Učitel matematiky

Bohdan Zelinka

Sestrojujeme kuželosečky bez kružítka

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 4, 203–210

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151309`

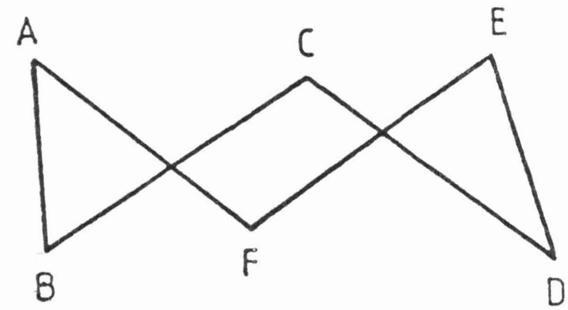
SESTROJUJEME KUŽELOSEČKY BEZ KRUŽÍTKA

Bohdan Zelinka

Známe řadu konstrukcí kuželoseček, pokud jsou dány údaji o nich, například některými osami, vrcholy či ohnisky. Nakonec při nich docházíme k tomu, že máme v případě elipsy či hyperboly sestrojena obě ohniska, v případě paraboly ohnisko a řídící přímku, a dáváme se do sestrojování kuželosečky bod po bodu, přičemž pilně užíváme kružítka. Když těch bodů máme dostatečně mnoho, spojujeme je od ruky nebo podle křivítka. Čím jich máme více, tím to můžeme provést přesněji a teoreticky můžeme získat libovolný konečný počet bodů.

Tohle ovšem každý zná a ví, že to jinak nejde, pokud nemáme zrovna nějaký speciální přístroj jako třeba elipsograf. Je však možné dělat to pouhým pravítkem a bez starostí o takové věci jako osy, vrcholy či ohniska, ba i bez starostí o to, zda jde o elipsu, o parabolu či o hyperbolu. (Můžeme být napnuti, co nám to vlastně vyjde.) Umožní nám to Pascalova věta a k ní duální Brianchonova věta.

Než tyto věty vyslovíme, ujasníme si základní pojmy. Jde o věty rovinné projektivní geometrie, to jest geometrie, která nejenže se zabývá rovinou rozšířenou o nevlastní body a nevlastní přímku, ale nečiní rozdílu mezi nimi a ostatními body a přímkami roviny. Takže pojem šestiúhelníku (a vůbec jakéhokoliv mnohoúhelníku) v projektivní geometrii bude poněkud odlišný od toho, na co jsme zvyklí. Nepůjde vůbec o obrazec, který by měl nějaké vnitřní body, ba nepůjde ani o uzavřenou lomenou čáru. Lomená čára se totiž skládá z úseček a úsečka je pojem, který se v projektivní geometrii nedá dost dobře zavést. Takže šestiúhelník $ABCDEF$ je prostě útvar v projektivní rovině, který se skládá ze šesti bodů A, B, C, D, E, F, z nichž žádné tři neleží v přímce, a z přímek AB, BC, CD, DE, EF, FA. Takový šestiúhelník může klidně vypadat tak, jak vidíme na obr. 1, ba některý vrchol může být nevlastní i některá strana může být nevlastní přímkou. Řekneme, že šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsán dané kuželosečce, jestliže všechny jeho vrcholy A, B, C, D, E, F na té kuželosečce leží. Řekneme, že je jí opsán, jestliže všechny jeho strany jsou jejími tečnami. Kuželosečkou budeme vždy rozumět kuželosečkou regulární, to jest elipsu, parabolu nebo hyperbolu, nikoli dvojici přímek.



Obr. 1

A nyní můžeme vyslovit Pascalovu větu.

