Pavel Tlustý

O obsahu trojúhelníka

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 2, 117–118

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150981

O OBSAHU TROJÚHELNÍKA

PAVEL TLUSTÝ

V *Učiteli matematiky* **5** (1996/97) byl otisknut můj příspěvek o maturitních zkouškách z matematiky v Sýrii. Vzhledem k tomu, že mě několik kolegů upozornilo na údajnou tiskovou chybu, která se objevila v jednom z příkladů, rád bych touto poznámkou uvedl věc na pravou míru. Jednalo se o tento příklad:

Příklad 2: Dokažte, že pro obsah P libovolného trojúhelníka platí následující vztah

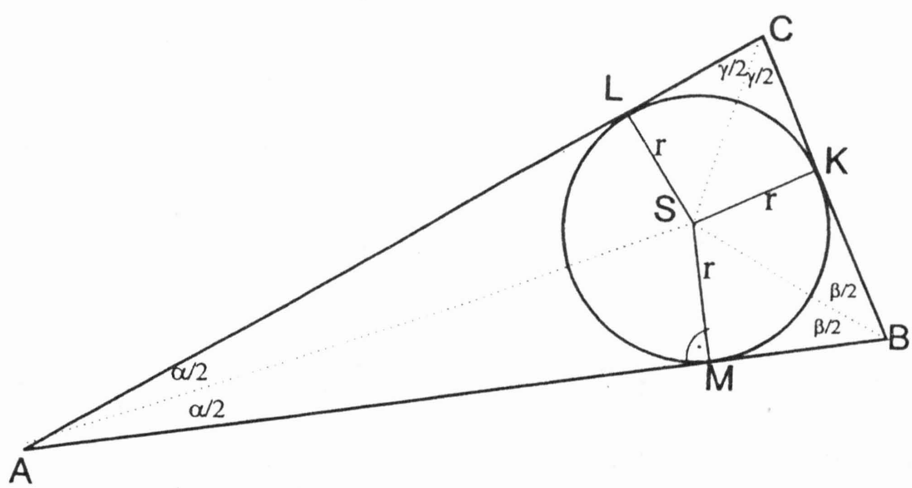
$$P = r^2 \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}, \qquad (1)$$

kde r značí poloměr kružnice trojúhelníku vepsané.

Kolegové se domnívali, že správný vzorec je tvaru

$$P = r^2 \left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right). \qquad (2)$$

Zabývejme se nyní vzorcem (2) a uvažujme trojúhelník (viz obrázek), ve kterém známe úhly α, β, γ a poloměr vepsané kružnice r. Pak lze určit obsah trojúhelníka ABC takto:



Z pravoúhlého trojúhelníku AMS plyne, že $|AM| = r \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$. Odtud je patrné, že obsah trojúhelníka $AMS = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$. Plocha tohoto trojúhelníka je stejná jako plocha trojúhelníka ASL.

Pokud provedeme stejnou úvahu i pro ostatní části trojúhelníka ABC, dostaneme jeho obsah jako

$$P = r^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + r^2 \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + r^2 \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},$$

neboli

$$P = r^2(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}),$$

což potvrzuje platnost vztahu (2).

Plochu trojúhelníka ABC můžeme určit též pomocí Heronova vzorce

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = (a+b+c)/2$. V našem případě platí:
$c = r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$, $b = r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$, $a = r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + r\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$.

Tedy
$s = r(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2})$, $s-a = r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, $s-b = r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$, $s-c = r\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$. Po dosazení do Heronova vzorce dostáváme

$$P = \sqrt{r(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}) \cdot r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot r\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}},$$

což po úpravě dává

$$P = r^2\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}. \tag{3}$$

Pokud porovnáme (3) s již dokázaným vztahem (2) vidíme, že

$$\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}.$$

neboli

$$P = r^2(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}) = r^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

což potvrzuje, že oba vzorce (1), (2) jsou správné.

Vidíme tak zajímavou skutečnost. Je lhostejné, zda $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$ mezi sebou sečteme nebo vynásobíme. Oba způsoby dávají stejný výsledek.