Milada Kočandrlová
Heronův vzorec v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 2, 110–116

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150980

HERONŮV VZOREC V ČASOPISE PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYZIKY

Milada Kočandrlová

Přejeme-li si něčeho dosáhnout v matematice, musíme se učit od mistrů a ne od tovaryšů.

N. H. Abel

Ve 28. čísle tohoto časopisu uvádí P. Leischner „geometrický" důkaz Heronova vzorce [4]. V roce 1870 začala Jednota českých matematiků vydávat Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, *kterýž se zvláštním zřetelem k studujícím rediguje dr. F. J. Studnička, professor mathematiky na C. K. Universitě pražské* (dále ČPMF). Hned v jeho prvním ročníku publikuje F. J. Studnička tentýž „geometrický" důkaz Heronova vzorce v článku [11], v němž vychází z Baltzerovy[8] učebnice.

Podle Studničky je tento důkaz v Pfleiderově trigonometrii (str. 109 a 374) a v publikaci *Practica geometriae* Leonarda Pisánského z r. 1220 (str. 40)[9] jednodušší než důkaz Heronův, který je uveden v sebraných spisech *Heronis reliquiae* z r. 1864 na str. 235. Heronův důkaz *dle řeckého originálu podává Fr. Hromádko, professor v Táboře* v článku [2], kde *z piety k starému tomuto učenci podržel* se řecké litery. Stejný důkaz uvedl ve 28. čísle tohoto časopisu F. Kuřina v článku [3].

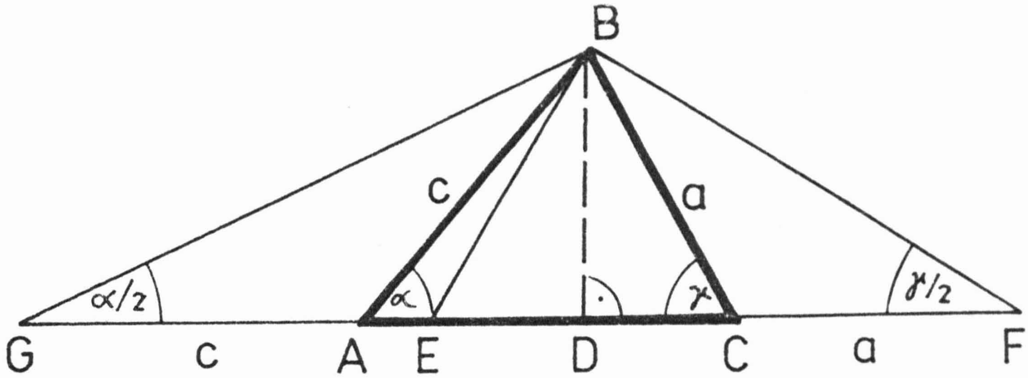
V původním článku [11] Studnička také vyslovuje domněnku, že přestože geometrický důkaz najdeme u Herona, Eulera i Castillona, nejspíše se k němu dojde pouhým výpočtem. Hned několik takových výpočtů lze opět najít na stránkách ČPMF.

---

[8]Richard Baltzer, 1818–1887, byl německý matematik. Jeho dvoudílnou *Die Elemente der Mathematik* z let 1860–62 přeložil M. Pokorný v r. 1873. Důkaz Heronova vzorce je ve 2. dílu na str. 122.

[9]Leonardo Pisánský, narozen ve 12. stol. v Pise, proto zvaný Pisano, syn písaře Bonaccia, který poznav výhody arabského počtářství, vedl svého syna, později zvaného Fibonacci, ke studiu aritmetiky.

V článku [5] Augustin Pánek odvozuje různé vzorce, včetně vzorce Heronova, pro trojúhelník daný třemi stranami nebo dvěma stranami a úhlem sevřeným. Narozdíl od článku [1] je zde zřejmý i geometrický význam prováděných výpočtů.



