František Kuřina

Matematika v obrazech (4)

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 4, 193–202

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151306`

MATEMATIKA V OBRAZECH (4)

Obsahy a objemy

František Kuřina

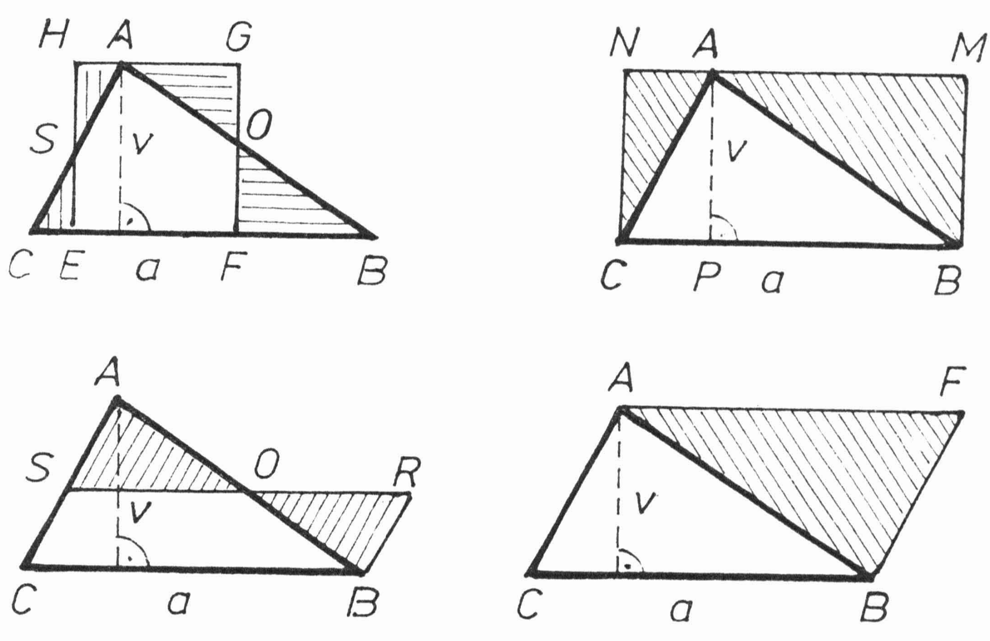
Neexistuje žádné vidění bez myšlení. Nestačí však jen myslet, abychom viděli: vidění je podmíněné myšlení

M. Merleay — Ponty

Ve školní praxi se velmi často setkáváme s názornými odvozeními vzorců pro obsahy geometrických útvarů, z nichž některá připomeneme obrázkem 1. Předpokládáme, že je znám vzorec pro obsah rovnoběžníku a obdélníku, odvozujeme vzorec

$$S = \frac{1}{2} a \cdot v_a$$

pro obsah trojúhelníku se stranou a a výškou v_a.



Obr. 1 a) – d)

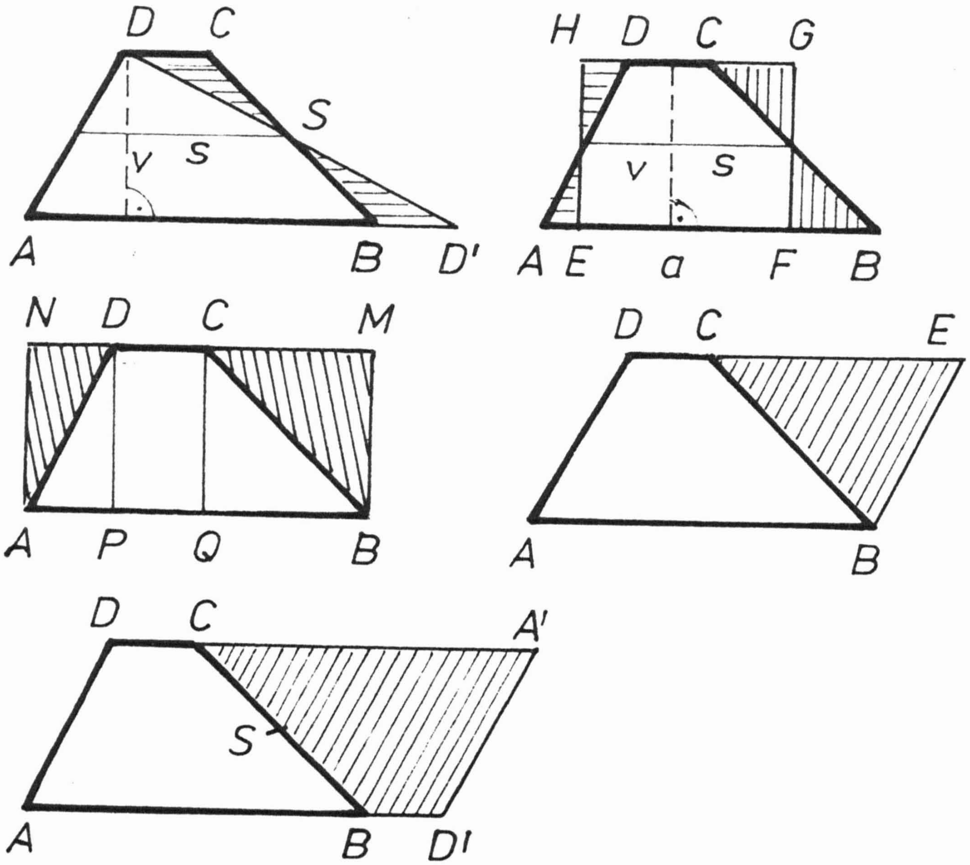
Na obr. 1a, b jsou znázorněny postupy, které nelze provést pro libovolný trojúhelník. V prvním příkladu musí být paty kolmic