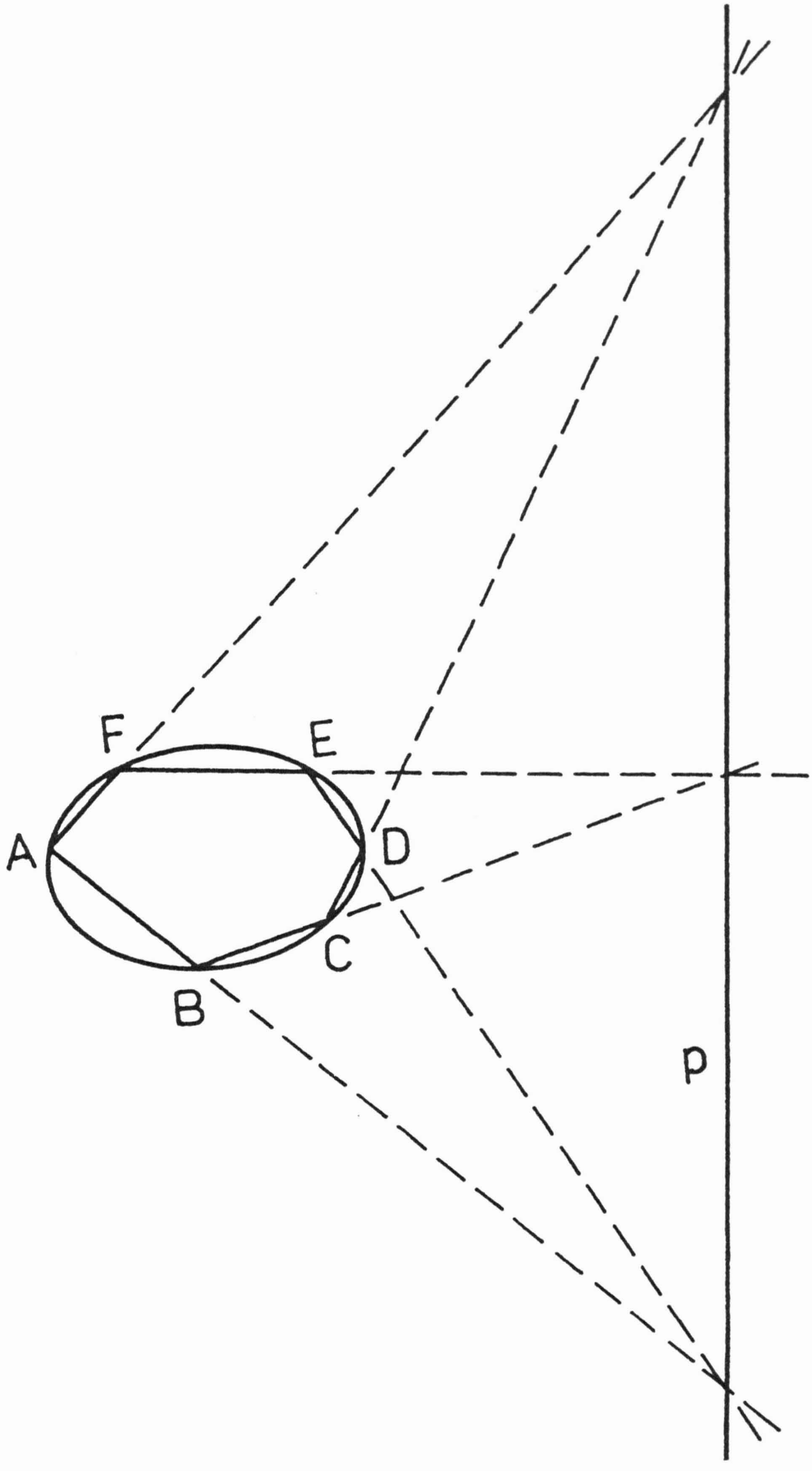
Věta 1 (Pascalova věta). *Šestiúhelník je vepsán některé kuželosečce právě tehdy, jestliže průsečíky všech tří dvojic jeho protilehlých stran leží v přímce (obr. 2).*

Tuto větu, stejně jako později větu Brianchonovu, ponecháme bez důkazu; čtenář jej může najít například v [1].

Je-li šestiúhelník označen $ABCDEF$, jde o průsečíky $AB \times DE$, $BC \times EF$, $CD \times FA$. Přímka, na které tyto průsečíky leží, se nazývá Pascalova přímka a budeme ji značit p.

Jak víme, libovolnými pěti body v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce, prochází právě jedna kuželosečka. Šesti takovými body tedy prochází nejvýše jedna kuželosečka.

Pascalova věta nám umožňuje sestrojovat kuželosečku bod po bodu, pokud je dáno pět jejich bodů A, B, C, D, E. Bodem E veďme libovolnou přímku f, která neprochází žádným z bodů A, B, C, D. Pokud f není náhodou tečnou kuželosečky v bodě E, měla by protínat kuželosečku v dalším bodě F, a ten budeme sestrojovat. Vyjdeme z Pascalovy věty pro šestiúhelník $ABCDEF$. Najdeme průsečík $AB \times DE$; to je jeden bod Pascalovy přímky p. Naše zvolená přímka f je přímka EF, tedy najdeme i průsečík $BC \times EF$. Zmíněné dva průsečíky určují Pascalovu přímku p. Najdeme nyní průsečík $CD \times p$; tím by měla procházet i přímka FA.