Kolem vrcholu C trojúhelníku ABC, viz obrázek, otočíme stranu CB na přímku AC v kladném i záporném smyslu. Otočené body označíme E a F. V trojúhelníku ABF, při $|Bf| = 2a\cos\frac{\gamma}{2}$, použijeme kosinovou větu

$$c^2 = (a+b)^2 + 4a^2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 4a(a+b)\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab} = \frac{s(s-c)}{ab}, \qquad (1)$$

kde $2s = a + b + c$. Analogicky pro trojúhelník AEB, při $|BE| = 2a\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}) = 2a\sin\frac{\gamma}{2}$, použijeme kosinovou větu

$$c^2 = (b-a)^2 + 4a^2\sin^2\frac{\gamma}{2} - 2a(b-a)\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{c^2 - (b-a)^2}{4ab} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}. \qquad (2)$$

Dosazením (1) a (2) do vzorce $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ dostáváme Heronův vzorec

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (3)$$

Další Pánkův článek [6] z r. 1880 vychází z jednoduchého tvrzení, je však poněkud složitější na algebraické úpravy. Při standardním označení v trojúhelníku ABC platí $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Potom upravujeme

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha)&=\sin(\beta+\gamma),\\ \sin\alpha&=\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta,\\ \sin\alpha-\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\gamma}-\sin\gamma\sqrt{1-\sin^2\beta}&=0.\end{aligned}$$

Poslední rovnici přepíšeme do tvaru $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}=0$, dvakrát umocníme na druhou a zpět dosadíme goniometrické funkce:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3=0,$$

$$\sin^4\alpha+\sin^4\beta+\sin^4\gamma-2\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\gamma-$$
$$-2\sin^2\beta\sin^2\gamma=-4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma.$$

Označíme-li d průměr kružnice trojúhelníku ABC opsané, potom pro jeho úhly a obsah platí:

$$\sin\alpha=\frac{a}{d},\ \sin\beta=\frac{b}{d},\ \sin\gamma=\frac{c}{d},\ 2P=ab\sin\gamma=\frac{abc}{d}.$$

Po dalších úpravách dostáváme Heronův vzorec

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2&=4\frac{a^2b^2c^2}{d^2},\\ (a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2&=4\frac{a^2b^2c^2}{d^2},\\ (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)&=16P^2.\end{aligned}$$

V r. 1891 se Pánek vrací k Heronově vzorci článkem [7], ke kterému připojuje poznámku: *Při svých výkladech na městském vyšším reálném gymnáziu jsem nabyl přesvědčení, že uvedený chod výpočtu snáze žáci zachovají v paměti než jiný.* Ten vede tak, že pomocí Pythagorovy věty sestaví rovnici pro neznámý obsah P (výšku z vrcholu B označíme BD):

$$P=\frac{1}{2}b\cdot|BD|\implies|BD|=\frac{2P}{b}.$$

$$|AD| = \sqrt{c^2 - \frac{4P^2}{b^2}}\,, \quad |CD| = \sqrt{a^2 - \frac{4P^2}{b^2}}\,, \quad |AD| + |CD| = b\,.$$

Po dosazení do poslední rovnosti a její úpravou dostáváme Heronův vzorec.

V r. 1903 v článku [8] odvozuje Augustin Pánek Heronův vzorec postupem, o kterém v poznámce říká, že *jest mnohem kratší než způsob v učebnicích trigonometrie obvyklý, při němž se dvakráte upravuje Carnotova (cosinusová) věta* ..., viz [1]). *Vyvození toto jest také tím výhodno, že při něm vyniká geometrický význam veličin* $s-a$, $s-b$, $s-c$.

Označíme-li K, L, M body dotyku kružnice o středu O a poloměru r trojúhelníku ABC vepsané (obrázek si čtenář snadno načrtne, označení viz [3]) a $\sphericalangle AOM = \varphi$, $\sphericalangle BOK = \omega$, $\sphericalangle COL = \lambda$, je

$$|AM| + |BK| + |CL| = s = |AM| + a = |BK| + b = |CL| + c\,,$$

$$P = sr\,, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{s-a}{r}\,, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{s-b}{r}\,, \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{s-c}{r}\,.$$

Protože pro $\varphi + \omega + \lambda = \pi$ platí

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\omega \cdot \operatorname{tg}\lambda,$$

po dosazení a úpravě dostáváme Heronův vzorec.

Také Antonín Pleskot, profesor ve Valašském Meziříčí, věnoval pozornost Heronově vzorci, a to v článku [9], kde dvakráte použil větu sinovou.

