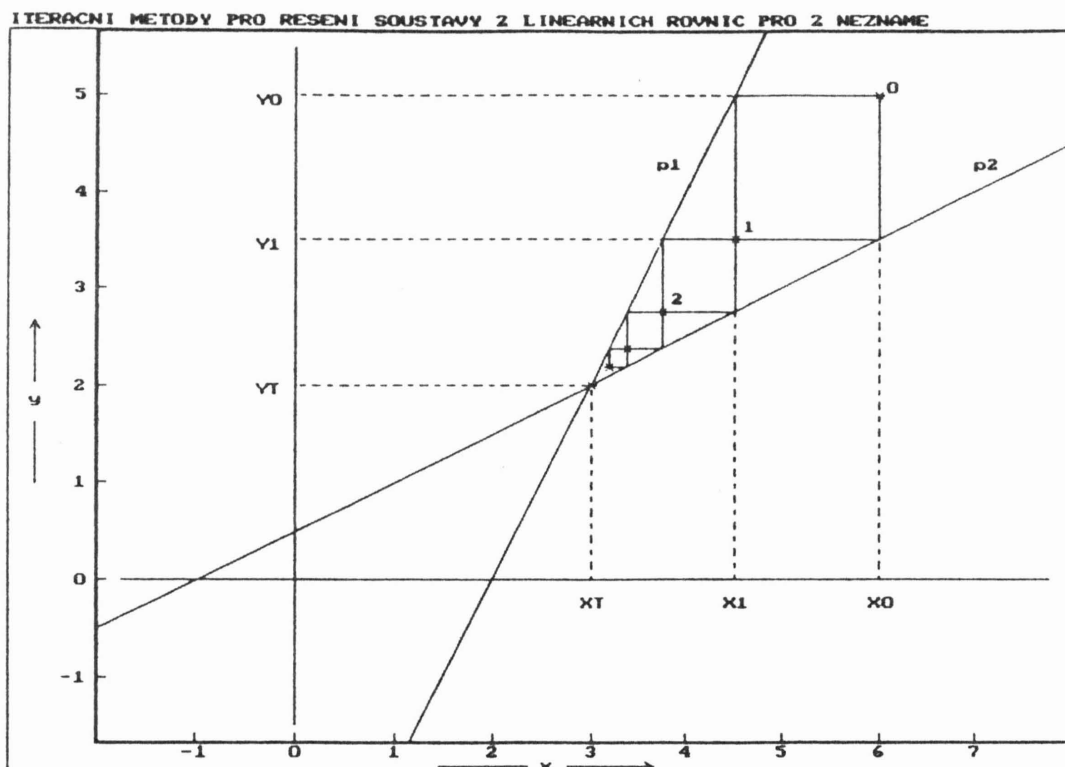
$$\mathbf{x}^{(k)} = \overrightarrow{PX^{(k)}}.$$

Posloupnosti postupných aproximací jsou pak demonstrovány těmito body. Přitom pro souřadnice bodů $X^{(k)}$ a vektorů $\mathbf{x}^{(k)}$ platí

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)}) \Leftrightarrow X^{(k)} = [x^{(k)}, y^{(k)}].$$

Na obr. 1 je graficky znázorněn konvergentní iterační proces Jacobiovy metody pro systém rovnic

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4, \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$$



