A. Jančařík; Tomáš Kepka; Ivan Volný

Beznulá čísla

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 97 (2022), No. 1, 13–18

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151062`

Beznulá čísla

Antonín Jančařík, PedF UK, Tomáš Kepka, MFF UK, Praha
Ivan Volný, Praha

Teorie čísel je oblastí, která nabízí množství velmi zajímavých problémů. Často se zde setkáváme s úlohami, které lze snadno formulovat, ale jejich řešení může být nesmírně obtížné. V tomto článku se zaměříme na jednu z takových úloh. Budeme se zabývat otázkami spojenými s podobou zápisu čísla v soustavě s předem zvoleným základem a svoji pozornost soustředíme na čísla, jejichž zápis neobsahuje číslici nula (beznulá čísla), a na čísla, která se dají zapsat jako součin dvou beznulých čísel (skorobeznulá čísla). Primárně se zaměříme na soustavu s dekadickým základem a čísla ve tvaru 10^n a položíme si otázku, pro která nezáporná celá čísla n lze mocninu 10^n rozložit na součin $10^n = ab$ celých čísel a, b, kde ani číslo a ani číslo b nemá číslici 0 ve svém dekadickém zápisu. Následně ukážeme, jakým způsobem je možné pozorování z dekadické soustavy zobecnit i pro soustavy o jiném základu.

Beznulá a skorobeznulá čísla

Za účelem snazšího vyjadřování budeme říkat, že celé číslo a je <u>beznulé</u> (při základu 10), jestliže v dekadickém zápise čísla a se nevyskytuje číslice 0. Například, $1, 2, \dots, 9, 11, \dots, 19, 21, \dots$ jsou beznulá čísla, zatímco čísla $0, 10, 20, \dots, 101, \dots$ beznulá nejsou.

Budeme říkat, že číslo a je <u>skorobeznulé</u>, je-li součinem dvou (ne nutně různých) beznulých čísel. Zřejmě, 0 není skorobeznulé číslo a číslo a je skorobeznulé tehdy a jen tehdy, je-li takovým i číslo $-a$. V dalším se tudíž omezíme pouze na kladná celá čísla.

Je-li a beznulé číslo, pak $a = 1 \cdot a$ je rozklad na součin dvou beznulých čísel. Tedy každé beznulé číslo je také skorobeznulé.

Je-li p prvočíslo, pak p lze rozložit pouze ve tvaru $p = 1 \cdot p$. Takže prvočíslo p je skorobeznulé právě tehdy, když je beznulé. Nejmenší prvočíslo, které není beznulé je 101. Je dokázáno, že existuje nekonečně mnoho beznulých prvočísel [1].

Několik pozorování

Je $10 = 2 \cdot 5$, $20 = 4 \cdot 5$, $30 = 5 \cdot 6$, $40 = 5 \cdot 8$, $50 = 2 \cdot 25$, $60 = 5 \cdot 12$, $70 = 2 \cdot 35$, $80 = 5 \cdot 16$, $90 = 5 \cdot 18$, $100 = 4 \cdot 25$. Nyní je jasné, že každé číslo m takové, že $1 \leq m \leq 100$, je skorobeznulé. A je také jasné, že prvočíslo 101 je nejmenším kladným číslem, které není skorobeznulé.

Je $102 = 2 \cdot 51$, 103 je prvočíslo, $104 = 2 \cdot 52$, $105 = 5 \cdot 21$, $106 = 2 \cdot 53$, 107 je prvočíslo, $108 = 2 \cdot 54$, 109 je prvočíslo, $110 = 2 \cdot 55$, $120 = 5 \cdot 24$, $130 = 2 \cdot 65$, $140 = 5 \cdot 28$, $150 = 6 \cdot 25$, $160 = 5 \cdot 32$, $170 = 5 \cdot 34$, $180 = 5 \cdot 36$, $190 = 5 \cdot 38$, $200 = 8 \cdot 25$, $201 = 3 \cdot 67$. Odtud snadno plyne, že každé (složené) číslo m takové, že $102 \leq m \leq 201$ je skorobeznulé. Je však $202 = 1 \cdot 202 = 2 \cdot 101$ a jiných rozkladů číslo 202 nemá. Tedy 202 je nejmenší kladné složené číslo, které není skorobeznulé. Navíc, číslo 202 nelze rozložit na součin jakkoli mnoha beznulých čísel. Protože každé složené číslo m, $1 \leq m \leq 201$ je skorobeznulé, tak prvočísla $101, 103, 109$ jsou právě ta čísla m, že $1 \leq m \leq 201$ a m není skorobeznulé.

