Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Matúš Proner; Antonín Slavík

Úlohy o kloboucích

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 67 (2022), No. 4, 233–246

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151288`

Úlohy o kloboucích

Matúš Proner, Antonín Slavík

Abstrakt. Článek přináší výběr některých úloh, ve kterých trpaslíci hádají barvy svých klobouků a snaží se za pomoci matematiky najít optimální strategii.

V posledních 20 letech jsou v rekreační matematice velmi populární úlohy, ve kterých se jistý počet osob snaží uhodnout, jaké barvy mají klobouky na jejich hlavách. Úloha má mnoho variant lišících se např. počtem barev a osob, skutečností, zda osoby hádají najednou nebo postupně, zda se vidí všichni navzájem a zda mají případně k dispozici některé dodatečné informace. Někdy je naším úkolem najít strategii, která zaručí, že aspoň jedna osoba uhodne barvu svého klobouku. Jindy usilujeme o maximální počet správných tipů nebo se snažíme maximalizovat pravděpodobnost, že všichni budou tipovat správně. Některé úlohy vyžadují jen logické uvažování, v jiných případech je řešení založeno na využití jednoduchých i pokročilejších matematických nástrojů. V článku předkládáme výběr několika úloh o kloboucích. Jistě není třeba zdůrazňovat, že čtenář by se měl nad každou úlohou nejprve samostatně zamyslet.

Text je inspirován diplomovou prací [11], kterou sepsal první autor pod vedením druhého autora, uvádíme však i některé novější úlohy a výsledky. Stejně jako v práci [11] jsou všechna zadání formulována jako úlohy o trpaslících, kterým čaroděj náhodně přiděluje klobouky. V české literatuře se vyskytují i další odborná pojednání o trpaslících, viz např. [3].

Ve všech úlohách předpokládáme, že trpaslíci se mohou předem dohodnout na vhodné strategii. Poté, co jim čaroděj rozdělí klobouky, už mezi sebou nesmí nijak komunikovat a smí pouze hádat barvy svých klobouků. Teprve když všichni oznámí svůj tip, dozvědí se, kdo z nich hádal správně. Zajímají nás jen deterministické strategie, pro které platí, že po rozdělení klobouků trpaslíkům strategie jednoznačně určuje, jak budou trpaslíci tipovat – nemohou například házet kostkou nebo používat generátory náhodných čísel (v literatuře lze ovšem najít i úlohy připouštějící nedeterministické strategie, viz např. [13], úloha 78).

1. Trpaslíci a modulární aritmetika

Následující problém je patrně nejznámější úlohou o hádání barev klobouků. Lze jej najít např. ve zdrojích [8], [14]. V článku [8] je uvedeno, že úloha patří k matematickému folklóru, je poměrně stará a není snadné vypátrat, kdo je jejím autorem.

Úloha 1.1. V zástupu stojí 10 trpaslíků. Každému z nich čaroděj na hlavu náhodně vyčaruje černý nebo bílý klobouk. Úkolem každého trpaslíka je uhodnout, jakou barvu má klobouk na jeho hlavě, přičemž se řídí následujícími pravidly:

Mgr. Matúš Proner, Gymnázium Evolution Jižní Město, Tererova 17, 149 00 Praha 4, e-mail: `matus.proner@gevo.cz`, doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `slavik@karlin.mff.cuni.cz`

- Všichni trpaslíci se smějí dívat pouze dopředu a vidí barvy všech klobouků před sebou.
- Trpaslíci hádají postupně; začíná ten, který stojí na konci zástupu.

Najděte strategii, která trpaslíkům zaručí maximální počet správných tipů.

Očíslujme trpaslíky čísly $1, \dots, 10$ tak, jak stojí v zástupu za sebou – trpaslík 1 je vepředu, jako první hádá trpaslík 10 stojící vzadu. Z barev klobouků, které vidí před sebou, nedokáže získat žádnou informaci o barvě svého klobouku. Pokud bude tipovat náhodně, uspěje s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Mohlo by se zdát, že trpaslíci $1, \dots, 9$ jsou ve zcela stejné situaci. Pokud budou všichni tipovat náhodně, pak střední hodnota počtu správných tipů bude 5, není však zaručen ani jeden správný tip.

Ve skutečnosti existuje mnohem výhodnější strategie. Je založena na tom, že trpaslík 10 může svůj tip využít k tomu, aby svým kolegům poskytl informaci o tom, co vidí před sebou. Může jim například prozradit, zda vidí sudý nebo lichý počet bílých klobouků, a to následujícím způsobem: Pokud vidí sudý počet bílých klobouků, pak tipuje „černá“, v opačném případě tipuje „bílá“. Nyní je na řadě trpaslík 9, který již má informaci o paritě celkového počtu bílých klobouků na pozicích $1, \dots, 9$. Z parity počtu bílých klobouků, které vidí před sebou, pak snadno určí barvu svého klobouku. Další trpaslíci postupují podobně: Trpaslík na pozici k vidí barvy klobouků na pozicích $1, \dots, k-1$ a zná barvy klobouků na pozicích $k+1, \dots, 9$, slyšel totiž tipy kolegů stojících za ním a ví, že tipovali správně. Z informace o paritě celkového počtu bílých klobouků pak správně určí barvu svého klobouku.[1]

Popsaná strategie zaručuje trpaslíkům minimálně 9 správných tipů. Ukážeme, jak ji přeformulovat mírně odlišným, ale ekvivalentním způsobem, který bude výhodnější při řešení obecnější verze úlohy.

Ztotožníme černou barvu s číslem 0 a bílou barvu s číslem 1. Dále nechť $x_i \in \{0, 1\}$ značí barvu i-tého klobouku. Podle výše popsané strategie pak trpaslík 10 ohlásí barvu $\left(\sum_{i=1}^{9} x_i\right) \bmod 2$, kde $a \bmod b$ značí zbytek z a při dělení b. Každý další trpaslík, jehož číslo je $k \in \{1, \dots, 9\}$, pak vypočítá barvu x_k svého klobouku ze vztahu

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{9} x_i\right) \bmod 2}_{\text{informace od trpaslíka 10}} = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} x_i}_{\text{vidí před sebou}} + x_k + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{9} x_i}_{\text{slyšel za sebou}} \right) \bmod 2.$$

Úloha 1.2. Modifikujme zadání předchozí úlohy tak, že místo černých a bílých klobouků máme klobouky n barev (přičemž trpaslíci vědí, o jaké barvy jde). Najděte strategii zaručující maximální počet správných tipů.