OBR. 1

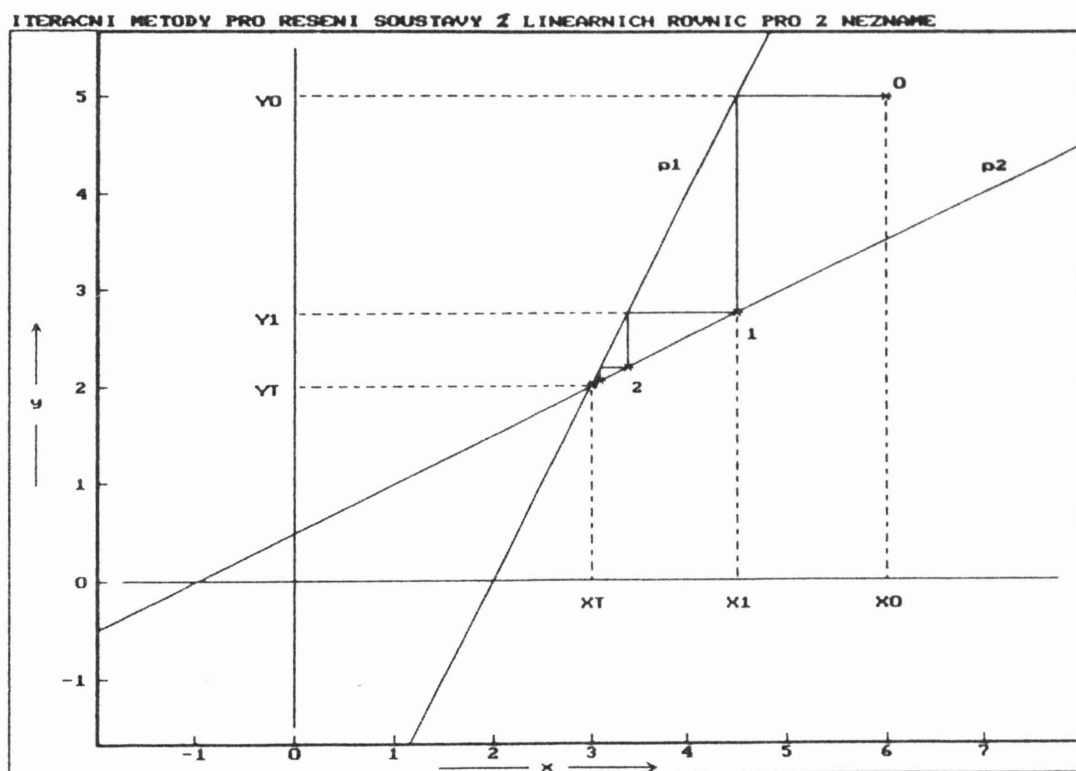
a pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = (6, 5)$, který jsme popsali v příkladě 1. Konstrukce postupných aproximací je z obrázku patrna.

Nechť $x^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})$ je počáteční aproximace a necht' p_1 je přímka, která graficky znázorňuje první rovnici, p_2 přímka, která graficky znázorňuje druhou rovnici. Pak ze vztahů

$$x^{(1)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}y^{(0)} + \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$y^{(1)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x^{(0)} + \frac{b_2}{a_{22}}$$

je zřejmé, že na přímce p_1 leží bod $(x^{(1)}, y^{(0)})$, na přímce p_2 leží bod $(x^{(0)}, y^{(1)})$. Konstrukce aproximace $x^{(1)}$ pomocí ordinál je na obrázku provedena. Další aproximace se zobrazují analogicky.