Snadno spočteme vlastními silami, že 47 je nejmenší prvočíslo s tou vlastností, že jeho druhá mocnina není beznulá. Je $47^2 = 2209$; samozřejmě, 47^2 je skorobeznulé číslo. Dále je $47^3 = 47 \cdot 47 \cdot 47 = 103823$. Tedy 47^3 je součinem tří beznulých čísel, přičemž však 47^3 není skorobeznulé číslo. Pro nejbližší větší prvočíslo, tedy číslo 53, také platí, že jeho druhá mocnina není beznulá, neboť $53^2 = 2809$. Ovšem $53^3 = 148877$, což je beznulé číslo.

Číslo 107 je nejmenší prvočíslo, které není beznulé, avšak jeho druhá mocnina již beznulá je; $107^2 = 11449$. Nejmenší takové složené číslo je 106, $106^2 = 11236$. Jako zajímavý úkaz uveďme následující druhou mocninu: $3333333333333334^2 = 11111111111111115555555555555556$, což je beznulé číslo, které je druhou mocninou beznulého čísla.

Mocniny dvou a pěti

Není vůbec náročné si vyrobit tabulku mocnin 2^n prvočísla 2, a to třeba pro $0 \leq n \leq 100$. Prohlídkou této tabulky zjistíme, že pro tyto exponenty je mocnina 2^n beznulá právě jen pro $n = 0, 1, \ldots, 9$, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 24, 25, 27, 28, 31, …, 37, 39, 49, 51, 67, 72, 76, 77 81, 86. Dohromady je to $36 = 6^2$ exponentů.

Panuje přesvědčení [2], že 86 je největší exponent n takový, že mocnina 2^n je beznulá. Tato domněnka byla potvrzena pro $n \leq 2{,}5 \cdot 10^9$.

Asi by dalo dost práce zjistit přímým výpočtem, že pro $0 \leq n \leq 100$ jsou mocniny 5^n beznulé pouze pro $n = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 17, 18, $30, 33, 58$. Dohromady to je $16 = 2^4$ exponentů. Opět existuje domněnka, že 58 je největší exponent. Domněnka byla ověřena pro všechna $n \leq 10^{10}$.

Rozklad mocnin deseti

Dokažme si, že pro $n \geq 0$ je mocnina 10^n skorobeznulá právě tehdy, když jsou beznulé obě mocniny 2^n a 5^n.

Nejdříve tu snadnou část. Je $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Jsou-li tedy mocniny 2^n a 5^n beznulé, pak mocnina 10^n je skorobeznulá.

A nyní tu těžší část. Nechť 10^n je skorobeznulé číslo. Chceme dokázat, že mocniny 2^n a 5^n jsou beznulé. Víme, že $10^n = ab$, kde a, b jsou (kladná) beznulá čísla. To jest, $2^n \cdot 5^n = ab$, z čehož plyne $a = 2^r \cdot 5^s$ a $b = 2^u \cdot 5^v$, $0 \leq r, s, u, v$; $r + u = n = s + v$.

Bylo-li by $r \geq 1$ a současně $s \geq 1$, pak by 2^r bylo sudé a (dekadický) zápis mocniny 5^n by končil číslicí 5. A tak součin $2^r \cdot 5^s$ by končil číslicí 0, neboť $2^{r-1} \cdot 2 \cdot 5^{s-1} \cdot 5 = 10 \cdot 2^{r-1} \cdot 5^{s-1}$. To je však spor s tím, že číslo a je beznulé. Je tedy $0 \in \{r, s\}$.

Ze symetrie a z $r + u = n = s + v$ pak již plyne, že $0 \in \{u, v\}$ a tudíž $\{a, b\} = \{2^n, 5^n\}$.

Mocniny deseti

Na základě předchozích pozorování získáváme, že pro $0 \leq n \leq 100$ jsou mocniny 10^n skorobeznulé právě a výhradně jen pro 11 exponentů (z toho 10 kladných), konkrétně pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 18, 33$. Platila-li by výše uvedená domněnka o mocninách dvou, pak by to byly již všechny hledané exponenty. Připomeňme však, že domněnka je prověřena pro $n \leq 2{,}5 \cdot 10^9$.

Nejvyšší známou skorobeznulou mocninou 10 je mocnina

$$10^{33} = 8589934592 \cdot 116415321826934814453125$$

10^{33} je pěkné skorobeznulé číslo (i když má ve svém zápise 33 nul).

Dále víme, že $2^{34} = 2 \cdot 8589934592 = 17179869184$, čili i číslo $2 \cdot 10^{33}$ je skorobeznulé.

Nejmenší (nezáporný) exponent n takový, že mocnina 10^n není skorobeznulá, je $n = 8$. A to proto, že $5^8 = 390625$ není beznulé číslo. Další pak je $n = 10$, neboť $2^{10} = 1024$.

