Karel Mačák

Základy pojišťovnictví

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 4, 211–222

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151310`

ZÁKLADY POJIŠŤOVNICTVÍ

KAREL MAČÁK

1. Úvod

V současné době lze pozorovat trvalý růst zájmu o otázky finanční matematiky, což se projevuje i v náplni učebnic (viz např. informativní článek [1] o výuce těchto otázek na ZŠ nebo kap. 2.4 v gymnaziálních učebnicích [2, 3]). Propojením základních pojmů finanční matematiky s pojmy teorie pravděpodobnosti (které jsou vyloženy např. v gymnaziální učebnici [4]) lze snadno dospět k řešení některých jednoduchých úloh pojistné matematiky, o kterou je značný zájem mezi studenty VŠ různého zaměření, ale na SŠ není vyučována. Přitom sbírka maturitních úloh z konce minulého století [5] obsahuje úlohy z této oblasti a dokonce ještě v tabulkách [6] z r. 1953 byly obsaženy úmrtnostní tabulky, nezbytné k řešení takových úloh, což nasvědčuje tomu, že tato problematika byla v minulosti považována za součást všeobecného středoškolského vzdělání.

Cílem tohoto článku je stručně doplnit výklad obsažený v gymnaziálních učebnicích [2, 3, 4] tak, aby bylo ukázáno, jak lze řešit jednoduché úlohy pojistné matematiky ze sbírky maturitních úloh [5]. V souladu s touto sbírkou je výklad omezen na úlohy týkající se životního pojištění; potřebné tabulky v nutném rozsahu jsou uvedeny v příloze. Současné pojmy a značení byly převzaty z knih [7, 8].

2. Diskontování

Poznamenejme úvodem, že pod pojmem úrokování budeme v celém článku rozumět úrokování složené.

Označme i úrokovou míru, kterou nevyjádříme v procentech, ale jako číslo $i \in (0,1)$. Jak známo (viz např. [2, 3]), uložením dané částky c_0 na n úrokovacích období získáme částku

$$c_n = c_0\ (1+i)^n\ ; \tag{1}$$

výraz $q = 1 + i$ se nazývá *úrokovací faktor* nebo *úročitel.*

Položme si nyní otázku opačnou: jakou částku c_0 musíme uložit dnes, abychom za n úrokovacích období získali danou částku c_n ? Z (1) zřejmě

$$c_0 = \frac{c_n}{(1+i)^n} ;$$

tento výpočet se nazývá odúročení nebo diskontování částky c_n a zlomek

$$v = \frac{1}{1+i}$$

se nazývá *diskontní faktor* nebo *odúročitel.*

3. Úmrtnostní tabulky

Výpočty při životním pojištění vycházejí z tzv. *úmrtnostních tabulek*, které jsou vytvořeny na základě statistického sledování úmrtnosti obyvatel daného státu, případně klientů dané pojišťovny[1]. Základem těchto tabulek je konečná klesající celočíselná posloupnost

$$l_0 , l_1 , l_2 , \ldots , l_\omega , \tag{2}$$

kde l_x je počet osob ve věku x, které zůstaly naživu z počátečního souboru l_0 současně narozených jedinců. Obvykle se volí $l_0 = 100000$ a posloupnost (2) se sestrojuje zvlášť pro muže a zvlášť pro ženy, protože ve všech vyspělých zemích žijí ženy v průměru déle než muži. Symbolem ω je obecně označována poslední uvažovaná věková kategorie; v současných úmrtnostních tabulkách v [7, 8] je $\omega = 103$. V příloze je v tabulce uvedena (z knihy [8] převzatá) posloupnost hodnot l_x pro muže v ČR, zpracovaná na základě statistických údajů z r. 1992.

Úmrtnostní tabulky obsahují obvykle řadu dalších údajů vypočítaných z hodnot l_x; těmito údaji a jejich výpočty se zde nebudeme zabývat. Místo toho ukážeme několik jednoduchých příkladů uvádějících tuto problematiku do souvislosti s tzv. statistickým

[1]Vytváření takových tabulek náleží do oblasti demografie a nebudeme se jím zde zabývat; podrobnosti lze nalézt např. v knize [9].