E, F sestrojených středy S, O stran AC, AB body strany CB, postup znázorněný na obrázku 1b lze beze změny aplikovat jen v případě, že pata P výšky v_a je bodem strany BC trojúhelníku ABC.

Podobná odvození jsou známa pro odvození vzorce pro obsah lichoběžníku podle obr. 2. Opět předpokládáme znalost vzorce pro obsah rovnoběžníku a odvozujeme v označení podle obr. 2a vzorec

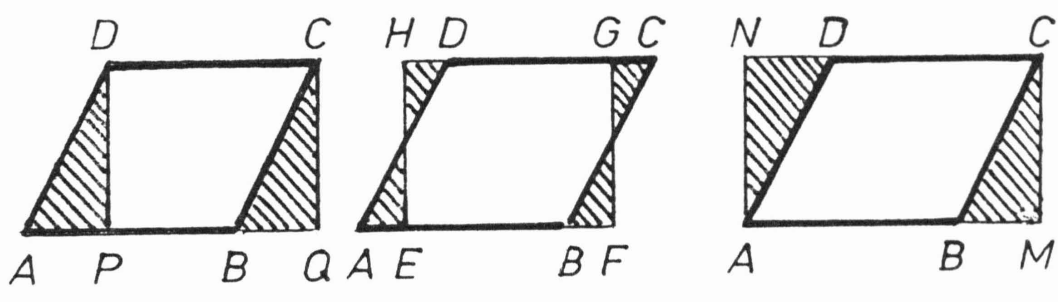
$$S = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v = s \cdot v.$$

Obr. 2b, c jsou opět vázány pouze na případy, kdy paty E, F, resp. P, Q jsou body delší základny AB lichoběžníku $ABCD$.



Obr. 2 a) – e)

Pro odvození obsahu rovnoběžníku můžeme pochopitelně uvést podobnou řadu obrázků (obr. 3). Přitom předpokládáme, že je znám vzorec pro obsah obdélníku.

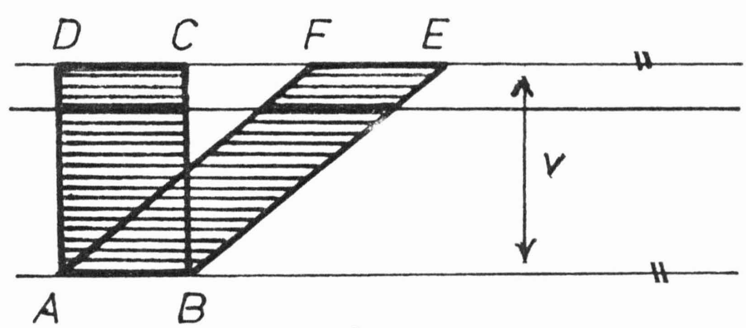


Obr. 3 a) – c)

Na obr. 4 je zachycena Eukleidova myšlenka, že rovnoběžníky, které se shodují v základně a k ní příslušné výšce, mají sobě rovné obsahy. Lichoběžník $ABED$ si totiž můžeme představit dvojím způsobem jako sjednocení rovnoběžníku a trojúhelníku:

$$ABED = ABCD \cup \triangle BEC,$$

$$ABED = ABEF \cup \triangle AFD.$$



Obr. 4

Protože trojúhelník BEC je obrazem trojúhelníku AFD v posunutí, které převádí bod A do bodu B, jsou tyto trojúhelníky shodné a rovnoběžníky $ABCD$, $ABEF$ mají sobě rovné obsahy.