Obr. 2

Spojíme tedy tento průsečík s bodem A; průsečík této spojnice s přímkou f je hledaný bod F. Přímek f procházejících bodem F si můžeme zvolit libovolně mnoho a tak získat libovolně mnoho bodů kuželosečky.

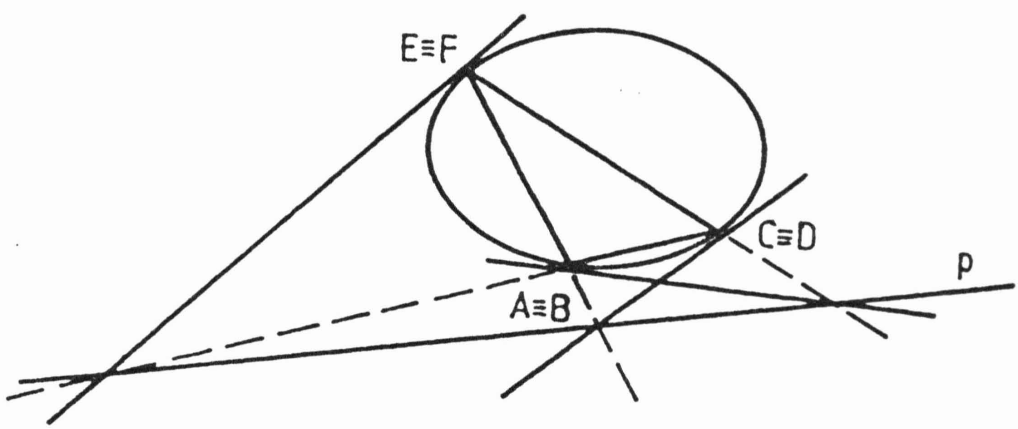
Může se stát, že nám vyjde $F \equiv E$; znamená to, že zvolená přímka f je tečnou kuželosečky v bodě E. Je to totiž tak, že Pascalova věta platí i pro určité degenerované "šestiúhelníky". Mějme pětiúhelník $BCDEF$. Bod B označme ještě písmenem A, takže máme $A \equiv B$. Vezměme přímku a procházející bodem A a neprocházející žádným z bodů C, D, E, F. Zmíněný pětiúhelník s touto novou přímkou můžeme brát jako "šestiúhelník" $ABCDEF$, přičemž za stranu AB považujeme přímku a. Ovšem abychom takovýto "šestiúhelník" považovali za vepsaný kuželosečce, nestačí, aby vrcholy B, C, D, E, F byly jejími body, ale navíc "strana" AB musí být její tečnou. A pro takový "šestiúhelník" rovněž platí Pascalova věta.

Máme-li tedy dány čtyři body B, C, D, E, z nichž žádné tři neleží v přímce, a přímku a procházející bodem B a neprocházející žádným z bodů C, D, E, existuje - jak víme - právě jedna kuželosečka obsahující body B, C, D, E a mající přímku a jako tečnu. A použitím popsaného "šestiúhelníku" ji můžeme sestrojovat bod po bodu stejně jako v předešlém případě. Zde tedy je kuželosečka určena čtyřmi body a tečnou v jednom z nich.

Degenerace může pokračovat. Také může být "šestiúhelníkem" čtyřúhelník se dvěma "spojnicemi splývajících vrcholů". I pro něj Pascalova věta platí a umožňuje nám tak sestrojovat kuželosečku určenou třemi body a tečnami ve dvou z nich. Konečně může být "šestiúhelníkem" i trojúhelník; tam ovšem každý vrchol musí být brán jako dvojice splývajících vrcholů. Znění Pascalovy věty pro tento případ stojí za to, aby bylo zvlášť uvedeno.