(četnostním) pojetím pravděpodobnosti, při kterém je pravděpodobnost považována za rovnou (přibližně) relativní četnosti sledovaného jevu (viz [4], str. 85, kde je uveden podobně motivovaný příklad týkající se pravděpodobnosti narození chlapce, resp. děvčete).

Příklad 1. ([8], str. 145)
S jakou pravděpodobností se Kryštofův bohatý strýc, kterému je 65 let, a/ dožije 100 let, b/ nedožije 75 let, c/ dožije 75 let, ale zemře před svými 80. narozeninami.

Řešení.

a/ Z tabulky v příloze plyne, že z $l_{65} = 66975$ mužů, žijících ve věku 65 let, jich bude ve věku 100 let žít ještě $l_{100} = 21$. Hledaná pravděpodobnost tedy je rovna

$$P = \frac{l_{100}}{l_{65}} \doteq 0,00032\,.$$

b/ Z tabulky plyne, že z $l_{65} = 66975$ mužů, žijících ve věku 65 let, jich bude ve věku 75 let žít ještě $l_{75} = 38886$, takže ve věku mezi 65. a 75. lety jich zemře $l_{65} - l_{75} = 28089$. Hledaná pravděpodobnost tedy je rovna

$$P = \frac{l_{65} - l_{75}}{l_{65}} \doteq 0,419\,.$$

Jiný přístup k této úloze spočívá ve využití pravděpodobnosti opačného jevu ([4], str.79):

Pravděpodobnost, že se pětašedesátiletý muž nedožije 75 let =
= 1 - pravděpodobnost, že se pětašedesátiletý muž dožije 75 let =

$$= 1 - \frac{l_{75}}{l_{65}} \doteq 0,419\,.$$

c/ Daná otázka je ekvivalentní otázce, kolik z žijících pětašedesátiletých mužů zemře ve věku mezi 75 - 80 lety. Hledaná pravděpodobnost je tedy rovna

$$P = \frac{l_{75} - l_{80}}{l_{65}} \doteq 0,227\,.$$

4. Střední hodnota výhry

Tento pojem není v učebnici [4] zaveden, ale protože se nám v dalším výkladu bude hodit, krátce o něm pojednáme. Jedná se o pojem intuitivně zcela přirozený, jak je zřejmé z následujících příkladů:

a/ Jestliže při házení hrací kostkou při padnutí sudého počtu ok (tj. s pravděpodobností 0,5) vyhrávám 10 Kč a při padnutí lichého počtu ok (tj. s pravděpodobností 0,5) prohrávám 10 Kč, je střední hodnota mé výhry rovna 10 . 0,5 + (- 10) . 0,5 = 0.

b/ Mohu-li při nějaké hře vyhrát 10 Kč s pravděpodobností 0,3 a prohrát 5 Kč s pravděpodobností 0,7, pak střední hodnota mé výhry je rovna 10 . 0,3 + (- 5) . 0,7 = - 0,5; hra tedy není pro mne výhodná, ale je výhodná pro mého protihráče.

c/ Mohu-li při nějaké hře vyhrát 20 Kč s pravděpodobností 0,2 a prohrát 5 Kč s pravděpodobností 0,8, pak střední hodnota mé výhry je rovna 20 . 0,2 + (- 5) . 0,8 = 0; hra je tedy stejně výhodná (nebo nevýhodná) pro mě i mého protihráče a takovou hru intuitivně považujeme za spravedlivou.

