Karel Mačák

Dvě historické úlohy v gymnaziální učebnici pravděpodobnosti

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 4, 220–225

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151020`

DVĚ HISTORICKÉ ÚLOHY V GYMNAZIÁLNÍ UČEBNICI PRAVDĚPODOBNOSTI

Karel Mačák

1. Úvod

Tento příspěvek vychází z faktu, že v gymnaziální učebnici [1] lze najít řadu zajímavých úloh představujících v podstatě varianty problémů, které hrály jistou (často důležitou) roli v historii teorie pravděpodobnosti. Dvěma takovým problémům bude věnován tento příspěvek, nejprve si ale stručně připomeneme základní historická fakta; podrobnosti lze najít např. v [2].

Za počátek teorie pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou v r. 1654 vedli Blaise Pascal a Pierre de Fermat o problémech, se kterými se na Pascala obrátil rytíř de Méré. Problémy rytíře de Méré nebyly původní; v polovině 17. století už byly v jistém smyslu „ustálené" dva typy problémů z oblasti hazardních her a sázek, které sloužily formující se teorii pravděpodobnosti jako základní materiál a které lze obecně formulovat takto:

První typ problémů bychom dnes asi označili za problémy kombinatorické. Týkaly se např. toho, kolika způsoby může padnout jistý počet ok při házení dvěma, třemi, atd. kostkami; úlohy podobného typu se objevují v teorii pravděpodobnosti a jejích aplikacích i dnes[20].

Druhý typ problémů má dnes už význam pouze historický; týkal se tzv. úlohy o rozdělení sázky, kterou lze formulovat v nejjednodušší podobě takto:

Dva hráči hrají sérii her o nějakou částku C; tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her (lidově se někdy říká, že hráči hrají na k vítězných her). Pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře je pro oba hráče stejná (oba hráči jsou „stejně

[20]Jako příklad uveďme článek F. Guldana *Je lepšie hrať ruletu alebo blackjack?* PMFA 38 (1993), 1, 29-39.

dobří“). Série her je předčasně ukončena ve chvíli, kdy jednomu hráči chybí do výhry m her, druhému hráči chybí do výhry n her. Jak má být spravedlivě rozdělena částka C mezi hráče?

Všimněme si toho, že oba typy problémů lze formulovat bez použití pojmu „pravděpodobnost“ a původně opravdu bez použití tohoto pojmu formulovány byly; nemluvilo se o pravděpodobnostech, ale o dělení sázky, šancích na výhru a pod. Z dnešního hlediska lze říci, že Pascal s Fermatem vycházeli při řešení problémů zadaných rytířem de Méré z pojetí pravděpodobnosti odpovídajícího dnešní tzv. klasické definici pravděpodobnosti (viz např. [1], str. 89), pojem „pravděpodobnost“ ale vůbec nedefinovali; jejich cílem bylo řešení jistých konkrétních úloh, nikoli definování obecných pojmů a teoretické studium jejich vlastností.

Vraťme se ale k Pascalově a Fermatově korespondenci. Část této korespondence se ztratila; zachovaná část byla vydána tiskem v Toulouse, ale až v r. 1679[21]. Mezitím v r. 1657 vydal Christian Huygens svoji práci *De ratiociniis in ludo aleæ*, která po dobu zhruba padesáti let představovala základní publikovanou práci o počtu pravděpodobnosti. Za další mezník ve vývoji teorie pravděpodobnosti lze považovat (posmrtné) vydání knihy Jakoba Bernoulliho *Ars conjectandi* v Basileji v r. 1713.[22]

2. Problémy rytíře de Méré

De Méré seznámil Pascala se dvěma problémy, z nichž Pascala s Fermatem zaujala hlavně úloha o rozdělení sázky; její formulaci jsme již uvedli, ale nebudeme ji zde řešit. Druhá úloha byla poměrně elementární a Pascal ji zřejmě vyřešil obratem ruky; tato úloha se v různých variantách dodnes objevuje v některých učebnicích (včetně učebnice [1]) a proto se jí nyní budeme zabývat.

De Méré tvrdil, že chce-li někdo hodit při opakovaném házení jednou kostkou aspoň jednou šestku, má nadpoloviční šanci na

[21] V této souvislosti považujeme za vhodné upozornit na knížku A. Rényiho *Dialogy o matematice*, MF Praha 1980, jejíž jedna část je věnována právě této korespondenci.