Snadno zobecníme řešení předchozí úlohy. Ztotožníme barvy s čísly $0, \dots, n-1$. Nechť $x_i \in \{0, \dots, n-1\}$ opět značí barvu i-tého klobouku. Strategie bude nyní

[1] Poznamenejme, že trpaslík si nemusí pamatovat barvy všech klobouků, které se nacházejí za ním. Stačí znát počet bílých klobouků, resp. jejich paritu.

fungovat tak, že trpaslík 10 ohlásí tip $\left(\sum_{i=1}^{9} x_i\right)$ mod n. Každý další trpaslík s číslem $k \in \{1, \ldots, 9\}$ pak vypočítá barvu x_k svého klobouku ze vztahu

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{9} x_i\right) \bmod n}_{\text{informace od trpaslíka 10}} = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} x_i}_{\text{vidí před sebou}} + x_k + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{9} x_i}_{\text{slyšel za sebou}}\right) \bmod n.$$

Tato strategie opět zaručuje minimálně 9 správných tipů.

Čtenář si snadno rozmyslí, že pokud bychom měli zástup tvořený t trpaslíky, pak přímočaré zobecnění popsané strategie zaručí minimálně $t - 1$ správných tipů.

Následující úloha je odlišná tím, že všichni trpaslíci musejí tipovat současně a stačí, když aspoň jeden správně uhodne barvu svého klobouku.

Úloha 1.3. Proti sobě sedí dva trpaslíci. Každému z nich čaroděj na hlavu náhodně vyčaruje černý nebo bílý klobouk. Trpaslíci pak současně hádají, jaké barvy mají klobouky na jejich hlavách. Najděte strategii, která zaručí aspoň jeden správný tip.

Zdá se, že když trpaslíci musejí hádat současně, pak jim nezbývá, než tipovat náhodně. V tom případě se snadno může stát, že ani jeden neuhodne správnou barvu. Stačí však, když se místo toho dohodnou následujícím způsobem: Trpaslík 1 bude hádat stejnou barvu, jakou vidí u svého kolegy, zatímco trpaslík 2 bude hádat opačnou barvu, než jakou vidí u svého kolegy. Jak úspěšná je tato strategie? Pokud mají klobouky stejné barvy (nezáleží na tom, zda jsou černé nebo bílé), pak trpaslík 1 správně uhodne barvu svého klobouku a trpaslík 2 se zmýlí. Pokud mají naopak klobouky rozdílné barvy, pak uspěje trpaslík 2. Strategie tedy zaručuje vždy přesně jeden správný tip.

Ztotožníme-li opět černou barvu s číslem 0 a bílou barvu s číslem 1 a použijeme označení $x_i \in \{0, 1\}$ pro barvu i-tého klobouku, pak popsaná strategie znamená, že trpaslík 1 sází na to, že platí $(x_1 + x_2) \bmod 2 = 0$, zatímco trpaslík 2 předpokládá, že $(x_1 + x_2) \bmod 2 = 1$. Při použití této formulace dokážeme snadno vyřešit následující obecnější úlohu.

Úloha 1.4. Kolem kulatého stolu sedí 10 trpaslíků. Každému z nich čaroděj na hlavu vyčaruje klobouk, přičemž náhodně volí z 10 různých barev (trpaslíci vědí, o jaké barvy jde). Trpaslíci pak současně hádají, jaké barvy mají klobouky na jejich hlavách. Najděte strategii, která zaručí aspoň jeden správný tip.

Jako obvykle ztotožníme barvy s čísly $0, \ldots, 9$ a $x_i \in \{0, \ldots, 9\}$ bude značit barvu i-tého klobouku. Dále označme $s = \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right) \bmod 10$. Tuto hodnotu trpaslíci neznají, vědí však, že jde o číslo z množiny $\{0, \ldots, 9\}$. Trpaslík s číslem $i \in \{1, \ldots, 10\}$ bude předpokládat, že platí $s = i - 1$. Z barev, které vidí kolem sebe, a z předpokládané hodnoty s dopočte barvu svého klobouku x_i a ohlásí ji jako svůj tip. Tento tip bude správný, právě když trpaslík použil správnou hodnotu s. K tomu dojde u právě jednoho trpaslíka, strategie tedy zaručuje vždy právě jeden správný tip.

Uveďme ještě jiné zobecnění úlohy 1.3, které lze najít v [14].

Úloha 1.5. Kolem kulatého stolu sedí $2n$ trpaslíků. Každému z nich čaroděj na hlavu náhodně vyčaruje černý nebo bílý klobouk. Trpaslíci pak současně hádají, jaké barvy mají klobouky na jejich hlavách. Najděte strategii zaručující maximální počet správných tipů.

Pokud se trpaslíci spárují do dvojic a každá dvojice použije strategii popsanou v řešení úlohy 1.3, pak počet správných tipů bude vždy n. Neexistuje žádná deterministická strategie, která by zaručila vyšší počet správných tipů. Pro každou strategii totiž platí, že počet konfigurací (tj. rozdělení barev), kdy trpaslík tipuje správně, se shoduje s počtem konfigurací, kdy tipuje špatně (trpaslík se řídí jen tím, co vidí kolem sebe, a změna barvy jeho klobouku nemá žádný vliv na jeho tip). Pro každou strategii tudíž platí, že střední hodnota počtu správných tipů (přičemž průměrujeme přes všechny konfigurace) je n. To znamená, že pokud nějaká strategie dává pro nějakou konfiguraci více než n správných tipů, pak pro jinou konfiguraci musí dávat méně než n správných tipů.

2. Trpaslíci a permutace

Následující úlohu lze najít např. ve zdrojích [8], [10], [13]. Jde o variantu úlohy 1.2, ve které máme zaručeno, že klobouky mají navzájem různé barvy.