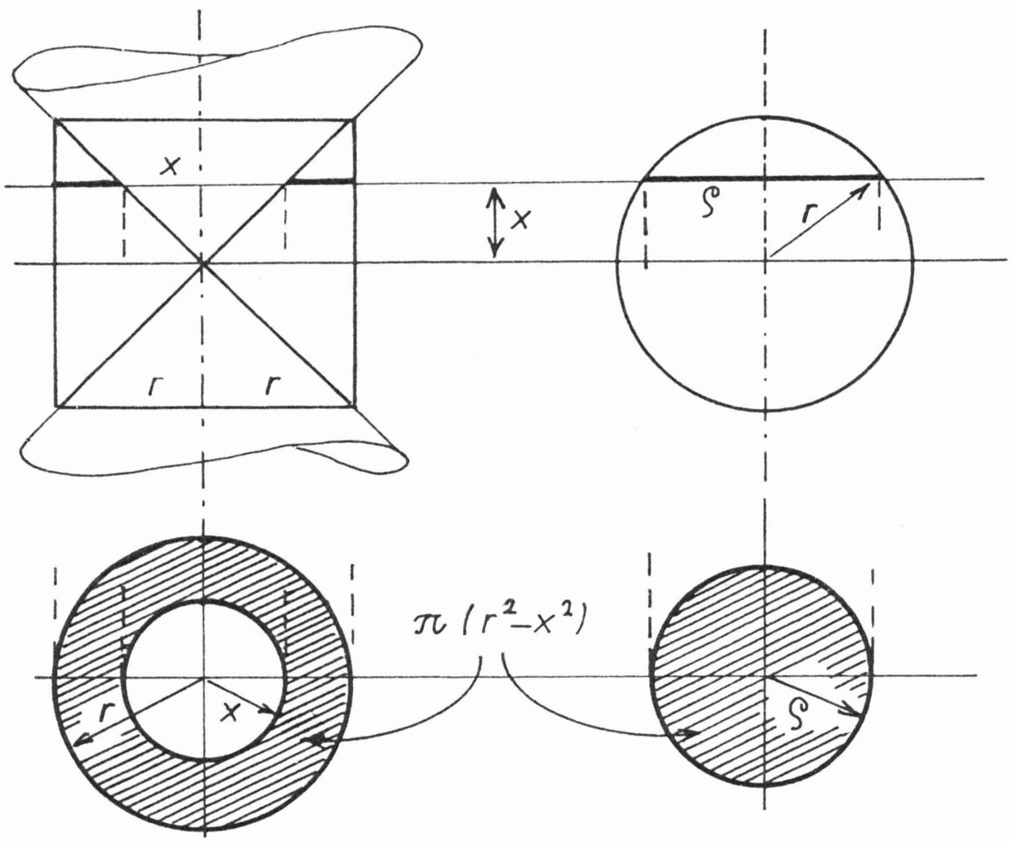
Šrafování rovnoběžníků na obr. 4 nám připomíná jakousi rovinnou analogii Cavalieriho principu: rovnoběžníky $ABCD$, $ABEF$ mají stejný obsah, protože každá přímka rovnoběžná s přímkou AB protíná oba rovnoběžníky ve shodných úsečkách. Cavalieriho princip byl ovšem formulován v XVII. století, polský matematik M. Korda však upozorňuje, že Archimedes již o 2000 let dříve argumentoval ve prospěch tohoto principu takto přesvědčivě:

Naléváme-li do dvou nádob vodu a v každém okamžiku mají v obou nádobách hladiny stejně velký obsah, je celkový objem kapaliny v nádobách stejný.

Tak např. je zřejmé podle obr. 5, že koule má objem

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

neboť rovinné řezy na válci, z něhož je vyňat dvojkužel, a na kouli mají v každé „výšce" týž obsah.