V trojúhelníku ABC otočíme kolem vrcholu C stranu AC v kladném i záporném smyslu do bodů E, F a kolem vrcholu A stranu AB v kladném smyslu na přímku AC do bodu G, viz obr. Podle sinové věty v trojúhelníku BFG platí

$$\frac{|EG|}{|BG|} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2})} \quad \Longrightarrow \quad \frac{b+c-a}{2c\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\,. \tag{4}$$

Záměnou vrcholů v trojúhelníku bychom analogicky vypočítali

$$\frac{a+c-b}{2a\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,, \quad \frac{a+b-c}{2a\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,. \tag{5}$$

Vynásobením všech tří rovnic z (4) a (5) dostaneme

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{a^2 c \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}. \tag{6}$$

Podle sinové věty v trojúhelníku BFG platí

$$\frac{|FG|}{|BG|} = \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\gamma}{2})}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2})}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Tedy

$$\frac{a+b+c}{2c \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad \Longrightarrow \quad s = c\frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Vynásobením s (6) a odmocněním dostaneme Heronův vzorec.

Ze vztahů (4) a (5), s využitím sinové věty (např. pro první rovnost $a = c\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$, $b = c\frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$), dostaneme známé identity

$$\begin{aligned}
-\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\
\sin \alpha - \sin \beta + \sin \gamma &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\
\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma &= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\
\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Těchto identit použil ve svém důkazu Jan Slavík, profesor na akademickém gymnáziu v Praze, v článku [10].

Vyjdeme ze známých vzorců pro obsah trojúhelníku ABC

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad , \quad P = \frac{1}{2} ac \sin \beta \quad , \quad P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha .$$

Po vynásobení všech tří rovnic dostaneme

$$8P^3 = a^2 b^2 c^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma .$$

Označíme-li $K = \sqrt{\dfrac{2P}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$, je

$$abc = 2KP\,. \tag{8}$$

Postupně do (8) dosadíme za P

$$a = K\sin\alpha\,, \quad b = K\sin\beta\,, \quad c = K\sin\gamma\,.$$

Potom

$$\begin{aligned}
2s = a + b + c &= K(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = \\
&= 4K\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,,\\
2(s-a) = -a + b + c &= K(-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = \\
&= 4K\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\,,\\
2(s-b) = a - b + c &= K(\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma) = \\
&= 4K\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\,,\\
2(s-c) = a + b - c &= K(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma) = \\
&= 4K\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,.
\end{aligned}$$

Dosazením za K dostaneme Heronův vzorec.

Každé číslo ČPMF obsahovalo zadání úloh z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie pro studenty a následně jejich řešení. Mnohé z článků středoškolských profesorů byly právě určeny pro studující mládež. Tak logicky došlo v r. 1921 k oddělení této části ČPMF ve formě samostatného časopisu *Rozhledy matematicko fyzikální, Příloha k Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky pro studující škol středních*, který JČMF vydává dodnes. Zde pak můžeme najít opět návrat k Heronově vzorci.

LITERATURA:

[1] Calda E., *Heronův vzorec a kosinová věta*, Učitel matematiky **5** (1997), 157-159.

[2] Hromádko F., *Kterak Heron Alexandrijský plochu tojúhelníka z daných jeho stran vypočítal*, ČPMF **XVII** (1888), 278-280.

[3] Kuřina F., *Heronův důkaz Heronova vzorce*, Učitel matematiky **6** (1998), 234-237.

[4] Leischner P., *Heronův vzorec ještě jednou*, Učitel matematiky **6** (1998), 230-233.

[5] Pánek A., *Vypočítávání trojúhelníku, dány-li jsou tři strany nebo dvě strany a úhel jimi sevřený*, ČPMF **VIII** (1879), 124-131.

[6] Pánek A., *O ustanovení vzorce pro ploský obsah trojúhelníku, jsou-li dány strany jeho*, ČPMF **IX** (1880), 152-154.

[7] Pánek A., *Planimetrické odvození Heronova vzorce pro ploský obsah trojúhelníku*, ČPMF **XX** (1891), 310-311.

[8] Pánek A., *Stanovení Heronova vzorce pro ploský obsah trojúhelníku*, ČPMF **XXXII** (1903), 542-545.

[9] Pleskot A., *Poznámka ku řešení trojúhelníku, dány-li jsou jeho strany*, ČPMF **XXVII** (1897), 269-271.

[10] Slavík J., *Ploský obsah trojúhelníku v rovině*, ČPMF **XXVI** (1897), 273-275.

[11] Studnička F. J., *O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníka pomocí stran jeho*, ČPMF **I** (1872), 253-255.