OBR. 2

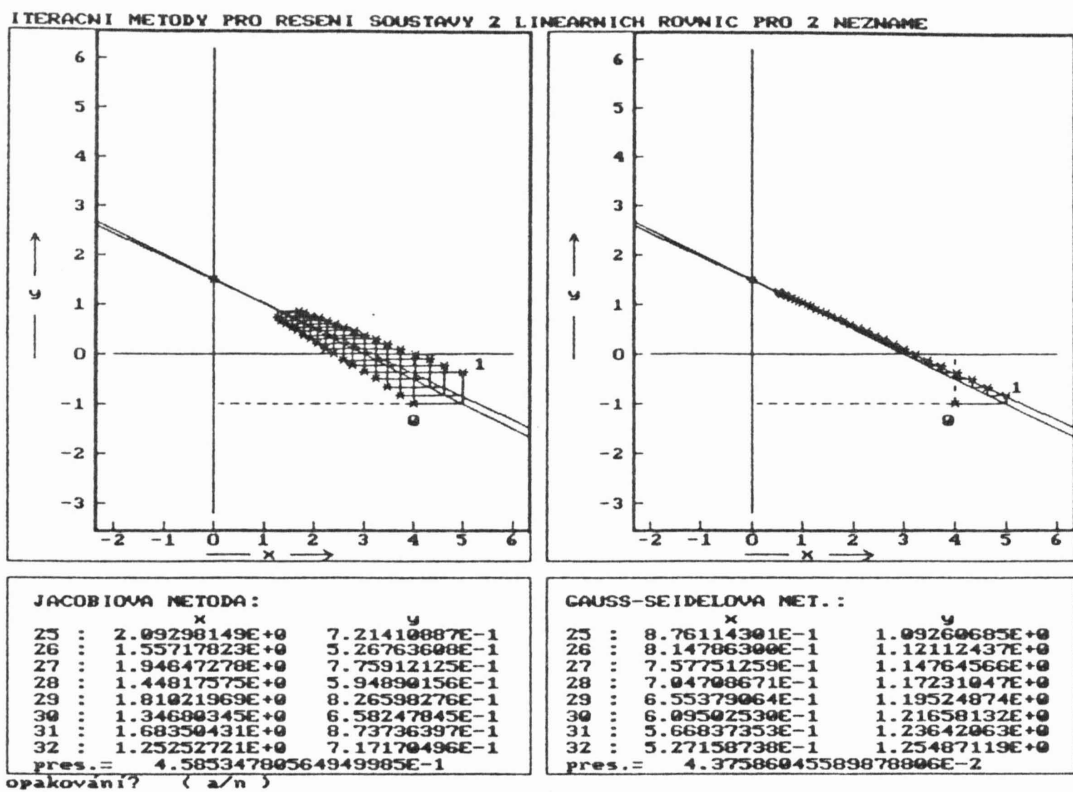
Grafické znázornění Gaussova-Seidelova iteračního procesu se provede obdobně. Protože nyní platí

$$x^{(1)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}y^{(0)} + \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$y^{(1)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x^{(1)} + \frac{b_2}{a_{22}},$$

vidíme z druhé rovnice, že postupné aproximace počínající aproximací $x^{(1)}$ leží na přímce, která graficky reprezentuje druhou rovnici systému. Situace je znázorněna na obr. 2.

Na obr. 3 jsou vedle sebe zobrazeny iterační metody Jacobi-ova a Gaussova-Seidelova pro soustavu rovnic (6) a pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = (4, -1)$. Obrázek nám umožňuje posoudit a srovnat názorně rychlost konvergence obou metod. Pro uvedený systém rovnic platí $q = 0.93$, a tedy obě metody současně konvergují, přičemž Gaussova-Seidelova metoda konverguje rychleji.