Pojem spravdlivé hry lze formálně definovat tak, že hru považujeme za spravedlivou, jsou-li střední hodnoty výher všech hráčů stejné. Pokud se pojmu *střední hodnota* týče, pak pro diskrétní náhodnou veličinu ξ nabývající pouze konečně mnoha hodnot x_i s pravděpodobnostmi $p(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ je střední hodnota této náhodné veličiny (označovaná tradičně $E(\xi)$) definována vztahem

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, p(x_i)\,.$$

Složené úrokování a pojem spravedlivé hry představují východisko pro stanovení výše pojistného, tj. částky, kterou má pojištěnec (klient) zaplatit pojišťovně za to, že pojišťovna mu vyplatí sjednanou částku (pojistné plnění) v případě, že dojde k pojistné události.

5. Základní výpočet nettopojistného

Vysvětleme si celou problematiku na prvním maturitním příkladu ze sbírky [5]; příklad nejprve vyřešíme a potom okomentujeme.

Příklad M1. ([5], příklad 95 na str. 58)
Rodiče chtějí svému šestiletému dítěti zajistit vyplacení částky 2500 zlatých při dosažení věku 24 let. Jaké jednorázové pojistné musí zaplatit pojišťovně, která pracuje s úrokovou mírou 3 % ?

Řešešní.[2].
Při výpočtu se uplatní jednak vliv úrokování zaplacené částky, jednak vliv pravděpodobnosti toho, že se dítě dožije věku 24 let. Pokud se vlivu úrokování týče, je zřejmé, že částka, kterou rodiče musí zaplatit, vznikne odúročením částky 2500 zlatých (protože částka, kterou rodiče zaplatí nyní, bude v pojišťovně uložená 18 let a úročením se každoročně bude zvyšovat). Pravděpodobnostní část úvahy vychází z pojmu spravedlivé hry: aby byla výše pojistného spravedlivá, musí být jeho výše rovna střední hodnotě částky, kterou pojišťovna vyplatí. Pojišťovna ale vyplatí sjednanou částku 2500 zlatých pouze v případě, že se dítě dožije věku 24 let, tj. podle úmrtnostních tabulek s pravděpodobností

$$p = \frac{l_{24}}{l_6} ;$$

pokud se dítě tohoto věku nedožije, nevyplatí pojišťovna nic a celá částka jí zůstane. Shrneme-li obě části této úvahy do jednoho vzorce, zjistíme, že částka, kterou rodiče musí zaplatit pojišťovně, je rovna

$$c = 2500 \,.\, \left(\frac{1}{1+i}\right)^{24-6} \cdot \left(\frac{l_{24}}{l_6}\right) = 2500 \,.\, \frac{1}{1{,}03^{18}} \cdot \frac{97566}{98723} \doteq$$

$$\doteq 1451{,}28 \text{ zlatých.}$$

[2]Ve sbírce [5] je ještě jedna analogická úloha, kdy rodiče chtějí zajistit šestiletému dítěti vyplacení částky 3600 zlatých při dosažení věku 20 let a pojišťovna pracuje s úrokovou mírou 3,5 % ; stejným postupem jako v řešeném příkladu se zjistí, že jednorázové pojistné činí 2209,21 zlatých.

Okomentujme nyní vyřešenou úlohu.

Z hlediska úhrady pojistného se jedná o tzv. *jednorázové pojistné*, které se platí celé najednou při uzavření pojištění; jiný způsob úhrady představuje tzv. *běžné pojistné*, které se platí opakovaně vždy na začátku dohodnutého období ve splátkách, které jsou obvykle stejně veliké.

Z hlediska způsobu výplaty se jedná o tzv. *kapitálové pojištění*, kdy je celé pojistné plnění vyplaceno jednorázově; jiný způsob výplaty představuje tzv. *důchodové pojištění*, kdy pojišťovna vyplácí pojistné plnění formou opakovaných plateb *důchodu*, který může být časově omezený nebo doživotní.