Úloha 2.1. V zástupu stojí 10 trpaslíků. Čaroděj má připraveno 11 klobouků různých barev (trpaslíci vědí, o jaké barvy jde) a každému trpaslíkovi náhodně přidělí jeden z nich. Úkolem každého trpaslíka je uhodnout, jakou barvu má klobouk na jeho hlavě, přičemž se řídí následujícími pravidly:

- Všichni trpaslíci se smějí dívat pouze dopředu a vidí barvy všech klobouků před sebou.
- Trpaslíci hádají postupně; začíná ten, který stojí na konci zástupu.

Najděte strategii, která maximalizuje pravděpodobnost, že všichni trpaslíci uhodnou barvu svého klobouku.

Pokud všichni trpaslíci uhodnou barvu svého klobouku, budeme zkráceně říkat, že trpaslíci vyhrají. Poslední trpaslík před sebou vidí 9 různých barev a ví, že jeho klobouk má některou ze zbývajících 2 barev. Nemá však žádnou informaci, která by mu napověděla, o kterou barvu jde. Je tedy zřejmé, že žádná strategie nemůže zaručit pravděpodobnost výhry vyšší než $\frac{1}{2}$. Ukážeme, že existuje strategie s pravděpodobností výhry $\frac{1}{2}$.

Tentokrát jednotlivé barvy ztotožníme s čísly $1, \ldots, 11$. Dále si představíme, že čaroděj vezme poslední nevyužitý klobouk a položí jej za posledního trpaslíka (není podstatné, zda to opravdu udělá – jde jen o myšlenkový experiment). Máme tedy v řadě za sebou celkem 11 klobouků, které můžeme chápat jako permutaci množiny $\{1, \ldots, 11\}$. Tato permutace je buď sudá, nebo lichá; obě možnosti nastávají s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ (pro každé n platí, že sudých permutací n-prvkové množiny je stejně jako lichých). Trpaslíci se dopředu dohodnou, na kterou z obou možností vsadí, a této dohodě pak přizpůsobí své tipování.

Řekněme, že trpaslíci vsadí na to, že permutace bude sudá. Poslední trpaslík tedy při rozhodování mezi dvěma permutacemi (které se liší jen transpozicí) vybere tu, která je sudá. Předposlední trpaslík vidí barvy před sebou a důvěřuje tomu, že kolega stojící za ním správně tipoval barvu svého klobouku. Opět se tedy rozhoduje mezi dvěma možnostmi, které odpovídají sudé, resp. liché permutaci klobouků. Trpaslík vybere první možnost a hádání pokračuje podobným způsobem dále. Pokud je permutace sudá, což nastává s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, pak trpaslíci vyhrají, v opačném případě poslední trpaslík tipuje chybně a trpaslíci prohrají.

Je zajímavé si uvědomit, že i když je permutace lichá, všichni trpaslíci kromě posledního stále tipují správně. Domnívají se totiž, že barvy jejich klobouků tvoří permutaci, která se od permutace odpovídající skutečnosti liší jen transpozicí na posledních dvou místech, a podle toho hádají barvy svých klobouků. Popsaná strategie tedy zároveň maximalizuje zaručený počet správných tipů, který je 9.

Pokud by naším cílem bylo pouze maximalizovat zaručený počet správných tipů, mohli bychom použít strategii popsanou v řešení úlohy 1.4. Tanya Khovanova si v článku [8] všímá, že tato strategie by ovšem selhala, pokud by čaroděj zpřísnil pravidla a požadoval, aby každý trpaslík tipoval jinou barvu než jeho předchůdci (podle [8] jsou autory této varianty Konstantin Knop a Alexander Shapovalov). Může se totiž snadno stát, že některý z prvních devíti trpaslíků bude mít na hlavě kloubouk barvy s, kterou již ohlásil desátý trpaslík (např. pro identickou permutaci vychází $s = (0 + 1 + \ldots + 9) \bmod 11 = 45 \bmod 11 = 1$). Naproti tomu strategie založená na sudých a lichých permutacích funguje i pro modifikovanou úlohu.

3. Trpaslíci a nezávislé množiny

Je zřejmé, že řešení úlohy 2.1 lze snadno zobecnit pro t trpaslíků a $t+1$ různobarevných klobouků. Co se změní v případě, kdy máme t trpaslíků a $t+k$ klobouků? Tato varianta je rozebrána v článku [10]. Poslední trpaslík se rozhoduje mezi $k+1$ barvami, které nevidí před sebou. Žádná deterministická strategie tedy nemůže mít vyšší pravděpodobnost úspěchu než $\frac{1}{k+1}$. Je možné této pravděpodobnosti skutečně dosáhnout?

Uvažujme pro ilustraci případ $k = 2$ a $t = 2$. Trpaslíci mohou například vsadit na to, že barvy jejich klobouků odpovídají některé z uspořádaných dvojic obsažených v množině[2]

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}. \tag{1}$$

Pokud tedy např. druhý trpaslík před sebou vidí barvu 1, bude tipovat, že jeho klobouk má barvu 2. Jaká je úspěšnost této strategie? Existuje celkem $4 \cdot 3 = 12$ způsobů, jak může čaroděj přidělit klobouky dvěma trpaslíkům. Ti zvítězí právě tehdy, když čaroděj zvolí některou ze dvojic obsažených v množině A, což nastane s pravděpodobností $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Pro $k = 2$ a $t = 3$ existuje podobná strategie – trpaslíci mohou vsadit na to, že barvy jejich klobouků odpovídají některé z uspořádaných trojic z množiny

$$\begin{gathered} B = \{(1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 4, 3), (1, 5, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (2, 4, 5), (2, 5, 4), \\ (3, 1, 5), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (3, 5, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1), (4, 3, 5), (4, 5, 3), \\ (5, 1, 4), (5, 2, 3), (5, 3, 2), (5, 4, 1)\}. \end{gathered}$$

[2] Vzápětí vysvětlíme, jak jsme k této množině dospěli.

Tři klobouky může čaroděj vybrat $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ způsoby a množina B obsahuje 20 trojic, pravděpodobnost výhry je tedy $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

Jak byla získána množina B? Je tvořena uspořádanými trojicemi navzájem různých čísel z $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, z nichž každé dvě se musejí lišit aspoň na dvou pozicích. Kdyby se totiž lišily pouze na i-té pozici pro $i \in \{1, 2, 3\}$, pak trpaslík na pozici i na základě toho, co slyšel a vidí, nebude schopen rozhodnout, kterou z obou trojic má zvolit. Množina B by tedy měla být co největší množina uspořádaných trojic navzájem různých čísel z $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, kde se každé dvě trojice liší aspoň na dvou pozicích.