Obr. 5

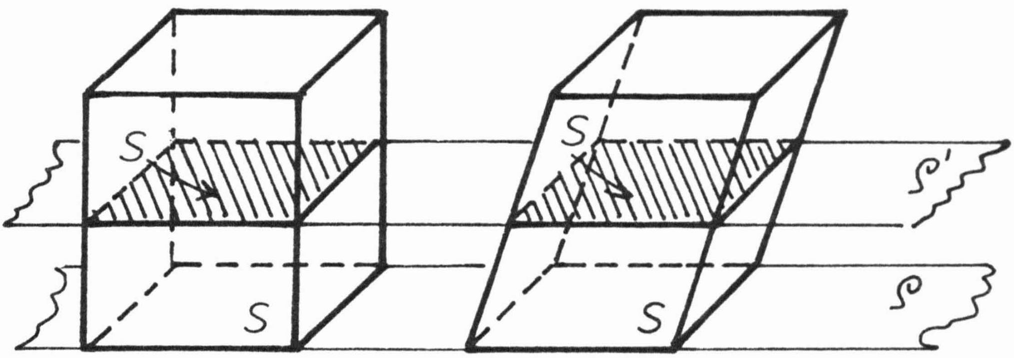
Z Cavalieriho principu rovněž bezprostředně plynou věty:

Každé dva hranoly (válce), které mají stejné výšky, a podstavy stejných obsahů, mají stejné objemy (obr. 6).

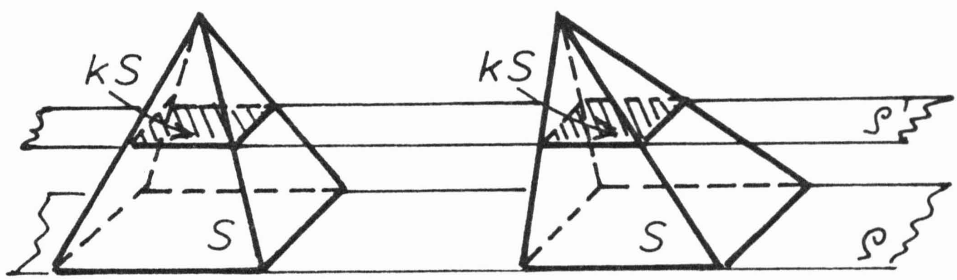
Každé dva jehlany (kužele), které mají stejné výšky, a podstavy stejných obsahů, mají stejné objemy (obr. 7).

Z posledního tvrzení bezprostředně plyne podle obr. 8 vzorec pro objem trojbokého jehlanu