Je-li výše pojistného stanovena tak, jak jsme ukázali v příkladu, tj. tak, aby bylo rovno střední hodnotě pojistného plnění, mluvíme o tzv. *nettopojistném*. Nettopojistné představuje (při dané úrokové míře) dolní hranici výše pojistného; pokud by pojišťovna stanovila pojistné nižší, změnila by se z peněžního ústavu na dobročinnou instituci, která vyplácí více, než vydělá. Ve skutečnosti pojišťovna musí vybírat pojistné vyšší než je nettopojistné, protože z vybrané částky musí hradit provozní náklady, vytvářet rezervy pro krytí výkyvů v hrazení pojistných událostí a (na neposledním místě) musí také vytvářet zisk. Rozšířením nettopojistného o uvedené složky vznikne tzv. *bruttopojistné*, které pojišťovna skutečně vybírá, jeho stanovením se zde ale nebudeme zabývat, protože se jedná o záležitost spíše obchodní než matematickou; v celém tomto článku budeme pod pojmem pojistné rozumět nettopojistné.

Poslední otázkou, kterou je třeba okomentovat, je otázka použité úrokové míry. Výše této úrokové míry je v některých zemích stanovena zákonnou normou; pokud taková norma neexistuje, je stanovení úrokové míry součástí obchodní strategie pojišťovny[3]. Některé konkrétní údaje lze nalézt v [7] (str.22 a násl.); protože v obou použitých současných pramenech [7, 8] jsou všechny úlohy z oblasti životního pojištění řešeny s úrokovou mírou 4 % , budeme ji používat i my ve zbývající části tohoto článku[4].

---

[3]Příliš nízká úroková míra zvyšuje pojistné, takže pojišťovna neobstojí v konkurenci, příliš vysoká úroková míra vede k malým rezervám vytvářeným z vybraného pojistného, což může způsobit platební problémy pojišťovny.

[4]V tomto směru změníme zadání všech dalších maturitních úloh přebíra-

6. Komutační čísla

Problematiku opět ujasníme na maturitním příkladu ze sbírky [5].

Příklad M2. ([5],příklad 97 na str. 58.)
Rodiče chtějí svému čtyřletému dítěti zajistit vyplacení částky 5000 zlatých při dosažení věku 20 let. Jaké běžné pojistné musí každoročně zaplatit, pracuje-li pojišťovna s úrokovou mírou 4 % ?

Řešení
Aby byla výše pojistného spravedlivá, musí být střední hodnota částky vyplacené pojišťovnou rovna střední hodnotě částky vložené postupně rodiči. Střední hodnota vyplacené částky bude rovna

$$5000 \cdot \frac{l_{20}}{l_4}\,; \tag{3}$$

pokud se střední hodnoty vložené částky týče, její výše bude určena jednak postupným úrokováním vložených částek, jednak pravděpodobností toho, zda pojistné bude zaplaceno (zemře-li dítě před dosažením věku 20 let, přestanou rodiče (pochopitelně) pojistné platit). Označíme-li symbolem x výši běžného ročního pojistného a symbolem $q = 1 + i$ tzv. *úročitel*, dostaneme pro střední hodnotu vložené částky výraz

$$x \cdot q^{20-4} \cdot \frac{l_4}{l_4} + x \cdot q^{20-5} \cdot \frac{l_5}{l_4} + x \cdot q^{20-6} \cdot \frac{l_6}{l_4} + \\ + \ldots + x \cdot q^{20-19} \cdot \frac{l_{19}}{l_4}\,. \tag{4}$$

Z rovnosti střední hodnoty vyplacené částky (3) a střední hodnoty vložené částky (4) získáme pro neznámou x rovnici

$$5000 \cdot l_{20} = x(q^{16}l_4 + q^{15}l_5 + \ldots + ql_{19})\,. \tag{5}$$

Řešení rovnice (5) je sice možné, ale bylo by pracné; proto se provádějí některé úpravy, které umožní využít tabelovaných

ných ze sbírky [5], ve které se pracuje s úrokovou mírou 5 % .

hodnot tzv. *komutačních čísel* D_x a N_x. Vydělíme rovnici (5) číslem q^{20} a dostaneme

$$5000 \cdot \frac{l_{20}}{q^{20}} = x\left(\frac{l_4}{q^4} + \frac{l_5}{q^5} + \ldots + \frac{l_{19}}{q^{19}}\right). \qquad (6)$$