Důsledek 1. *Je-li trojúhelník vepsán do kuželosečky, pak všechny tři průsečíky strany trojúhelníku s tečnou kuželosečky ve vrcholu trojúhelníku té straně protilehlém leží v přímce (obr. 3).*

Vraťme se opět k původnímu šestiúhelníku. Pascalova věta nám také umožní sestrojit tečnu v daném bodě kuželosečky. Mějme opět kuželosečku dánu pěti body A, B, C, D, E a sestrojujme k ní tečnu v bodě E. Můžeme pro bod E zavést další značení F, takže $E \equiv F$ a hledaná tečna je "spojnice" splývajících vrcholů E a F v "šestiúhelníku" $ABCDEF$ vepsaném do kuželosečky. Pro něj sestrojíme Pascalovu přímku p; tu nám určují průsečíky $AB \times DE$ a $CD \times FA$. Nyní průsečíkem $p \times BC$ musí procházet i "spojnice" EF, to jest hledaná tečna.



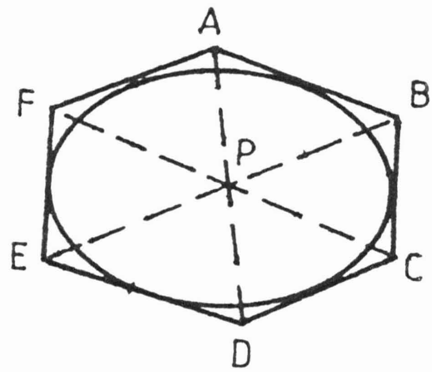
Obr. 3

A víme-li, že v projektivní geometrii platí princip duality, očekáváme jistě, že k Pascalově větě bude existovat nějaká věta duální. A ona existuje a nazývá se Brianchonova.

Věta 2 (Brianchonova věta). *Šestiúhelník je opsán některé kuželosečce právě tehdy, jestliže spojnice všech tří dvojic jeho protilehlých vrcholů procházejí jedním bodem.*

Jde-li o šestiúhelník $ABCDEF$, pak tyto spojnice jsou přímky AD, BE, CF (obr. 4). Bod, v němž se tyto přímky protínají, se nazývá Brianchonův bod; budeme jej označovat P.

Brianchonova věta nám umožňuje sestrojit libovolný konečný počet tečen kuželosečky, která je dána pěti tečnami. Nechť tyto tečny jsou a, b, c, d, e. Na přímce e zvolíme bod F a budeme hledat tečnu f kuželosečky, která prochází tímto bodem. Přímky a, b, c, d, e spolu s touto přímkou f budou tvořit šestiúhelník opsaný kuželosečce. Budeme hledat jeho Brianchonův bod. Snadno sestrojíme spojnici průsečíků $a \times b$, $d \times e$, která jím prochází. Dále vezmeme spojnici průsečíků $b \times c$, $e \times f$; přímku f sice ještě nemáme, ale víme, že $e \times f \equiv F$. Průsečík uvedených spojnic je Brianchonův bod P. Spojíme jej s průsečíkem $c \times d$; průsečík získané spojnice s přímkou a je průsečík $f \times a$, a tudíž jeho spojnice s E je hledaná tečna f. Bodů F na přímce e si můžeme volit libovolně mnoho a tak získat libovolně mnoho tečen kuželosečky.