[22] Základní životopisné údaje o všech uvedených osobách jsou uvedeny v příloze.

úspěch počínaje čtyřmi hody a poměr šancí na úspěch k šancím neúspěšným při čtyřech hodech je 671 : 625. Pokud chce někdo hodit aspoň jednou dvě šestky při házení dvěma kostkami, měl by mít podle de Mérého nadpoloviční šanci na úspěch počínaje 24 hody (neboť poměr 24 : 36 je stejný jako poměr 4 : 6), ale de Méré zjistil (asi ve své hráčské praxi), že to není pravda, což ho pobouřilo[23].

První tvrzení de Mérého je správné, druhé ale nikoli. Snadno nahlédneme, že pravděpodobnost toho, že v k hodech nepadnou ani jednou dvě šestky, je rovna $(\frac{35}{36})^k$. Řešení daného problému tedy lze nalézt řešením nerovnice

$$\left(\frac{35}{36}\right)^k < \frac{1}{2}, \tag{1}$$

ze které plyne $k \doteq 24,6$, takže dvěma kostkami je třeba hodit aspoň pětadvacetkrát, aby šance na úspěch byla nadpoloviční.

V učebnici [1] se tato úloha objevuje v několika zjednodušených variantách. První zjednodušená varianta je řešena jako příklad 8 na str. 93 - 94[24]:

Co je pravděpodobnější: hodit při 4 hodech kostkou aspoň jednou 6, nebo hodit při 24 hodech dvěma kostkami aspoň jednou 6,6 ?

Další varianty se objevují jako úlohy 2.89 a 2.90 na str. 130 - 131.

Řešení úlohy 2.89 na str. 130 představuje variantu prvního tvrzení rytíře de Méré, protože se nehází kostkou, ale mincí:

Kolik hodů mincí je třeba provést, aby pravděpodobnost, že padne aspoň jednou líc, byla a) větší než 0,999, b) větší než 0,99 ?

---

[23]Pascal v dopisu Fermatovi z 29.VII.1654 o tom píše (přeloženo podle [3]): *To tedy byl jeho veliký skandál, který ho přiměl domýšlivě říci, že poučky nejsou stálé a že se aritmetika mýlí: vy ale jistě snadno uvidíte důvod podle principů, k nimž jste dospěl.*

(Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'etaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait: mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.)

[24]V učebnici [1] nemůže být úloha na tomto místě řešena v původním zadání, protože ještě není vyložena nezávislost náhodných jevů.

Řešení úlohy 2.90 je vlastně prvním tvrzením rytíře de Méré: *Jak velké musí být* n, *aby pravděpodobnost, že šestka padne nejpozději v* n*-tém hodu kostkou, byla větší než 1/2 ?*

Z historického hlediska ještě poznamenejme, že Pascalovi a Fermatovi se tento problém rytíře de Méré asi jevil příliš jednoduchý a v jejich korespondenci se řešení této úlohy vůbec neobjevuje; celou záležitost vyřídil Pascal již citovanou poznámkou ve svém dopisu ze dne 29.VII.1654 a dále už se jejich „pravděpodobnostní" korespondence týkala pouze úlohy o rozdělení sázky. Huygens ve svém spisu *De ratiociniis in ludo aleæ* odvozuje první tvrzení rytíře de Méré a řeší správně i úlohu pro dvě kostky, nepoužívá k tomu ale nerovnosti (1), nýbrž postupuje „experimentálně"[25]: při házení jednou kostkou počítá postupně pravděpodobnosti, že aspoň jednou padne šestka při jednom, dvou, třech a čtyřech hodech kostkou, při házení dvěma kostkami počítá postupněpravděpodobnosti, že aspoň jednou padnou dvě šestky při jednom, dvou, čtyřech, osmi, šestnácti, čtyřiadvaceti a pětadvaceti hodech dvěma kostkami[26].

Z matematického hlediska nic nebrání tomu, aby studenti řešili úlohu rytíře de Méré v plném rozsahu v té podobě, v jaké ji řešili Pascal s Fermatem a Huygensem; domníváme se, že vědomí historických souvislostí by pro některé studenty mohlo být zajímavým motivačním prvkem.

3. Další úloha o kostkách

Mezi úlohy, které už byly v polovině 17. století rozpracovány, patří např. otázka, kolika způsoby může při hodu dvěma kostkami padnout součet rovný 2, 3, ... , 12 a kolika způsoby může při hodu třemi kostkami padnout součet rovný 3, 4, ... , 18. Tuto úlohu[27]

[25]Překlad původního Huygensova textu lze nalézt v [2].