Vše se zpřehlední, když problém přeformulujeme v řeči teorie grafů. Nechť $G_{t+k,k}$ je graf, jehož vrcholy jsou všechny uspořádané t-tice navzájem různých čísel z množiny $\{1, \ldots, t+k\}$ (jde tedy o všechny možné konfigurace barev klobouků na hlavách trpaslíků). Přitom dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když se příslušné t-tice liší pouze na jedné pozici.

Nás ovšem zajímají množiny t-tic, z nichž každé dvě se liší aspoň na dvou pozicích, tj. žádné dvě nejsou v $G_{t+k,k}$ spojeny hranou. Hledáme tedy maximální nezávislou množinu v tomto grafu.[3] Naše úvahy shrnuje následující věta.

Věta 3.1. *Pro úlohu s t trpaslíky a $t+k$ různobarevnými klobouky existuje deterministická strategie s pravděpodobností výhry $\frac{1}{k+1}$, právě když v grafu $G_{t+k,k}$ existuje nezávislá množina o velikosti $(t+k) \cdot \ldots \cdot (k+2)$.*

Důkaz. Uvažujme libovolnou deterministickou strategii. Nechť X je množina všech konfigurací, pro které trpaslíci při použití dané strategie vyhrají. Pak X je nezávislá množina v grafu $G_{t+k,k}$, jinak by strategie neurčovala jednoznačně tipy všech trpaslíků. Celkový počet konfigurací je $(t+k) \cdot \ldots \cdot (k+1)$. Pokud pravděpodobnost výhry je $\frac{1}{k+1}$, pak $|X| = \frac{1}{k+1}(t+k) \cdot \ldots \cdot (k+1) = (t+k) \cdot \ldots \cdot (k+2)$.

Nechť naopak X je nezávislá množina v $G_{t+k,k}$. Trpaslíci pak mohou vsadit na to, že konfigurace barev jejich klobouků leží v X. Je-li to pravda, pak každý trpaslík ví, jak má tipovat, a trpaslíci vyhrají. V ostatních případech se mohou zachovat libovolně. Pravděpodobnost výhry je tedy nejméně

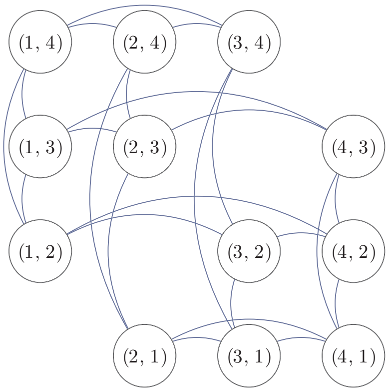
$$\frac{|X|}{(t+k) \cdot \ldots \cdot (k+1)}.$$

Pokud speciálně platí $|X| = (t+k) \cdot \ldots \cdot (k+2)$, pak pravděpodobnost výhry je nejméně $\frac{1}{k+1}$. Z úvahy na začátku kapitoly však víme, že vyšší být nemůže. $\square$

Obrázek 1 znázorňuje graf $G_{4,2}$ pro úlohu se 2 trpaslíky a 4 barvami, tj. $t = k = 2$. Vidíme, že množina A uvedená ve vztahu (1), kterou jsme využili při popisu strategie s pravděpodobností výhry $\frac{1}{3}$, skutečně představuje nezávislou množinu velikosti 4 v grafu $G_{4,2}$ (existují v něm ovšem i jiné nezávislé množiny stejné velikosti, které bychom mohli použít).

Čtenář si snadno promyslí, že všechny grafy $G_{2+k,k}$ pro $k \in \mathbb{N}$ mají podobnou strukturu a obsahují např. nezávislou množinu $\{(1, 2), \ldots, (k-1, k), (k, 1)\}$ velikosti k. Pro $t = 2$ trpaslíky a jakékoliv $k \in \mathbb{N}$ tedy existuje optimální strategie s pravděpodobností výhry $\frac{1}{k+1}$.

[3] Je-li $G = (V, E)$ libovolný graf, pak množina $S \subset V$ se nazývá nezávislá, pokud žádné dva vrcholy z S nejsou spojeny hranou.



Obr. 1. Graf $G_{4,2}$ pro úlohu se 2 trpaslíky a 4 barvami

Úloze se 3 trpaslíky a 5 barvami, tj. případu $t = 3$ a $k = 2$, odpovídá graf $G_{5,3}$, který má $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ vrcholů. Obrázek je nepřehledný, proto jej neuvádíme. S použitím vhodného počítačového programu však velmi rychle najdeme nezávislou množinu obsahující 20 vrcholů (například *Wolfram Mathematica* má pro hledání nezávislých množin zabudovaný příkaz `FindIndependentVertexSet`). Tímto způsobem byla nalezena výše uvedená množina B.

Dále je zajímavé si uvědomit, jakou strukturu má graf $G_{t+1,1}$, který odpovídá úloze 2.1 s t trpaslíky a $t+1$ různobarevnými klobouky. Víme, že jeho vrcholy jsou uspořádané t-tice navzájem různých čísel z množiny $\{1, \ldots, t+1\}$, přičemž hranami jsou spojeny t-tice lišící se pouze na jedné pozici. Pokud bychom na konec každé t-tice doplnili chybějící prvek množiny $\{1, \ldots, t+1\}$, dostaneme právě všechny permutace této množiny. Hranami budou spojeny právě ty permutace, které se liší na dvou pozicích, neboli permutace lišící se transpozicí. Vidíme, že jde o bipartitní graf: V jedné části jsou všechny sudé permutace a ve druhé všechny liché, přičemž každá hrana spojuje sudou a lichou permutaci. Tento graf má dvě maximální nezávislé množiny tvořené všemi sudými, resp. všemi lichými permutacemi; jejich počty jsou $(t+1)!/2 = = (t+1) \cdot \ldots \cdot 3$. Pro $k = 1$ se tedy naše strategie redukuje na strategii založenou na sudých a lichých permutacích, kterou jsme popsali v řešení úlohy 2.1.

