Jiří Potůček
Proměny školské matematiky

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 2, 99–107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150978

PROMĚNY ŠKOLSKÉ MATEMATIKY

Jiří Potůček

Od poloviny 19. století je střední školství z hlediska historického vývoje považováno za moderní a dostává se postupně do centra pozornosti. Je sledováno odpovědnými státními institucemi i rodičovskou veřejností. Školská výuka se od této doby měnila jak po stránce obsahové, tak i z hlediska používaných metod práce. Pokud sledujeme vývoj školství a všímáme si jeho proměn, zjišťujeme, že časové intervaly mezi nimi jsou směrem k současnosti stále kratší. Každý dnešní středoškolský učitel matematiky již musel reagovat na nějakou reformu jejího vyučování, nebo ho to jistě čeká (a pravděpodobně ne pouze jednou za dobu jeho aktivní služby). Učitelé, zejména ti starší, se s těmito změnami někdy neradi ztotožňovali. Velkou roli při tom sehrávala tradice. Změny v metodách práce lze s odstupem času dosti těžko dokumentovat. Poněkud příznivější situace je v oblasti obsahových změn, neboť obsah výuky je přece jen zachycen v osnovách a učebnicích. Tam najdeme i řešené příklady a můžeme si udělat poměrně věrnou představu o tom, jak a jaké typy úloh se řešily. Obsahové změny zasáhly všechny tradiční partie školské matematiky. V tomto článku nabízím krátkou exkursi do trigonometrie a goniometrie. Nejprve se podíváme na možnosti řešení obecného trojúhelníku, které měli gymnaziální studenti ve třicátých letech tohoto století.

Pro řešení úloh o obecném trojúhelníku mají žáci současné střední školy k dispozici sinovou a kosinovou větu. Tento aparát je dostačující k tomu, aby mohli řešit základní úlohy. Pokud se však podíváme do matematicko-fyzikálních tabulek, které žáci ve škole používají, zjistíme, že v seznamu užitečných vztahů z oblasti planimetrie a trigonometrie nalezneme vedle již zmíněných vět (sinové a kosinové) ještě další vzorce a sice tangentovou větu a vzorce Molweidovy (Cagnoliovy). Tyto vztahy se již řadu let ve školské matematice většinou neprobírají přesto, že patří k základům tradiční trigonometrie. Důvody, proč byly tyto záležitosti ze školské matematiky vypuštěny, jsou velmi prosté. Od druhé poloviny 19. století se vědecká matematika bouřlivě rozvíjí. Nových poznatků přibývá podle exponenciely. Některé z nich jsou tak zásadní, že je bylo nutno zařadit do obsahu školské matematiky. Zařazování nových poznatků při nezměněné hodinové dotaci pro matematiku má pak za následek, že tradiční partie školské matematiky musí být redukovány. Výše uvedené vztahy byly proto vypuštěny (mimo jiné i proto, že lze vystačit s již uvedenými větami sinovou a kosinovou). Podívejme se, jak lze k uvedeným vztahům dospět a uveďme příklad jejich možného využití pro řešení úloh.

Sinovou větu lze vyslovit např. takto: Jsou-li a, b, c velikosti stran trojúhelníku, α, β, γ protilehlé vnitřní úhly a r poloměr kružnice tomuto trojúhelníku opsané, pak platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Toto tvrzení se ve školské matematice obvykle dokazuje. Podle sinové věty lze tedy napsat:

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad &\Rightarrow \quad b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta\\ \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad &\Rightarrow \quad c\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\gamma.\end{aligned}$$

Sečtením rovností na pravých stranách implikací a jednoduchými úpravami obdržíme vztah:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Po aplikaci vzorce pro převod součtu goniometrických funkcí v součin na závorku na pravé straně rovnosti a s užitím vztahu pro dvojnásobný argument ve jmenovateli obdržíme:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Pro vnitřní úhly trojúhelníku α, β, γ platí $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$, tedy $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}$. Z vlastností goniometrických funkcí plyne, že $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$. S použitím uvedených úprav lze nyní přepsat náš vztah do tvaru:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