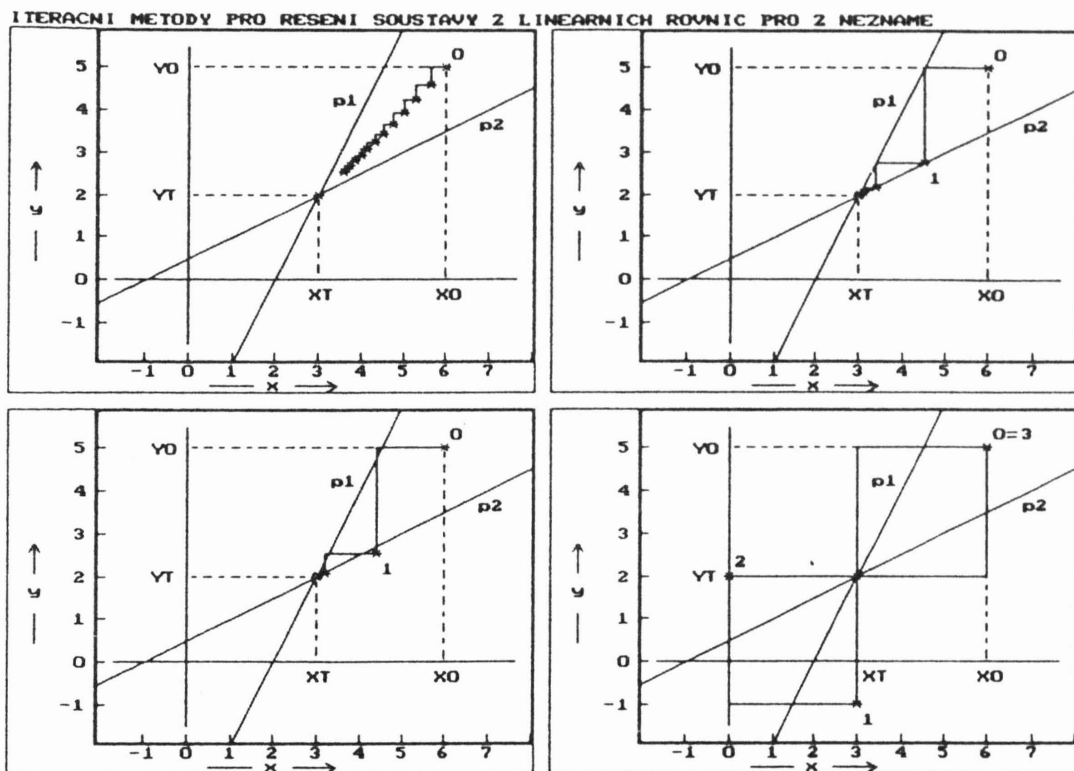
OBR. 3

Poněvadž q je blízké k jedné, je konvergence obou metod velmi pomalá. .

Na obr. 4 je ve čtyřech oknech zobrazena relaxační metoda aplikovaná na systém rovnic (4) z Příkladu 1 pro čtyři různé hodnoty relaxačního parametru ω . Můžeme sledovat, jak se v závislosti na ω mění průběh generované posloupnosti aproximací:

- v prvním okně je $\omega = 0.25$, metoda konverguje velmi pomalu;
- v druhém okně je pro $\omega = 1$ iterační proces Gaussovy-Seidelovy metody;
- ve třetím okně je $\omega = 1.071797$, což je tzv. optimální hodnota parametru, při níž metoda konverguje nejrychleji;
- v posledním okně je $\omega = 2$ a metoda už je divergentní. Posloupnost iterací má však zajímavý průběh – je periodická s periodou $p = 3$.

Počáteční aproximace je stále $\mathbf{x}^{(0)} = (6, 5)$.