[26]Autor příspěvku si dovoluje na základě vlastní pedagogické zkušenosti vyslovit podezření, že někteří studenti dodnes dávají přednost řešení experimentálnímu před řešením nerovnice (1).

[27]Zabýval se jí např. Hieronymus Cardano (1501 - 1576) a Galileo Galilei (1564 - 1642) (podrobnosti lze nalézt např. v knížce L. E. Majstrova *Teorija verojatnostej. Istoričeskij očerk.* Nauka, Moskva 1967 (existuje i anglický překlad)).

zajímavým způsobem zobecnil Jakob Bernoulli a protože se její• varianta objevuje i v učebnici [1] jako úloha 2.35 na str. 102 *Určete součet, který při hodu 3 kostkami padne nejčastěji*, budeme se jí nyní věnovat.

Bernoulli řeší následující úlohu: házíme n kostkami; kolika způsoby může padnout součet rovný k, kde $n \leq k \leq 6n$? Na základě postupného rozboru situací při házení jednou, dvěma, ... kostkami, které zapisuje do vhodně uspořádané tabulky (viz dále), dospívá Bernoulli k rekurentnímu postupu řešení úlohy, který bychom mohli formulovat takto:

Označme $Z(n,k)$ počet způsobů, kterými při hodu n kostkami může padnout součet rovný k, přičemž $Z(n,k) = 0$ pro $k < n$ nebo $k > 6n$. Pak

$$Z(n,k) = \sum_{i=1}^{6} Z(n-1, k-i).$$

Základní myšlenka tohoto vzorce je jednoduchá: má-li na n kostkách padnout součet k, musí na $n-1$ kostkách padnout součet menší o 1 nebo o 2 nebo ... nebo o 6 a každá z chybějících hodnot 1, 2, ... , 6 na poslední kostce může padnout pouze jedním způsobem.

Postupný výpočet hodnot $Z(n,k)$ lze snadno provést v tabulce, která je připojena na konci kapitoly a představuje zjednodušenou verzi tabulky Bernoulliovy. V hlavičce tabulky je uveden součet k, v legendě tabulky je uveden počet kostek n a v políčkách tabulky jsou uvedeny příslušné hodnoty $Z(n,k)$.

Vytvoření tabulky je jednoduché.

I/ První řádek tabulky je zřejmý, protože při házení jednou kostkou může padnout každá z hodnot 1, 2, ... , 6 právě jedním způsobem.

II/ Známe-li $(n-1)$-ní řádek tabulky, pak n-tý řádek získáme takto: číslo v k-tém sloupci n-tého řádku je rovno součtu čísel v šesti sloupcích vlevo od k-tého sloupce v $(n-1)$-ním řádku, přičemž prázdná políčka v tabulce nebo neexistující políčka vlevo od prvního sloupce tabulky bereme jako nuly.

Uvedený postup řešení je (jako každý rekurentní postup) pro vyšší hodnoty n, k pracný a zdlouhavý, ale je univerzální a po formální stránce natolik jednoduchý, že jednodušší postup řešení dané úlohy asi nelze nalézt; proto jsme považovali za vhodné věnovat mu zde pozornost.

n	k										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
1	1	1	1	1	1	1						
2		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	
3			1	3	6	10	15	21	25	27	27	...
4				1	4	10	20	35	56	80	104	...
5					1	5	15	35	70	126	205	...
6						1	6	21	56	126	252	...
⋮						⋮						

Tabulka k Bernoulliovu řešení úlohy o kostkách

4. Závěr

Učebnice [1] (a asi i další učebnice) poskytuje nejednu možnost, jak výklad doplnit (zpestřit, rozšířit) upozorněním na historické souvislosti probírané látky; na dvě z těchto možností jsme zde upozornili. Je samozřejmě otázkou, nakolik lze těchto možností opravdu využít ve třídě, autor však optimisticky doufá, že se to snad někdy někomu může hodit.

LITERATURA:

[1] Calda, E., Dupač, V., *Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, Prometheus, Praha, 1994.

[2] Mačák, K., *Počátky počtu pravděpodobnosti. Dějiny matematiky, sv. 9.*, Prometheus, Praha, 1997.

[3] Pascal, B., *Œuvres. (Ed. L. Brunschvicg, P. Boutroux. T.III. Deuxiéme edition*, Paris, 1923.