Obecně bohužel není pravda, že by pro každou dvojici t, $k \in \mathbb{N}$ graf $G_{t+k,k}$ obsahoval nezávislou množinu o velikosti $(t+k) \cdot \ldots \cdot (k+2)$. Nemusejí tedy existovat ani strategie pro t trpaslíků a $t+k$ různobarevných klobouků s pravděpodobností výhry $\frac{1}{k+1}$. V článku [10] je např. dokázáno, že pro $k = 2$ taková strategie existuje právě tehdy, když $t \leqq 6$. Ve stejném zdroji jsou odvozeny i další zajímavé výsledky pro $k > 2$. Pro některé dvojice t, $k \in \mathbb{N}$ však doposud není známo, jaká je velikost maximální nezávislé množiny a jak vypadá optimální strategie v případě, kdy neexistuje strategie s pravděpodobností výhry $\frac{1}{k+1}$.

4. Trpaslíci a Hammingovy kódy

V této kapitole se zaměříme na úlohy, ve kterých nemusejí hádat všichni trpaslíci. Výklad je inspirován článkem [1] a knihou [9].

Úloha 4.1. U stolu sedí tři trpaslíci. Každému z nich čaroděj na hlavu náhodně vyčaruje černý nebo bílý klobouk. Trpaslíci pak současně hádají, jaké barvy mají klobouky na jejich hlavách, mají však i možnost mlčet. Najděte strategii, která maximalizuje pravděpodobnost, že aspoň jeden trpaslík uhodne barvu svého klobouku a nikdo netipuje chybně.

Abychom si usnadnili vyjadřování, budeme říkat, že trpaslíci vyhrají, pokud aspoň jeden trpaslík uhodne a nikdo netipuje chybně.

Nabízí se jednoduchá strategie: Jeden trpaslík bude tipovat náhodně, zbývající dva budou mlčet. Pravděpodobnost, že trpaslíci vyhrají, je $\frac{1}{2}$. Existuje však výhodnější strategie. Trpaslíci si uvědomí, že pravděpodobnost, že všechny klobouky mají stejnou barvu, je relativně nízká. Pokud tedy trpaslík vidí dvě stejné barvy, pak bude tipovat opačnou barvu, jinak bude mlčet. Při použití této strategie mohou nastat dva případy:

- Všechny klobouky mají stejnou barvu, tudíž všichni trpaslíci hádají špatně a prohrají.
- Všechny klobouky nemají stejnou barvu. Trpaslík s menšinovou barvou bude hádat správně, ostatní trpaslíci budou mlčet a vyhrají.

Pravděpodobnost výhry je tedy $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Dokážeme, že neexistuje žádná jiná strategie s vyšší pravděpodobností výhry. Současně úlohu zobecníme pro t trpaslíků.

Věta 4.2. *Kolem kulatého stolu sedí t trpaslíků. Každému z nich čaroděj na hlavu náhodně vyčaruje černý nebo bílý klobouk. Trpaslíci současně hádají, jaké barvy mají klobouky na jejich hlavách, mají však i možnost mlčet. Pak pro jakoukoliv deterministickou strategii platí, že pravděpodobnost výhry je menší nebo rovna $\frac{t}{t+1}$.*

Důkaz. Ztotožníme-li černou barvu s číslem 0 a bílou barvu s číslem 1, pak barvy t klobouků můžeme chápat jako posloupnost délky t tvořenou nulami a jedničkami; zkráceně budeme hovořit o konfiguracích. Pro každou deterministickou strategii můžeme sestavit tabulku, kde v prvním sloupci budou všechny možné konfigurace, další sloupce říkají, jak při dané konfiguraci tipují jednotliví trpaslíci, a poslední sloupec udává, zda trpaslíci vyhrají, nebo prohrají. Tabulka by mohla vypadat například takto:

Konfigurace	**Trpaslík 1**	**Trpaslík 2**	**Trpaslík 3**	**Výsledek**
000	správně	mlčí	správně	výhra
001	chybně	správně	správně	prohra
010	mlčí	mlčí	chybně	prohra
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Nyní si uvědomme, že celkový počet správných tipů v celé tabulce se vždy shoduje s celkovým počtem chybných tipů. Pokud totiž trpaslík pro nějakou konfiguraci tipuje správně, pak pro konfiguraci, ve které má opačnou barvu klobouku, tipuje chybně (strategie je deterministická a trpaslík se rozhoduje pouze na základě barev, které vidí kolem sebe).

Vzhledem k rovnosti celkových počtů správných a chybných tipů platí, že na každý řádek obsahující aspoň jeden chybný tip (a nejvýše t chybných tipů) bude připadat nejvýše t řádků s aspoň jedním správným a žádným chybným tipem (a nejvýše $t-1$

případů, kdy trpaslík mlčí). Odtud již plyne, že pravděpodobnost výhry nepřevýší hodnotu $\frac{t}{t+1}$.

Poznamenejme, že počet výher v posledním sloupci tabulky bude maximální, pokud jsou chybné tipy koncentrovány v co nejmenším počtu řádků a všechny ostatní řádky obsahují aspoň jeden správný tip. $\square$

Z předchozí věty plyne, že strategie použitá v úloze 4.1 pro případ $t = 3$ je skutečně optimální, neboť vede k výhře s pravděpodobností $\frac{t}{t+1} = \frac{3}{4}$. Obecně však zatím nevíme, zda pro každé $t \in \mathbb{N}$ existuje strategie s pravděpodobností výhry $\frac{t}{t+1}$. Pro takovou strategii musí platit

$$\frac{1}{t+1} = \text{pravděpodobnost prohry} = \frac{\text{počet prohrávajících konfigurací}}{2^t},$$

odkud plyne, že počet prohrávajících konfigurací je $\frac{2^t}{t+1}$. Jelikož tento počet musí být celé číslo, může taková situace nastat jedině tehdy, když $t + 1$ je mocnina dvojky, tj. platí $t = 2^n - 1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující.