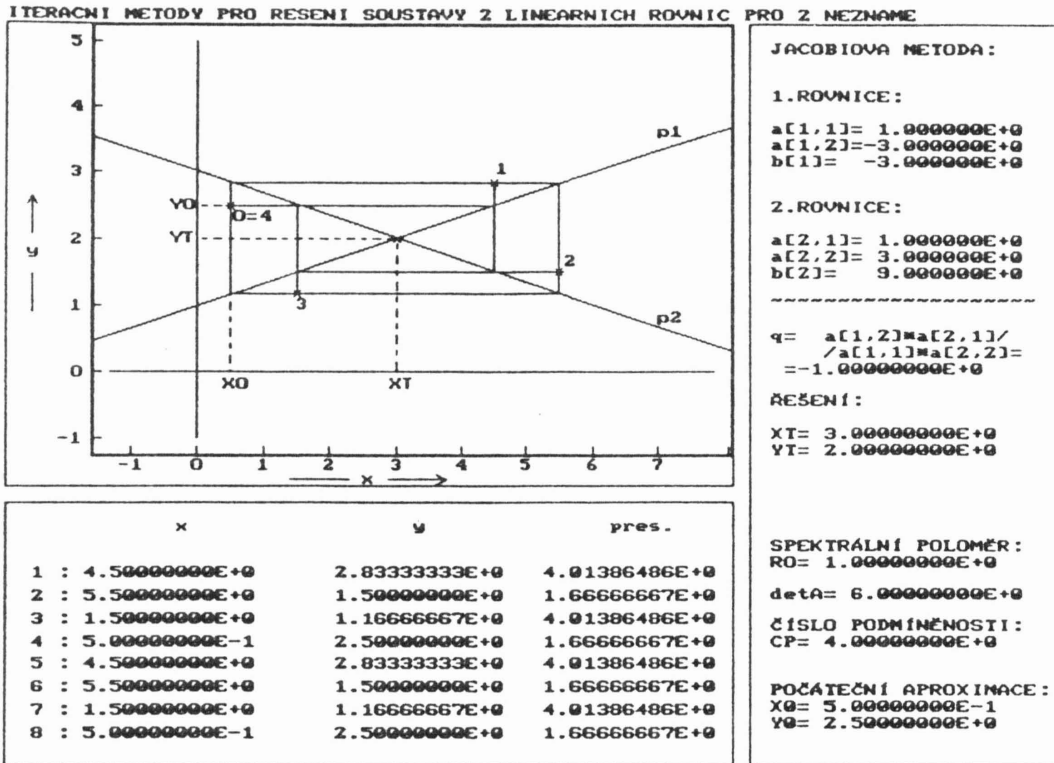


OBR. 4

III. Cykly

V předchozích ukázkách jsme viděli různé příklady konvergentních i divergentních iteračních procesů. Zatímco konvergentní iterační procesy jsou jednoznačné, divergentní posloupnosti se mohou svým průběhem lišit. Mezi nejzajímavější případ patří situace, kdy generovaná posloupnost postupných aproximací je periodická s periodou p , kde $p \geq 2$ je přirozené číslo. V tomto případě pak říkáme, že ve zmíněné posloupnosti iterací nastává cyklus řádu p . K přesné definici cyklu generovaného počátečními aproximacemi $x^{(0)}$ a k odvození nutných a postačujících podmínek pro jeho existenci je třeba základních znalostí z teorie matic a lineárních transformací. Přesto je vhodné studenty seznámit i s těmito druhy iteračních procesů. Získají tak komplexnější pohled na atraktivní problematiku, která se ve vyšší matematice studuje pomocí náročného

aparátu funkcionální analýzy. Zde se k ní dostanou pomocí dobře známých elementárních pojmů.



OBR. 5

U Jacobiovy metody nastává pouze cyklus řádu $p = 4$. Na obr. 5 je takový cyklus zobrazen pro systém

$$\begin{aligned}x - 3y &= -3, \\x + 3y &= 9\end{aligned}$$

a pro počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} = (0.5, 2.5)$. Není bez zajímavosti si povšimnout, že pro q dané vztahem (7) platí $q = -1$. Lze ukázat, že u Jacobiovy metody je to nutná a postačující podmínka pro existenci cyklu a lze ji použít k nalezení soustavy rovnic, která má v posloupnosti aproximací cyklus.

U Gaussovy-Seidelovy metody nastává cyklus od aproximace $\mathbf{x}^{(1)}$, a to opět právě tehdy, když je $q = -1$. Tento cyklus má však

jiný charakter než cykly Jacobiovy nebo relaxační metody, které nastávají od aproximace $\mathbf{x}^{(0)}$.

Relaxační metoda s parametrem má v důsledku závislosti na reálném parametru ω mnohem rozmanitější chování i z hlediska existence cyklů. Může u ní nastat cyklus libovolného řádu $p \geq 3$. Na obr. 6 jsou graficky znázorněny příklady čtyř cyklů. Systém rovnic je ve všech případech tvaru

$$\begin{aligned}x + y &= 1, \\ax + y &= 1,\end{aligned}$$

přičemž a se postupně mění:

- v prvním okně je $a = 0.25$ a v posloupnosti iterací máme cyklus řádu $p = 3$;
- v druhém okně je zobrazen pro hodnotu $a = 0.654509$ cyklus řádu $p = 5$;
- ve třetím okně máme pro $a = 0.322698$ cyklus řádu $p = 13$;
- ve čtvrtém okně pro $a = 0.712890$ cyklus řádu $p = 50$.

Ve všech čtyřech oknech je $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$ a $\omega = 2$.