Zobecnění pro soustavy o jiném základu

Pojmy „beznulosti“ a „skorobeznulosti“ jsou závislé na použitém základě q pro poziční zápis celých čísel. Předchozí pozorování byla činěna pro obvyklý případ $q = 10$. Můžeme ovšem uvažovat i jiné základy $q \geq 2$

a budeme získávat q-beznulá a q-skorobeznulá čísla. Opět je zajímavé hledat exponenty $n \geq 0$ takové, že mocnina q^n je q-skorobeznulá.

Je-li $q = p^k$, kde p je prvočíslo a $k \geq 0$, pak není těžké si povšimnout, že mocnina q^n je q-skorobeznulá pouze pro $n = 0, 1$ v případě, že $k \geq 2$, a pouze pro $n = 0$ v případě, že $k = 1$ (tj. $q = p$ je prvočíslo).

Nechť q není mocninou žádného prvočísla, $6 \leq q$. Lze potom psáti $q = r \cdot s$, kde $2 \leq r < s < q$ a čísla r, s jsou nesoudělná (stačí uvážit prvočíselný rozklad čísla q). (Pokud čísla r, s jsou prvočísla, můžeme použít stejné úvahy, jako u rozkladu čísla 10 v desítkové soustavě. Zde ale připouštíme i možnost, že čísla r, s jsou čísla složená.) Bylo-li by $r^2 \geq q$, pak by platilo $s^2 > q$ a $q^2 = r^2 \cdot s^2 > q^2$, což není možné. Nahlížíme, že $r^2 < q < s^2$.

Samozřejmě, $q^0 = 1$ je q-beznulé. Avšak i r, s jsou nenulové číslice (pro základ q), a tak i $q^1 = q$ je q-skorobeznulé číslo. Dále, r^2 je nenulová číslice, $q < s^2 < q^2$, $s^2 = aq + b$, $1 \leq a < q$, $0 \leq b < q$. Tedy $s^2 = (ab)_q$ (poziční zápis při základu q). Kdyby bylo $b = 0$, tak by $s^2 = aq = ars$, tedy $s = ar$ a tedy $r = 1$, neboť čísla r, s jsou nesoudělná. To je však spor s tím, že $r \geq 2$. Tedy $b \geq 1$ a číslo s^2 je q-beznulé. Jelikož máme $q^2 = r^2 \cdot s^2$, tak q^2 je q-skorobeznulé číslo.

A teď se blíže podíváme na mocninu q^3. Jelikož je $r < s$, tak je $q^2 > r^3$ a $r^3 = aq + b$, $0 \leq a < q$, $1 \leq b < q$, $r^3 = (ab)_q$. Dále je $q^3 > s^3$, $s^3 = cq^2 + dq + e$, $0 \leq c < q$, $0 \leq d < q$, $1 \leq e < q$, $s^3 = (cde)_q$.

Je-li $d \neq 0$, pak obě čísla r^3 a s^3 jsou q-beznulá a mocnina q^3 je tudíž q-skorobeznulá. Předpokládejme tedy, že $d = 0$. Je potom

$$q^3 = r^3 \cdot s^3 = acq^3 + bcq^2 + aeq + be > acq^3.$$

Takže $ac = 0$, čili $a = 0$ nebo $c = 0$. Kdyby bylo $c = 0$, tak $s^3 = e < q$, $q^3 = r^3 s^3 < s^6 = e^2 < q^2$, $q < 1$, což neplatí. Takže $c \neq 0$ a $a = 0$, $q^3 = bcq^2 + be$, $bc = q^2(q - bc)$, což je spor s tím, že $1 \leq bc < q^2$. Přesvědčili jsme se, že i mocnina q^3 je q-skorobeznulá.

A na řadu přichází mocnina q^4. Jelikož je $r < s$, tak je $r^4 < q^2$, $r^4 = aq + b$, $0 \leq a < q$, $1 \leq b < q$, $r^4 = (ab)_q$. Dále je $s^4 < q^4$,

$$s^4 = cq^3 + dq^2 + eq + f,$$

$0 \leq c, d, e < q$, $1 \leq f < q$, $s^4 = (cdef)_q$. Číslo r^4 je q-beznulé. Je-li navíc $d \neq 0 \neq e$, pak i s^4 je q-beznulé a mocnina q^4 je q-skorobeznulá. Je-li $e = 0$, pak $s^4 = cq^3 + dq^2 + f$, s^2 dělí f, $s^2 < q$, $s^4 < q^2$, $s^4 = f$

a $q^4 = r^4 \cdot s^4$ je q-skorobeznulé číslo. Zbývá případ $e \neq 0 = d$. Je $s^4 = cq^3 + eq + f$,

$$q^4 = r^4 \cdot s^4 = (aq+b)(cq^3+eq+f) =$$
$$= acq^4 + bcq^3 + aeq^2 + (af+be)q + bf.$$