Věta 4.3. *Pro každé t ve tvaru $2^n - 1$ existuje deterministická strategie pro úlohu s t trpaslíky s pravděpodobností výhry $\frac{t}{t+1}$.*

Důkaz věty je založen na tzv. Hammingových kódech. Zaveďme nejprve potřebné pojmy a značení. Obarvení t klobouků (konfigurace) budeme i nadále reprezentovat jako posloupnosti délky t tvořené nulami a jedničkami, tedy jako prvky množiny

$$\mathbb{Z}_2^t = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{t\text{-krát}}, \quad \text{kde } \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}.$$

Pro každé dvě posloupnosti $x, y \in \mathbb{Z}_2^t$ definujeme jejich Hammingovu vzdálenost předpisem

$$d(x, y) = \text{počet pozic, na kterých se } x \text{ a } y \text{ liší.}$$

Platí tedy např. $d(010, 111) = 2$. Snadno si rozmyslíme, že Hammingova vzdálenost je metrika na $\mathbb{Z}_2^t$.

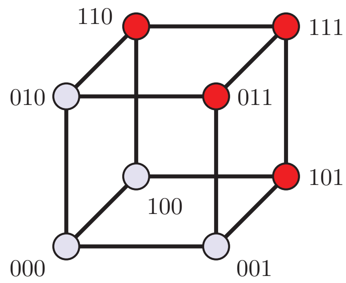
Jednotkovou koulí se středem $x \in \mathbb{Z}_2^t$ budeme rozumět množinu $B(x) = \{y \in \mathbb{Z}_2^t : d(x, y) \leqq 1\}$ tvořenou všemi posloupnostmi y, které se od x liší nejvýše na jedné pozici. Jednotková koule tedy obsahuje právě $t + 1$ prvků.

Definice 4.4. Hammingův kód v $\mathbb{Z}_2^t$ je množina $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{Z}_2^t$, pro kterou platí, že $B(x_1), \ldots, B(x_k)$ jsou disjunktní koule splňující $B(x_1) \cup \ldots \cup B(x_k) = \mathbb{Z}_2^t$.

Například dvojice $\{000, 111\}$ představuje Hammingův kód v $\mathbb{Z}_2^3$; příslušné dvě disjunktní koule jsou znázorněny na obrázku 2.

Pokud $\{x_1, \ldots, x_k\}$ je Hammingův kód, pak platí $k = \frac{2^t}{t+1}$, protože $\mathbb{Z}_2^t$ obsahuje 2^t prvků a každá jednotková koule má $t + 1$ prvků. Odtud je zřejmé, že Hammingův kód může existovat jen tehdy, když $t = 2^n - 1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Dále si všimněme, že pokud $i \neq j$, pak $d(x_i, x_j) \geqq 3$. Kdyby totiž platilo $d(x_i, x_j) = 2$, existoval by prvek $z \in \mathbb{Z}_2^t$ takový, že $d(x_i, z) = 1$ a $d(z, x_j) = 1$,



Obr. 2. Množina $\mathbb{Z}_2^3$ odpovídá vrcholům trojrozměrné krychle, které jsou pokryty dvěma jednotkovými koulemi se středy 000 a 111; každá z nich má 4 prvky

tj. $z \in B(x_i) \cap B(x_j)$, což je spor s disjunktností koulí. Stejně tak je zřejmé, že nemůže platit ani $d(x_i, x_j) = 1$.

Nyní můžeme přistoupit k popisu strategie pro úlohu s t trpaslíky za předpokladu, že máme k dispozici Hammingův kód $H = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{Z}_2^t$.

Připomeňme, že každý trpaslík vidí barvy klobouků všech svých kolegů a nezná pouze barvu svého klobouku. Rozhoduje se tedy mezi dvěma konfiguracemi, které se liší pouze na jedné pozici a mají Hammingovu vzdálenost 1. Strategie je následující: Pokud jedna z konfigurací je součástí H (obě být nemohou), pak trpaslík zvolí opačnou konfiguraci, jinak bude mlčet.

Čtenář si může rozmyslet, že pro $t = 3$ a $H = \{000, 111\}$ se tato strategie shoduje s dříve popsanou strategií s pravděpodobností výhry $\frac{3}{4}$ (viz řešení úlohy 4.1). Jaká je její úspěšnost v obecném případě? Nechť $x \in \mathbb{Z}_2^t$ je skutečná konfigurace popisující barvy klobouků. Mohou nastat dvě možnosti:

- $x \in H$. Každý trpaslík se rozhoduje mezi x a další konfigurací $y \in B(x)$, zvolí y, tudíž tipuje chybně a trpaslíci prohrají.
- $x \notin H$, ale $x \in B(x_i)$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, k\}$. Trpaslík, který se rozhoduje mezi x a x_i, zvolí x a tipuje správně. Všichni ostatní trpaslíci se rozhodují mezi x a další konfigurací, která nepatří do H, tedy mlčí. V tomto případě trpaslíci vyhrají.

Tento rozbor ukazuje, že

$$\text{pravděpodobnost prohry} = P(x \in H) = \frac{\frac{2^t}{t+1}}{2^t} = \frac{1}{t+1},$$

a tedy pravděpodobnost výhry je $\frac{t}{t+1}$, což jsme chtěli dokázat. Zbývá však ještě ukázat, že pro $t = 2^n - 1$, kde $n \in \mathbb{N}$, existuje Hammingův kód v $\mathbb{Z}_2^t$. Následující věta ukazuje, jak jej zkonstruovat.

Věta 4.5. *Nechť $t = 2^n - 1$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak množina H všech posloupností $x_1 \dots x_t \in \mathbb{Z}_2^t$ splňujících*

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} x_1 \oplus \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix} x_2 \oplus \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 1\end{pmatrix} x_3 \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ 1\end{pmatrix} x_t = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

kde ve sloupcích jsou dvojkové zápisy čísel $1, \dots, t$ *a operace* $\oplus$ *je sčítání vektorů po složkách modulo 2, tvoří Hammingův kód v* $\mathbb{Z}_2^t$.

Nechť například $n = 2$ a $t = 2^n - 1 = 3$. Pak rovnost

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} x_1 \oplus \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} x_2 \oplus \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

platí pouze pro $x_1x_2x_3 = 000$ a $x_1x_2x_3 = 111$, tj. $H = \{000, 111\}$ je Hammingův kód v $\mathbb{Z}_2^3$.