Pro nalezení soustavy rovnic s cyklem daného řádu $p \geq 3$ je nutné a stačí, aby platilo

$$\omega = 2 \quad \text{a zároveň} \quad q = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi s),$$

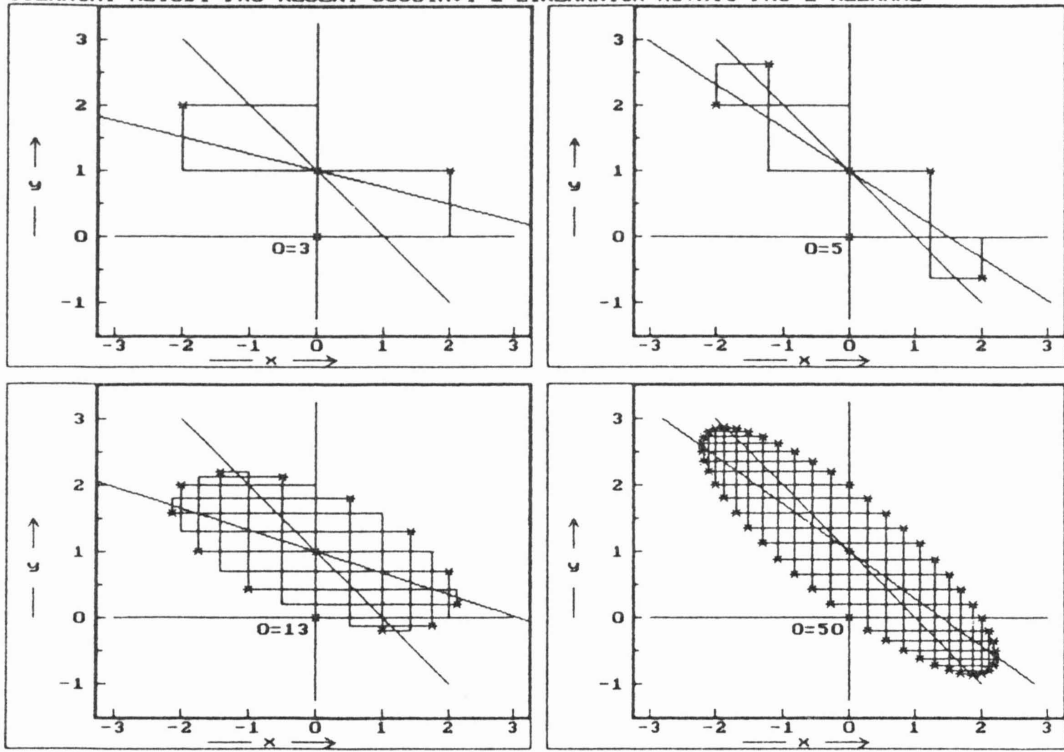
kde s je racionální číslo tvaru $s = \frac{l}{p}$ a l je jakékoli přirozené číslo s vlastností $l < \frac{p}{2}$. Snadno lze nahlédnout, že pro q v případě existence cyklu nutně platí

$$0 < q < 1.$$

Na obr. 6 máme postupně v jednotlivých oknech $s = \frac{1}{3}$, $s = \frac{1}{5}$, $s = \frac{4}{13}$, $s = \frac{2}{50}$.

Z tohoto obrázku je rovněž patrna zajímavá geometrická vlastnost postupných aproximací, kterou však můžeme dokázat pouze prostředky teorie vektorových prostorů: v případě existence cyklu

ITERAČNÍ METODY PRO ŘEŠENÍ SOUSTAVY 2 LINEÁRNÍCH ROVNIC PRO 2 NEZNÁMÉ



OBR. 6

leží postupné aproximace na elipse se středem v bodě, který graficky znázorňuje přesné řešení systému rovnic, tj. v průsečíku přímk, které graficky znázorňují jednotlivé rovnice systému.