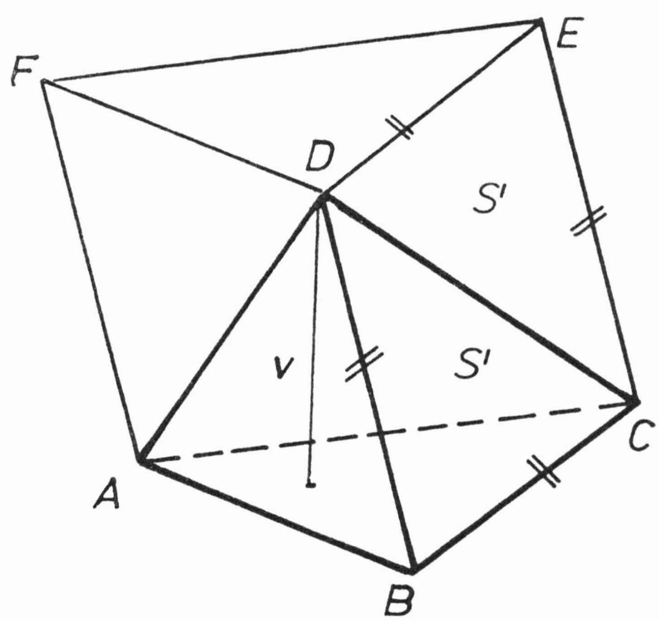
$$V = \frac{1}{3} S \cdot v.$$



Obr. 6



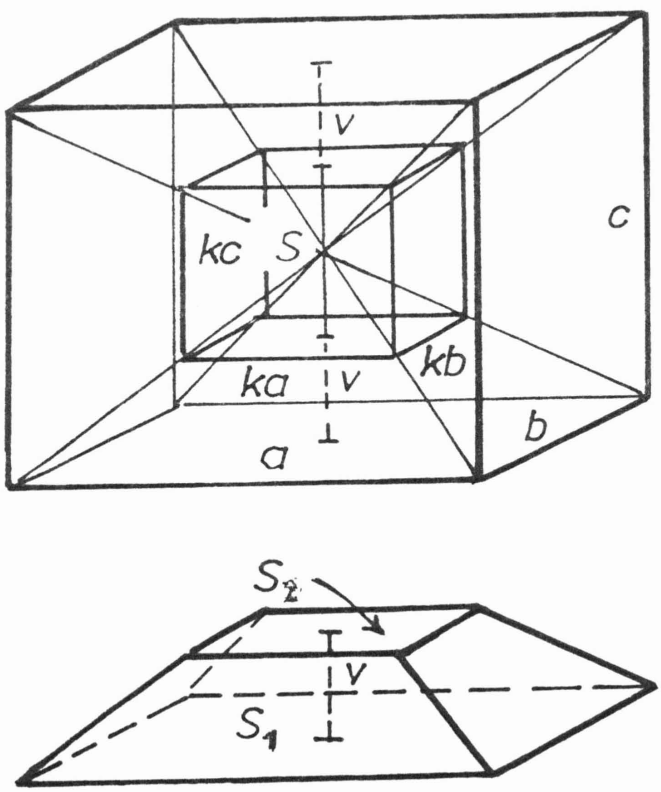
Obr. 7



Obr. 8

K libovolnému trojbokému jehlanu $ABCD$ můžeme totiž připojit jehlany $DECA$ a $FDEA$, které mají stejný objem jako jehlan $ABCD$ a tato tři tělesa tvoří trojboký hranol $ABCFED$ s objemem $S \cdot v$.

Jehlan $DECA$ má stejný objem jako jehlan $ABCD$, neboť tato tělesa mají podstavy téhož obsahu S' ($BCED$ je rovnoběžník) a vzdálenost vrcholu A od společné roviny BCD podstav je rovněž stejná. Podobně usoudíme, že jehlan $DEFA$ má stejný objem jako jehlan $BCAD$, neboť tyto jehlany mají shodné podstavy ABC, FED s obsahem S a stejnou výšku v (vzdálenost vrcholu D od roviny ABC je rovna vzdálenosti vrcholu A od roviny FED, neboť tyto roviny jsou rovnoběžné).



Obr. 9

Vzorec pro objem komolého jehlanu můžeme odvodit názorně několika způsoby, z nichž některé uvádím v knize Umění vidět v matematice. Zde připomenu pěkné odvození vzorce pro objem komolého jehlanu s obdélníkovou podstavou, které pochází od S. Zachariáše (1997). Označme S střed kvádru (obr. 9) a uvažujme stejnolehlost se středem S a koeficientem $k(0 < k < 1)$.

Komolý jehlan, jehož objem máme vypočítat, můžeme konstruovat podle obrázku. Zřejmě platí

$$V = \frac{1}{6}abc - \frac{1}{6}k^3abc = \frac{1}{6}abc(1-k^3).$$

Protože pro výšku v hledaného komolého jehlanu platí

$$c = 2v + kc,$$

je

$$c = \frac{2v}{1-k}$$

a pro objem V platí

$$V = \frac{1}{3}abv \cdot \frac{1-k^3}{1-k} = \frac{1}{3}abv(1+k+k^2).$$

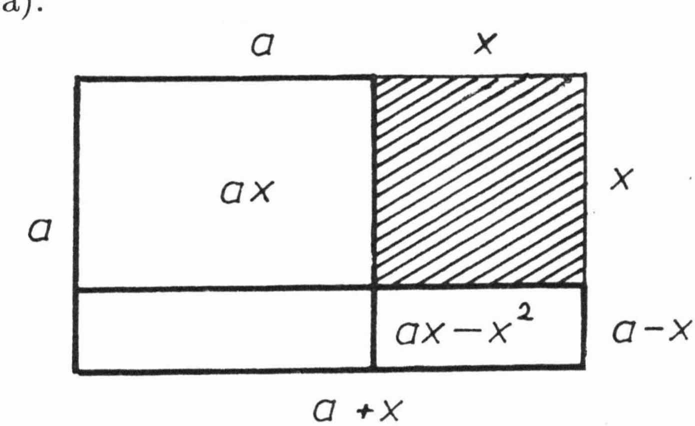
Tento výsledek můžeme ovšem interpretovat známým způsobem

$$V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2),$$

kde S_1 a S_2 jsou obsahy podstav komolého jehlanu.