Je $bf \geq 1$, takže $ac = 0$. Pro $c = 0$ bychom dostali $s^4 < q^2$ a potom také $q^4 = r^4 \cdot s^4 < q^2 \cdot q^2 = q^4$, spor. Takže je $a = 0 \neq c$. Tedy $r^4 = b$,

$$s^4 = cq^3 + eq + f = cr^3s^3 + ers + f,$$
$$q^4 = r^4cq^3 + r^4eq + r^4f.$$

Dále je jasné, že $f = sg$, $1 \leq g < r$. Po zkrácení dostáváme rovnost

$$s^3 = cr^3s^2 + er + g,$$

pro kladná celá čísla, kde víme, že $2 \leq r < s$, $1 \leq c < rs$, $1 \leq e < rs$ a $1 \leq g < r$. Ihned vidíme, že s^2 dělí $er+g$, $er+g = hs^2$, $1 \leq h$. Odtud plyne $er^3 + gr^2 = hr^2s^2$. Ovšem, my víme, že $r^4 = b < q = rs$, čili $r^3 < s$. Pak ale

$$rs^2 + r^3 > es + gr^2 > er^3 + gr^2 = hr^2s^2,$$
$$2s^2 > s^2 + r^2 > hrs^2 \geq 2hs^2 \geq 2s^2,$$

což je opět spor. Poněkud pracně jsme se přesvědčili o tom, že i mocnina q^4 je q-skorobeznulá.

Spočítali jsme si, že pro složené (kladné) číslo q, které není mocninou prvočísla (je pak $q = 6, 10, 12, 14, 15, 18, 20, \dots$) jsou všechny mocniny q^0, q^1, q^2, q^3 a q^4 q-skorobeznulé.

A už je tu závěr. Nemusíme propadnout zoufalství. Volme případ $q = 6$ ($r = 2, s = 3$). Tedy q nejmenší možné. Je $3^0 = 1 = (1)_q$, $3^1 = 3 = (3)_q$, $3^2 = 9 = (13)_q$, $3^3 = 27 = (43)_q$, $3^4 = 81 = (213)_q$ a $3^5 = 243 = (1043)_q$. Mocnina $6^5 = q^5 = (100000)_q$ není q-skorobeznulá. Výše uvedené úvahy proto není možné zobecnit pro vyšší než čtvrtou mocninu.

Závěr

Problémy spojené s beznulými a skorobeznulými čísly leží na pomezí mezi teorií čísel a rekreační matematikou. Toto spojení nabízí celou řadu otevřených problémů, z nichž některé jsou řešitelné i nástroji běžné školní matematiky a nabízí velký prostor pro experimentování a objevování. Zároveň umožňují zobecnění výsledků a přechod z dekadické soustavy do soustav o jiném základu, což je v současné době ve školské matematice opomíjené téma.

Autoři tohoto článku jsou přesvědčeni, že úlohy podobného typu demonstrují krásu matematiky a prostřednictvím jednoduchých aritmetických výpočtů mohou vzbudit a prohloubit u žáků, studentů i široké veřejnosti zájem o tuto vědu.

Literatura

[1] Maynard, J.: Primes with restricted digits. *Inventiones mathematicae*, 217 (2019), s. 127–218. `https://doi.org/10.1007/s00222-019-00865-6`.

[2] Khovanova, T.: *86 Conjencture.* `https://blog.tanyakhovanova.com/2011/02/86-conjecture/`

Připomeňme si podobnost trojúhelníků

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

V elementární rovinné geometrii je zaveden pojem podobnosti trojúhelníků. Je zaveden, mnohdy nedoceněn a nevyužit. Užívání nabiflovaných vzorců v situaci, kdy jádro problému může být vysvětleno užitím podobnosti trojúhelníků, je nejenom zbytečné, ale často i zavádějící (viz [1]).

V této krátké poznámce, která může posloužit ve školní výuce, zdůrazníme důležitost pojmu podobnosti trojúhelníků, jenž lze geometricky vyjádřit velmi jednoduše:

Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když mají stejné úhly.

Podobnost trojúhelníků je v článku využita k vysvětlení některých vlastností, které jsou společné všem trojúhelníkům. Soustředíme se na jednoduchou otázku, která patří do souboru problémů řešených v [2] užitím barycentrických souřadnic, jenž kulminoval větami Cèvy, Menelause a Routha. Zde podáme zcela elementární důkaz „Hlavního tvrzení“, z něhož Cèvova věta a Routhova věta vyplynou jako důsledky.