U některých iteračních metod lze generovat posloupnosti, které sice nejsou periodické, ale s rostoucím k se blíží k některé periodické posloupnosti. Takové posloupnosti se v literatuře nazývají asymptoticky periodické posloupnosti. Se speciálním případem těchto posloupností se můžeme setkat u relaxační metody. Jestliže pro soustavu rovnic platí

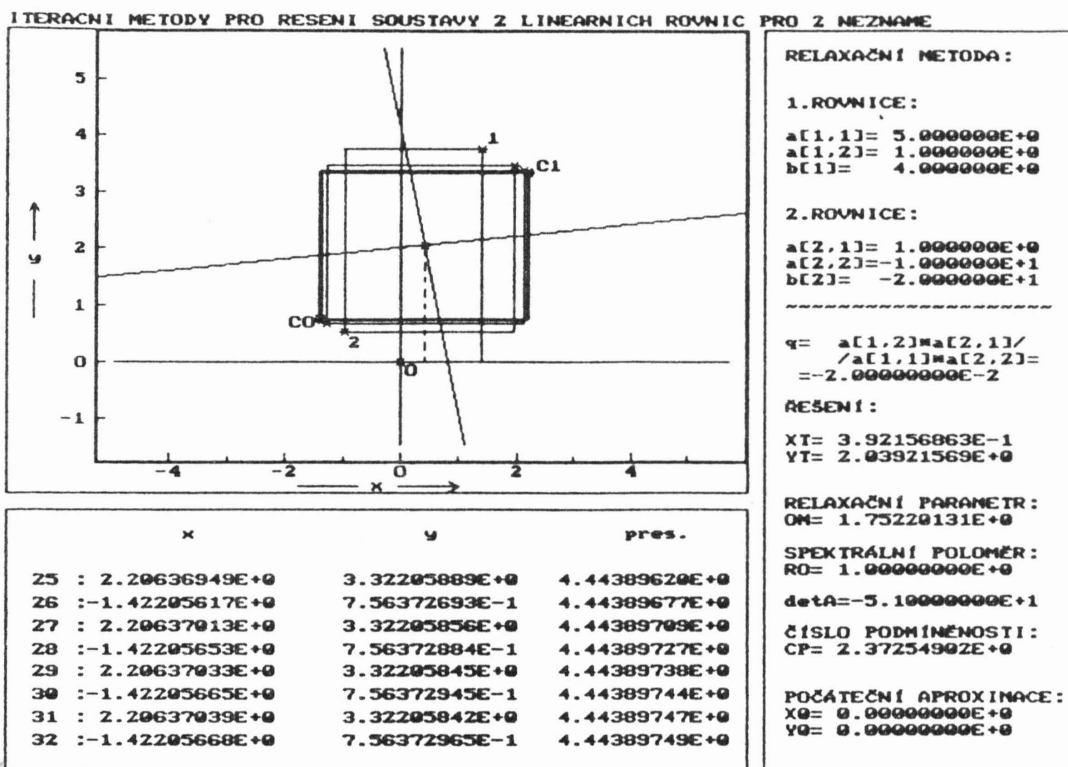
$$q < 0,$$

pak lze vždy nalézt číslo $\alpha \in (0, 2)$ takové, že pro $\omega = \alpha$ generujeme relaxační metodou posloupnost aproximací, která s rostoucím k konverguje k periodické posloupnosti s periodou $p = 2$. Hodnotu α lze opět získat z programu.

Na obr. 7 je zobrazena posloupnost postupných aproximací generovaná relaxační metodou s parametrem pro soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 5x + y &= 4, \\ x - 10y &= -20 \end{aligned}$$

a pro $\omega = 1.752201$. Aproximace konvergují k cyklu řádu $p = 2$, který je tvořen vektory $c^{(0)} \doteq (-1.42, 0.76)$ a $c^{(1)} \doteq (2.21, 3.32)$.



OBR. 7

LITERATURA:

- [1] Míka, J., *Numerické metody algebry*, SNTL, Praha, 1982.
- [2] Šotová, J., *Cykly v iteračních metodách pro řešení systémů lineárních rovnic*, Disertační práce, Vyškov, 1996.
- [3] Šotová, J., *Využití modelovacího systému FAMULUS ve výuce matematiky*, Sborník VVŠ PV Vyškov, č. 1995/2, 55 - 66.