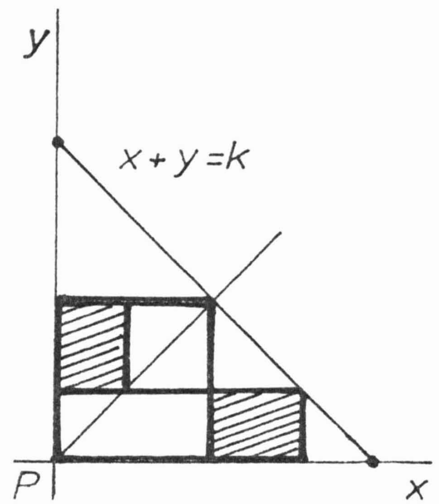
Vraťme se opět k obsahům geometrických útvarů v rovině.

Již z Eukleidovy doby jsou známy dva pozoruhodné výsledky, které snad nechybějí v žádné učebnici diferenciálního počtu jako aplikace vět o průběhu funkcí (viz např. úlohy 4.41 a 4.42 v *Diferenciálním a integrálním počtu pro gymnázia* autorů D. Hrubého a J. Kubáta).

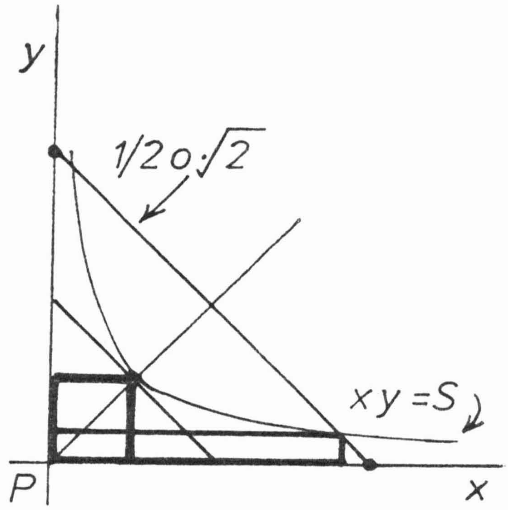


Obr. 10

Důkaz věty, že ze všech pravoúhelníků téhož obvodu má čtverec největší obsah, je vidět jednak z obr. 10, jednak ze znázornění P. Montuchiho z r. 1988 (obr. 11).

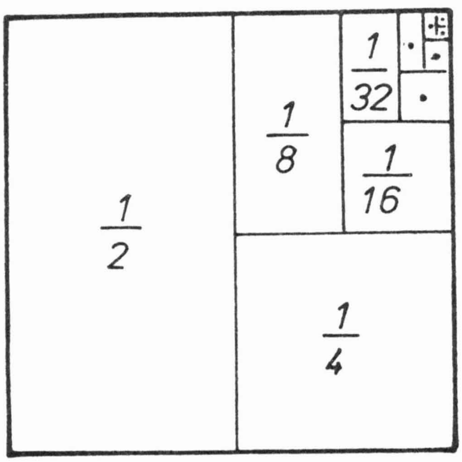


Obr. 11

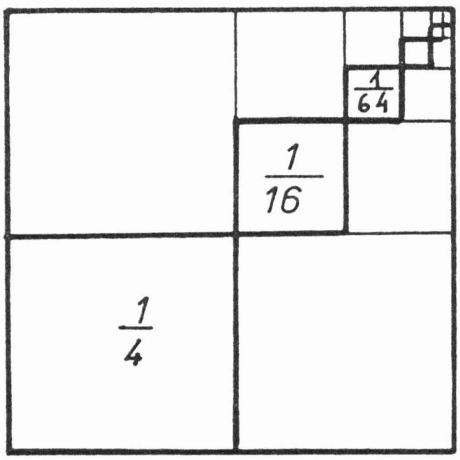


Obr. 12

Z obr. 12 téhož autora můžeme usoudit, že ze všech pravoúhelníků téhož obsahu má čtverec nejmenší obvod.