Hodnoty

$$\frac{l_x}{q^x} = D_x$$

závisí pochopitelně na použité úrokové míře; pro úrokovou míru 4 % jsou hodnoty D_x uvedeny v tabulce v příloze. Aby byl výpočet ještě snadnější, tabelují se i hodnoty

$$N_x = \sum_{i=x}^{\omega} D_i$$

(jsou rovněž uvedeny v tabulce v příloze). Pak lze z rovnice (6) vyjádřit x jako

$$x = \frac{5000 \cdot D_{20}}{N_4 - N_{20}},$$

z čehož po dosazení dostaneme $x = 219{,}14$ zlatých.

7. Další dvě maturitní úlohy

Příklad M3 ([5], příklad 98 na str.60)

Kdosi odkázal celý svůj majetek pozůstalým za podmínky, že budou jeho věrnému sluhovi[5] vyplácet na konci každého roku doživotní rentu 175 zlatých. Kolik musí pozůstalí jednorázově zaplatit sluhovi, chtějí-li se tohoto závazku zbavit, sluhovi je 60 let a pojišťovna pracuje s úrokovou mírou 4 % ?

[5]Pojem *věrný sluha* zní dnes poněkud archaicky; snad by bylo možné modernizovat úlohu tím, že by se mluvilo o *věrném bodyguardovi*.

Řešení.

Aby řešení bylo spravedlivé, musí pozůstalí zaplatit sluhovi střední hodnotu částky, která by mu byla postupně vyplácena, diskontovanou ke dnešnímu dni. Tato diskontovaná střední hodnota je rovna

$$175.\frac{l_{61}}{l_{60}}.\frac{1}{q}+175.\frac{l_{62}}{l_{60}}.\frac{1}{q^2}+....+175.\frac{l_\omega}{l_{60}}.\frac{1}{q^{\omega-60}}=$$

$$175.\frac{q^{60}}{l_{60}}.\left(\frac{l_{61}}{q^{61}}+\frac{l_{62}}{q^{62}}+...+\frac{l_\omega}{q^\omega}\right)=175.\frac{N_{61}}{D_{60}},$$

což činí po dosazení 1787,86 zlatých.

Příklad M4 ([5], příklad 100 na str. 60)

Padesátiletý muž si chce zajistit doživotní rentu uložením kapitálu 3000 zlatých u pojišťovny pracující s úrokovou mírou 4 %. Jak vysoká bude tato renta, začne-li se s jejím vyplácením za rok?

Řešení.[6]

Označíme-li vyplácenou rentu symbolem x, pak střední hodnota vyplacené částky diskontovaná ke dnešnímu dni musí být rovna vloženému kapitálu, aby celá transakce byla spravedlivá. Střední hodnota vyplacené částky diskonotovaná ke dnešního dni je rovna

$$x.\frac{l_{51}}{l_{50}}.\frac{1}{q}+x.\frac{l_{52}}{l_{50}}.\frac{1}{q^2}+...x.\frac{l_\omega}{l_{50}}.\frac{1}{q^{\omega-50}}=$$

$$=x.\frac{q^{50}}{l_{50}}.\left(\frac{l_{51}}{q^{51}}+\frac{l_{52}}{q^{52}}+...+\frac{l_\omega}{q^\omega}\right)=x.\frac{N_{51}}{D_{50}};$$

tato částka se musí rovnat vloženému kapitálu 3000 zlatých, z čehož plyne $x = 221{,}19$ zlatých.

[6] Ve sbírce [5] je ještě jedna analogická úloha, ve které si osmatřicetiletý muž chce zajistit roční rentu 1000 zlatých, která mu začne být vyplácena ihned. Analogická úvaha jako v řešeném příkladu vede k závěru, že muž musí vložit kapitál $1000.\frac{N_{38}}{D_{38}} = 1787{,}86$ zlatých.