Proč funguje popsaná konstrukce Hammingova kódu v obecném případě? Pro každou posloupnost $x_1 \dots x_t \in \mathbb{Z}_2^t$ vektor

$$\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} x_1 \oplus \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix} x_2 \oplus \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix} x_3 \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix} x_t$$

představuje dvojkový zápis jistého čísla $s \in \{0, \dots, t\}$.

Podle definice H platí $x_1 \dots x_t \in H$, právě když $s = 0$. Pokud naopak $s \neq 0$, pak $x_1 \dots x_t \notin H$ a existuje právě jeden vektor $y_1 \dots y_t \in H$ takový, že $d(x_1 \dots x_t, y_1 \dots y_t) = 1$; jde o vektor lišící se od $x_1 \dots x_t$ na s-té pozici. Ve výše uvedeném součtu totiž změna x_s způsobí přičtení nebo odečtení vektoru s dvojkovým zápisem čísla s, čímž se součet vynuluje (a žádný jiný vektor tuto vlastnost nemá).

To znamená, že každá posloupnost $x_1 \dots x_t \notin H$ leží v právě jedné jednotkové kouli, jejímž středem je prvek množiny H. Ověřili jsme, že H je Hammingův kód.

Tuto kapitolu zakončíme několika poznámkami. Hammingovy kódy jsou samoopravné kódy využívané v telekomunikacích a informatice; objevil je Richard W. Hamming v roce 1950, když se zabýval opravami chyb při čtení děrných štítků.

Úloha 4.1 pochází od Todda Eberta, objevila se v poněkud odlišné formulaci v jeho doktorské disertaci [4] obhájené v roce 1998. Úlohu následně zpopularizovala Sara Robinson, která o problému napsala článek do *The New York Times* [12]. Souvislost s Hammingovými kódy pro $t = 2^n - 1$ objevil Elwyn Berlekamp, když se o problému dozvěděl od Petera Winklera. Jaká je situace pro jiné hodnoty t? Optimální strategie pro $t = 2^n$ vypadá tak, že vybraný trpaslík vždy mlčí a ostatní se řídí strategií pro $2^n - 1$ trpaslíků. Pro jiné hodnoty $t \geqq 10$ není známo, jaká je optimální strategie. Pro velká t však existují strategie s pravděpodobností výhry blízké k $\frac{t}{t+1}$. Další podrobnosti lze najít v článku [1]. Tam se lze dočíst také o variantě úlohy s klobouky více barev a variantě, kde trpaslíci nesmí mlčet a požaduje se, aby nadpoloviční většina tipovala správně.

5. Trpaslíci a teorie grafů

Čaroděj může zkoušet různé způsoby, jak trpaslíkům znepříjemnit život. Pokud jsou nuceni tipovat všichni najednou, nemohou si navzájem zprostředkovat informace o tom, co vidí. V úlohách, kde trpaslíci stojí v zástupu, zase představuje další komplikaci skutečnost, že se nevidí všichni navzájem. Co když čaroděj vyzkouší obě omezující podmínky současně?

Úloha 5.1. Kolem skály stojí t trpaslíků. Každému z nich čaroděj na hlavu náhodně vyčaruje černý nebo bílý klobouk. Úkolem každého trpaslíka je uhodnout, jakou barvu má klobouk na jeho hlavě, přičemž trpaslíci hádají současně, každý se smí dívat jen dopředu a vidí pouze svého nejbližšího souseda ve směru pohybu hodinových ručiček. Najděte strategii, která trpaslíkům zaručí aspoň jeden správný tip.

Očíslujeme trpaslíky čísly $1, \ldots, t$ tak, jak stojí za sebou ve směru pohybu hodinových ručiček; můžeme začít u libovolného trpaslíka.

Strategie může vypadat následovně: Trpaslík 1 bude vždy tipovat stejnou barvu, jako má klobouk na hlavě souseda, kterého vidí. Každý další trpaslík bude tipovat opačnou barvu, než má klobouk na hlavě souseda, kterého vidí.

Proč tato strategie funguje? Předpokládejme, že všichni trpaslíci tipují chybně. Pak trpaslík 1 má jinou barvu než trpaslík 2, trpaslík i má stejnou barvu jako trpaslík $i+1$ pro každé $i \in \{2, \ldots, t-1\}$ a trpaslík t má stejnou barvu jako trpaslík 1, což je spor.

Kdyby trpaslíci nestáli v kruhu, ale v zástupu, pak jim žádná deterministická strategie nezaručí ani jeden správný tip. Dokážeme rovnou obecnější tvrzení. Uvažujme orientovaný graf G, jehož vrcholy jsou trpaslíci a hrana z x do y znamená, že trpaslík x vidí trpaslíka y (můžeme si např. představit, že trpaslíci jsou v lese a ve výhledu jim brání stromy).

Věta 5.2. *Pokud trpaslíci hádají současně, pak deterministická strategie zaručující aspoň jeden správný tip existuje právě tehdy, když graf viditelnosti G obsahuje orientovaný cyklus.*

Důkaz. Pokud G obsahuje cyklus, mohou trpaslíci v tomto cyklu použít strategii z řešení úlohy 5.1, která jim zaručí aspoň jeden správný tip; ostatní trpaslíci mohou tipovat libovolně.

Nechť naopak G je acyklický. Ukážeme, že pro jakoukoliv strategii existuje konfigurace barev, při které ani jeden trpaslík netipuje správně. Z teorie grafů je známo, že vrcholy acyklického grafu G můžeme označit čísly $1, \ldots, t$ tak, aby každá hrana vedla z vrcholu s menším číslem do vrcholu s větším číslem (jedná se o tzv. topologické uspořádání grafu).