Obr. 13



Obr. 14

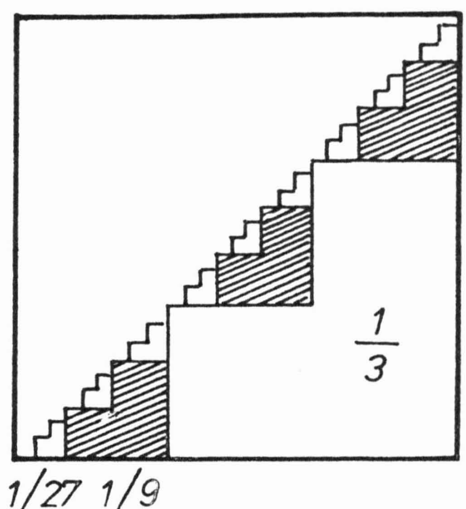
Interpretace kladných reálných čísel jako obsahů rovinných útvarů může poskytnout představu o součtu některých geometrických řad.

Tak např. podle obr. 13 můžeme usoudit, že platí

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1,$$

z obr. 14 vidíme, že

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3},$$

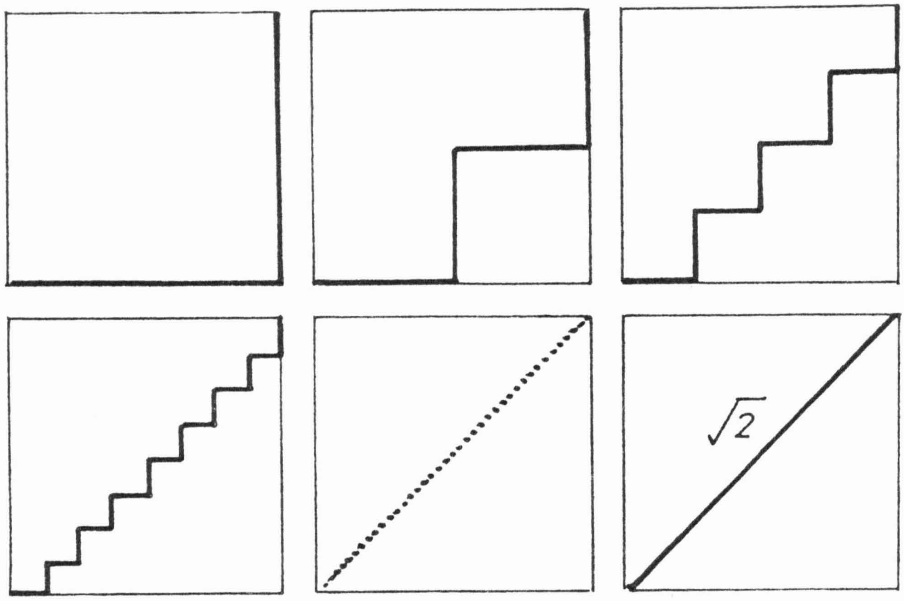


Obr.15

obr. 15 ilustruje, že platí

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots=\frac{1}{2}.$$

Na závěr bych chtěl upozornit na jisté nebezpečí, které je v usuzování podle obrázků skryto. Mnohé souvislosti nejsou z obrázků patrny a může dojít i k vážným omylům. Tak např. každá z posloupností lomených čar konstruovaných podle obr. 16 má délku 2, ačkoliv se v názorném geometrickém smyslu tyto lomené čáry „blíží“ k úhlopříčce čtverce, která má délku $\sqrt{2}$.



Obr. 16

Geometrický obrázek zachycuje zpravidla určitou konkrétní situaci a není zcela „obecný". Přesto však obrázek může být zdrojem nápadu, intuice, vhledu. Podle mého názoru bychom měli znázornění a vizuální reprezentaci myšlenek v naší škole pěstovat výrazněji, než se dnes běžně děje.

Byl bych rád, aby náš seriál *Matematika v obrazech* k tomu přispěl. Osobně bych uvítal, spolu s redakcí *Učitele matematiky*, abyste nám zasílali pěkná, i třeba drobná znázornění, na která jste vy nebo vaši studenti přišli při probírání libovolného tématu. Rádi vaše obrázky otiskneme. Uvítáme i publikaci u nás méně známých myšlenek, se kterými jste se setkali v zahraniční nebo historické didaktické literatuře.

Na šestém Mezinárodním kongresu o matematickém vzdělávání výrazně na otázky vizualizace upozornil ruský matematik A. Jeršov. Jeho názorem náš seriál uzavřeme.

Jak učinit myšlenku viditelnou je věčný a naléhavý problém jak vědců, tak učitelů. Intelektuální grafika má přitom tisíciletou tradici - od fresek doby kamenné až po práce Escherovy.

A. Jeršov

Redakce děkuje dr. A. Šarounové, CSc. za pohotové narýsování většiny obrázků do tohoto čísla.