8. Závěrečné poznámky

Poznámka historická

Z historického hlediska je zajímavé porovnat posloupnost (2) z dnešních úmrtnostních tabulek s touž posloupností z úmrtnostních tabulek uvedených ve sbírce [5][7]. Z posloupnosti (2) ve sbírce [5] plyne, že v Rakousko-Uhersku ve druhé polovině minulého století zemřelo 25 % narozených dětí během prvního roku života a pouze 50 % narozených dětí se dožilo maturitního věku 18 let. Pouze čtvrtina narozených se dožila věku 55 let; tabulka končila věkem $\omega = 95$ let. Zdá se tedy, že život v Rakousko-Uhersku nebyl takovou idylou, jak se to jeví v některých dnešních filmech z oné doby.

Poznámka metodická

Tabulka v příloze tohoto článku představuje velice zjednodušenou verzi tabulek z knih [7, 8], pro řešení předložených úloh ale plně postačuje. Vytvoření kompletních úmrtnostních tabulek nebo tabulek různých komutačních čísel pro různé úrokové míry představuje úlohu (při dané posloupnosti (2)) poměrně jednoduše řešitelnou na počítači[8], čehož by mohlo být využito k propojení vyložené problematiky s výukou programování. Ukázky kompletních tabulek a vzorce potřebné k jejich výpočtu jsou uvedeny v [7, 8] a nepovažujeme proto za nutné uvádět je v tomto informativním článku.

Poznámka závěrečná

Autorovi tohoto příspěvku je jasné, že osnovy jsou nabité a že každý učitel (každá učitelka) má dost starostí s tím, aby všichni žáci (studenti) uměli aspoň přibližně to, co je v osnovách. Přesto optimisticky doufá, že se snad aspoň někomu bude tento článek hodit jako námět k jistému doplnění výuky, které by se snad dalo poměrně snadno realizovat na základě současných učebnic a které by snad i mohlo být pro někoho zajímavé.

---

[7] U těchto tabulek není uvedeno, zda se jedná o muže či ženy.

[8] Tabulka v příloze vznikla tak, že posloupnost (2) byla převzata z knihy [8] a z ní byla komutační čísla D_x a N_x vypočítána tabulkovým procesorem MS Excel 5.0.