Trpaslík t nevidí žádného jiného trpaslíka, strategie tedy musí pevně předepisovat, jakou barvu bude hádat (nezávisle na konfiguraci barev). Přiřadíme mu klobouk opačné barvy. Dále pokračujeme indukcí. Předpokládejme, že trpaslíci $i, \ldots, t$ již mají přidělené klobouky. Trpaslík $i-1$ nevidí klobouky trpaslíků $1, \ldots, i-1$, strategie tedy musí jednoznačně určovat, jakou barvu bude tipovat, pouze na základě barev klobouků trpaslíků $i, \ldots, t$. Přiřadíme mu opět klobouk opačné barvy, než jakou předpovídá zvolená strategie. Postupně tak dojdeme až k trpaslíkovi 1. Tím jsme našli konfiguraci, pro kterou všichni tipují nesprávně. ☐

Pokud se trpaslíci mohou otáčet, pak pro každou dvojici trpaslíků platí, že když x vidí y, pak také y vidí x. V takové situaci lze pracovat s neorientovaným grafem G, přičemž trpaslíci opět představují vrcholy a hrany udávají, kteří trpaslíci na sebe navzájem vidí.

Úloha 5.3. Pokud trpaslíci hádají současně a graf viditelnosti G je neorientovaný, jaký je maximální počet zaručeně správných tipů?

Stačí najít maximální párování v grafu G, tj. co největší množinu hran, z nichž žádné dvě nemají společný vrchol. Pro každé dva spárované trpaslíky pak použijeme strategii z řešení úlohy 1.3, která zaručí, že v každém páru bude právě jeden trpaslík hádat správně. Zbývá ještě dokázat, že žádná deterministická strategie není výhodnější. Důkaz není zcela elementární a opírá se o Tutteovu-Bergeho větu, která charakterizuje maximální párování. Detaily lze najít např. v článku [2] nebo v knize [6], ze kterých jsme v této kapitole čerpali. V těchto zdrojích jsou uvedeny i další pěkné výsledky pro úlohy, kde trpaslíci hádají současně a informace o viditelnosti je popsána grafem.

6. Trpaslíci a axiom výběru

V článku [5] a v knize [6] je uvažován i případ, kdy trpaslíků je nekonečně (spočetně nebo nespočetně) mnoho. Předpokládejme, že čaroděj jim přidělí černé a bílé klobouky. Každý trpaslík vidí všechny ostatní, trpaslíci hádají současně, nikdo nesmí mlčet.

Snadno vymyslíme strategii, která zaručí nekonečný počet správných tipů: Pokud trpaslík vidí nekonečný počet černých klobouků, hádá černou, jinak bílou. Pokud je černých klobouků nekonečně mnoho, pak všichni trpaslíci s černým kloboukem hádají správně. V opačném případě musí být nekonečně mnoho bílých klobouků, všichni trpaslíci tipují bílou a všichni s bílým kloboukem tedy hádají správně. U této strategie ovšem může snadno dojít k tomu, že i chybných tipů je nekonečně mnoho (dojde k tomu, když bílých i černých klobouků je nekonečně mnoho).

Yuval Gabai a Michael O'Connor však dokázali existenci jiné strategie, která zaručí, že počet chybných tipů je vždy konečný. Dvě konfigurace barev klobouků na hlavách trpaslíků prohlásíme za ekvivalentní, pokud množina trpaslíků, kteří mají v obou konfiguracích odlišné barvy, je konečná. Tato relace je skutečně ekvivalencí – je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Množina všech možných konfigurací se tedy rozpadá na třídy ekvivalentních konfigurací. Trpaslíci vyberou z každé třídy ekvivalence po jedné konfiguraci a sestaví tak množinu konfigurací A – k tomu je zapotřebí axiom výběru. Strategie je pak jednoduchá: Každý trpaslík z toho, co vidí kolem sebe, pozná, v jaké třídě ekvivalence leží konfigurace vybraná čarodějem. Najde konfiguraci z A, která leží ve stejné třídě, a tipuje barvu svého klobouku podle této konfigurace. Z definice ekvivalentních konfigurací je pak zaručeno, že počet chybných tipů bude konečný.

Poznamenejme, že použití axiomu výběru nebo podobného tvrzení se nelze vyhnout, viz [5]. Existuje i strategie, pro kterou platí, že buď všichni hádají správně, nebo se všichni mýlí. Detaily lze dohledat ve výše citovaných zdrojích, případně v bakalářské práci [7].

Poděkování. Autoři děkují RNDr. Vladimíru Švíglerovi, Ph.D., za množství cenných připomínek k textu.

Literatura

[1] Buhler, J. P.: *Hat tricks.* Math. Intelligencer 24 (2002), 44–49.

[2] Butler, S., Hajiaghayi, M. T., Kleinberg, R. D., Leighton, T.: *Hat guessing games.* SIAM J. Discrete Math. 22 (2008), 592–605.

[3] Cílek, V.: *Archeus. Fragment radostné vědy o trpaslících a příbuzné eseje.* Dokořán, 2010.

[4] Ebert, T.: *Application of recursive operators to randomness and complexity.* Disertační práce. University of California at Santa Barbara, 1998.

[5] Hardin, C. S., Taylor, A. D.: *An introduction to infinite hat problems.* Math. Intelligencer 30 (2008), 20–25.

[6] Hardin, C. S., Taylor, A. D.: *The mathematics of coordinated inference. A study of generalized hat problems.* Springer, 2013.

[7] Jarosil, L.: *Předpovídání budoucnosti a axiom výběru.* Bakalářská práce. MFF UK, Praha, 2014.

[8] Khovanova, T.: *A line of sages.* Math. Intelligencer 36 (2014), 44–46.

[9] Peters, J., Meinshausen, N.: *The raven's hat: fallen pictures, rising sequences, and other mathematical games.* MIT Press, 2020.

[10] Pratt, R., Wagon, S., Wiener, M., Zieliński, P.: *Too many hats.* Math. Intelligencer 41 (2019), 66–71.

[11] Proner, M.: *Kombinatorické úlohy o klobúkoch.* Diplomová práce. MFF UK, Praha, 2021.

[12] Robinson, S.: *Why mathematicians now care about their hat color.* The New York Times, 10. dubna 2001. Dostupné z: `https://www.nytimes.com/2001/04/10/science/why-mathematicians-now-care-about-their-hat-color.html`

[13] Velleman, D. J., Wagon, S.: *Bicycle or unicycle? A collection of intriguing mathematical puzzles.* MAA Press, 2020.

[14] Winkler, P.: *Games people don't play.* In: D. Wolfe, T. Rodgers: Puzzler's tribute. A feast for the mind, A K Peters, 2002, 301–313.