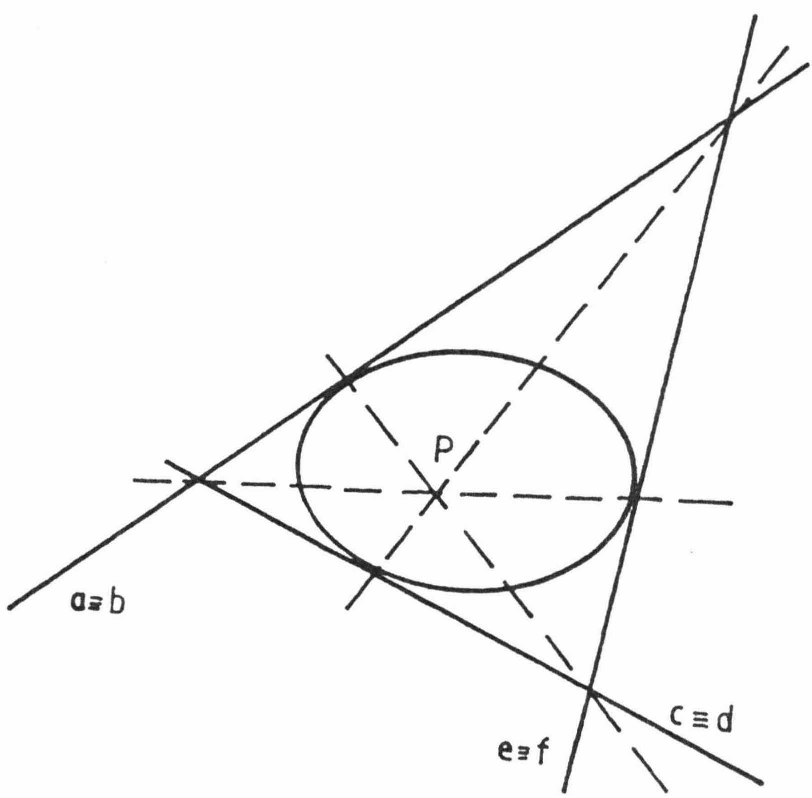


Obr. 4

Pokud nám vyjde $f \equiv e$, znamená to, že bod F je bodem dotyku tečny e. Zase můžeme mít degenerované "šestiúhelníky". Vezměme pětiúhelník složený z přímek b, c, d, e, f a z průsečíků $b \times c$, $c \times d$, $d \times e$, $e \times b$. Zaveďme pro přímku b ještě nové označení a, takže $a \equiv b$. Na této přímce zvolme bod A, který neleží na žádné z přímek c, d, e, f; ten budeme brát jako "průsečík splývajících stran" a, b. Takový šestiúhelník pokládáme za opsaný kuželosečce, pokud přímky b, c, d, e, f jsou jejími tečnami a A je bod dotyku tečny $a \equiv b$. Zase zde platí Brianchonova věta. A obdobně existují i "šestiúhelníky", které jsou vlastně čtyřúhelníky či trojúhelníky. To nám umožňuje sestrojovat tečny ke kuželosečce v případech, kdy je dána čtyřmi tečnami a bodem dotyku na jedné z nich či třemi tečnami a bodem dotyku na dvou z nich. A opět stojí za uvedení znění Brianchonovy věty pro trojúhelník.

Důsledek 2. *Je-li trojúhelník opsán kuželosečce, pak všechny tři spojnice vrcholu trojúhelníku s bodem dotyku strany k němu protilehlé s kuželosečkou procházejí jedním bodem (obr. 5).*

A jestliže se opět vrátíme k původnímu šestiúhelníku, můžeme si popsat, jak určíme na dané tečně bod dotyku. Nechť je kuželosečka opět dána tečnami a, b, c, d, e a hledejme bod dotyku tečny e. Můžeme pro tečnu e zavést další označení f, takže $e \equiv f$ a hledaný bod je "průsečík splývajících přímek" e a f v "šestiúhelníku" tvořeném přímkami a, b, c, d, e, f a opsaném kuželosečce. Pro něj sestrojíme Brianchonův bod P; ten dostaneme jako průsečík spojnice bodů $a \times b$, $d \times e$ a spojnice bodů $c \times d$, $f \times a$. Na spojnici bodů P a $b \times c$ musí ležet i "průsečík $e \times f$", což je hledaný bod dotyku.



Obr. 5

Vraťme se k sestrojování tečen. Jak jsme uvedli, můžeme si sestrojit libovolný (ovšem konečný) počet tečen. Prakticky to znamená, že se nám část papíru pokryje černí a část zůstane bílá; ta bílá část je vnitřek kuželosečky. To by se nám asi příliš nelíbilo. Proto pokud máme kuželosečku dánu pěti tečnami, je lépe si na nich podle Brianchonovy věty najít body dotyku a potom pokračovat sestrojováním bodů podle Pascalovy věty.

A vidíte, že jste opravdu mohli stále nechat kružítko v jeho pouzdře. V podstatě zde totiž šlo o konstrukci jednoho průsečíku přímky s kuželosečkou, známe-li druhý, a jedné tečny z bodu ke kuželosečce, známe-li druhou. To jsou úlohy lineární; při jejich početním řešení bychom nemuseli řešit kvadratické rovnice. Pokud bychom ten druhý průsečík či druhou tečnu neznali, šlo by o úlohu kvadratickou; při početním řešení bychom museli řešit kvadratickou rovnici, při grafickém řešení použít kružítka. Souvisí to s tím, že pokud známe jeden kořen kvadratické rovnice, můžeme vypočíst druhý z lineární rovnice. Jde-li o kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0$ při $a \neq 0$ a známe-li jeden kořen x_1, pak použijeme známého vztahu $a(x_1+x_2) = -b$ a to je při známých hodnotách a, b, x_1 lineární rovnice pro neznámou x_2.

LITERATURA:

[1] Havlíček, K., *Projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL, Praha, 1956.