Emil Calda

Heronův vzorec a kosinova věta

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 3, 157–159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151332`

HERONŮV VZOREC A KOSINOVÁ VĚTA

EMIL CALDA

Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku v současných středoškolských učebnicích sice stále ještě nacházíme, většinou však jenom jako stručnou informaci bez náznaku jakéhokoliv odvození. Důvod je zřejmý: kdybychom požadovali, aby i poznatky, které nejsou příliš významné, byly odvozovány a procvičovány, vzrostl by obsah učebnic nad únosnou míru; zabývat se těmito poznatky také při vyučování by z časových důvodů stejně nebylo možné. Zdá se mi, že následující odvození Heronova vzorce nezabere příliš mnoho času a navíc je lze považovat za úlohu, kterou se procvičují základní geometrické, resp. trigonometrické znalosti.

Vezměme libovolný trojúhelník se stranami a, b, c a označme α, β, γ příslušné vnitřní úhly. Z kosinové věty vypočteme

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

a dosazením do vzorců pro poloviční úhel dostáváme (vzhledem k tomu, že úhel $\alpha/2$ je ostrý nebo pravý):

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}},$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Zavedením obvyklého označení

$$a + b + c = 2s$$

se odvozené výrazy zjednoduší na tvar

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Dosadíme-li je do vzorce

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

pro obsah trojúhelníku, dostaneme

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} =$$
$$= bc \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Heronův vzorec je tak odvozen. Potřebovali jsme k tomu kosinovu větu, vzorec pro sinus a kosinus polovičního a dvojnásobného úhlu a trigonometrický vzorec pro obsah trojúhelníku.

Závěrem si ještě dovolím krátkou poznámku týkající se formulace sinové a kosinové věty. V učebnicích se často používají tyto formulace:

V každém trojúhelníku ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ, platí

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \quad \text{(věta sinová)},$$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{(věta kosinová)}. \end{aligned}$$

U takto formulovaných vět bývám na rozpacích: je sinová, resp. kosinová věta každá z uvedených rovností, nebo je touto větou pouze souhrn všech tří? Vynecháme-li jednu z těchto rovností, vyjadřují zbývající dvě také sinovou, resp. kosinovou větu? Je možné, aby v nějakém trojúhelníku platila jenom jedna z těchto rovností a zbývající dvě neplatily? Je nutno dokazovat všechny tři rovnosti, jak se obvykle děje, i když se jen řekne, že důkaz zbývajících dvou je podobný, nebo že se dostane cyklickou záměnou? Zdá se mi, že tyto pochybnosti by se daly rozptýlit, kdyby uvedené věty byly uváděny v následujícím znění:

Sinová věta: V každém trojúhelníku platí $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, kde a, b jsou velikosti jeho libovolných dvou stran a α, β velikosti protilehlých úhlů.

Kosinová věta: V každém trojúhelníku pro velikost c jeho libovolné strany platí $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, kde a, b jsou velikosti zbývajících stran a γ je velikost úhlu jimi sevřeného.

Domnívám se, že takto formulované vět vyjadřují poznatky o velikostech stran a vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku mnohem lépe a pochybnosti výše zmíněné nevzbuzují.

★ ★ ★

N

I. Newton

Proč padá jablko ze stromu,
už díky Newtonovi znám.
Jak se však dostalo nahoru,
marně se ptám.

E. Calda