PŘÍLOHA — KOMUTAČNÍ ČÍSLA

x	l_x	D_x	N_x
0	100 000	100 000,00	2 209 103,93
1	98 921	95 116,35	2 109 103,93
2	98 864	91 405,33	2 013 987,58
3	98 818	87 848,84	1 922 582,26
4	98 787	84 443,54	1 834 733,41
5	98 755	81 169,41	1 750 289,87
6	98 723	78 022,22	1 669 120,46
7	98 694	74 999,33	1 591 098,24
8	98 667	72 095,01	1 516 098,91
9	98 642	69 304,56	1 444 003,90
10	98 618	66 622,79	1 374 699,34
11	98 594	64 044,78	1 308 076,55
12	98 568	61 565,28	1 244 031,77
13	98 541	59 181,17	1 182 466,49
14	98 510	56 887,07	1 123 285,32
15	98 473	54 678,56	1 066 398,25
16	98 424	52 549,38	1 011 719,69
17	98 359	50 494,88	959 170,31
18	98 276	48 511,80	908 675,43
19	98 178	46 599,44	860 163,63
20	98 066	44 756,04	813 564,19
21	97 945	42 981,56	768 808,15
22	97 818	41 274,83	725 826,59
23	97 691	39 635,81	684 551,76
24	97 566	38 062,59	644 915,95
25	97 447	36 554,01	606 853,35
26	97 330	35 105,88	570 299,35
27	97 214	33 715,43	535 193,46
28	97 095	32 379,00	501 478,04
29	96 972	31 094,21	469 099,04
30	96 842	29 858,20	438 004,83
31	96 702	28 668,30	408 146,64
32	96 552	27 522,91	379 478,34
33	96 390	26 419,94	351 955,42
34	96 214	25 357,40	325 535,49
35	96 022	24 333,46	300 178,08
36	95 816	23 347,36	275 844,62
37	95 596	22 397,84	252 497,26
38	95 359	21 482,99	230 099,42
39	95 100	20 600,62	208 616,43
40	94 813	19 748,51	188 015,81
41	94 492	18 924,66	168 267,30
42	94 132	18 127,46	149 342,64
43	93 730	17 355,82	131 215,17
44	93 284	16 608,88	113 859,36
45	92 793	15 886,01	97 250,48
46	92 251	15 185,79	81 364,47
47	91 657	14 507,70	66 178,68
48	91 009	13 851,09	51 670,97
49	90 306	13 215,48	37 819,88
50	89 547	12 600,39	24 604,40
51	88 721	12 004,00	12 004,00
52	87 819	11 424,96	158 879,22
53	86 830	10 861,83	147 454,26
54	85 752	10 314,40	136 592,43
55	84 589	9 783,18	126 278,03
56	83 340	9 268,01	116 494,85
57	81 995	8 767,73	107 226,84
58	80 542	8 281,11	98 459,11
59	78 967	7 806,90	90 178,00
60	77 267	7 345,03	82 371,10
61	75 445	6 895,99	75 026,06
62	73 506	6 460,35	68 130,07
63	71 449	6 038,04	61 669,73
64	69 274	5 629,07	55 631,69
65	66 975	5 232,94	50 002,62
66	64 549	4 849,41	44 769,68
67	61 994	4 478,33	39 920,27
68	59 322	4 120,49	35 441,94
69	56 544	3 776,47	31 321,45
70	53 675	3 446,98	27 544,98
71	50 736	3 132,92	24 098,00
72	47 767	2 836,14	20 965,09
73	44 806	2 558,01	18 128,95
74	41 854	2 297,58	15 570,94
75	38 886	2 052,55	13 273,36
76	35 867	1 820,38	11 220,81
77	32 797	1 600,54	9 400,44
78	29 712	1 394,22	7 799,90
79	26 664	1 203,07	6 405,68
80	23 698	1 028,12	5 202,60
81	20 851	869,81	4 174,48
82	18 104	726,17	3 304,67
83	15 511	598,24	2 578,49
84	13 097	485,70	1 980,26
85	10 882	388,04	1 494,55
86	8 884	304,61	1 106,52
87	7 113	234,51	801,91
88	5 576	176,76	567,40
89	4 270	130,15	390,64
90	3 186	93,38	260,49
91	2 312	65,16	167,11
92	1 626	44,06	101,95
93	1 105	28,79	57,89
94	724	18,14	29,10
95	455	10,96	10,96
96	273	6,32	17,28
97	156	3,47	20,76
98	85	1,82	22,58
99	43	0,89	23,46
100	21	0,42	23,88
101	9	0,17	24,05
102	4	0,07	24,13
103	1	0,02	24,14

LITERATURA:

[1] Lišková, H., *Finanční matematika na ZŠ*, Učitel matematiky **5** (1996/97), 151–156.

[2] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady*, Prometheus, Praha, 1995.

[3] Odvárko, O., *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia. Posloupnosti a řady*, Prometheus, Praha, 1997.

[4] Calda, E., Dupač, V., *Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, Prometheus, Praha, 1994.

[5] Wallentin, F., *Maturitätsfragen aus der Mathematik zum Gebrauche für die obersten Classen der Gymnasien und Realschulen*, Carl Gerold's Sohn, Wien, 1888.

[6] Valouch, M., Valouch, M.A., *Pětimístné tabulky logaritmické*, NČSAV, Praha, 1953.

[7] Cipra, T., *Pojistná matematika v praxi*, HZ, Praha, 1994.

[8] Macháček, O., *Finanční a pojistná matematika*, Prospektrum, Praha, 1996.

[9] Cipra, T., *Matematické metody demografie a pojištění*, SNTL, Praha, 1990.