Odtud obdržíme konečnou podobu Mollweidova — Cagnoliova vzorce:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Cyklickou záměnou můžeme získat další vztahy:

$$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Při odvozování tohoto typu Mollweidových vzorců jsme sčítali rovnosti:

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$$

$$c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma.$$

Jestliže tyto rovnosti odečteme a budeme používat analogické úpravy (viz předchozí postup), obdržíme další typ Mollweidových vzorců:

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Další vztahy získáme opět cyklickou záměnou:

$$\frac{a-c}{b} = \frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Oba uvedené typy Mollweidových — Cagnoliových vzorců nyní použijeme k odvození tangentové věty. Vyjdeme z již odvozených vztahů:

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Vydělením těchto rovností obdržíme:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

(Zde jsme využili rovností $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$.) Předchozí vztah lze nyní upravit do konečné podoby tangentové věty, v níž je obvykle uváděna:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}.$$

Další vztahy dostaneme opět cyklickou záměnou:

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}}$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}.$$

Podívejme se nyní na jednoduchou úlohu, při jejímž řešení použijeme tangentovou větu. V trojúhelníku ABC jsou dány velikosti stran a = 12,5 cm, b = 5,3 cm a úhel $\gamma = 24°15'$. Vypočtěte velikost strany c a zbývající vnitřní úhly.

K výpočtu neznámé třetí strany trojúhelníku by zřejmě současný středoškolský student použil kosinovou větu. Pomocí sinové věty by vypočetl velikost dalšího úhlu a třetí úhel by vypočetl doplněním dvou již známých úhlů do 180°. My budeme nyní postupovat jinak. Pomocí tangentové věty vypočteme velikosti neznámých úhlů α a β:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Nyní již můžeme dosadit zadané hodnoty a provést numerický výpočet hledaných úhlů α a β:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{12{,}5-5{,}3}{12{,}5+5{,}3} \cdot \operatorname{tg} 90^\circ - \frac{24{,}25^\circ}{2} = \frac{7{,}2}{17{,}8} \cdot \operatorname{tg} 77^\circ 52' 30'' \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 62^\circ 1' 33'', \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} = 77^\circ 52' 30''.$$

Z této soustavy rovnic pro neznámé úhly α a β hledané úhly snadno vypočteme. Popsaným postupem obdržíme pro úhel α hodnotu $139^\circ 54' 3''$ a pro úhel β hodnotu $15^\circ 50' 57''$. Třetí stranu c nyní vypočteme pomocí sinové věty:

$$c = \frac{b}{\sin\beta} \sin\gamma,$$

po dosazení

$$c = \frac{5{,}3 \cdot \sin 24^\circ 15'}{\sin 15^\circ 50' 57''} = 8 \text{ (cm)}.$$

Řešení předvedené úlohy uvedeným postupem by bylo pro studenty dnešní střední školy neobvyklé, neboť neznají používané vztahy. Snad ale není zcela bez zajímavosti, když se alespoň ti, kteří se o matematiku zajímají hlouběji, seznámí i s jinými než dnes užívanými postupy. Uvedený aparát patřil totiž až do padesátých let tohoto století ke standardnímu vybavení školské trigonometrie.

V dalším chci čtenáři nabídnout některé, snad zajímavější, úlohy z goniometrie, které nejsou tak zcela triviální, a způsob jejich řešení, jak byl obvyklý ve třicátých letech. Možná čtenáře obohatí o některé užitečné a dnes již téměř zapomenuté postupy. Začněme následující důkazovou úlohou:

Dokažte správnost identity:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

Obě strany rovnosti vynásobíme dvěma a upravíme na tvar

$$1+2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}=0.$$

Získanou rovnost vynásobíme a zároveň vydělíme výrazem $\sin\frac{2\pi}{7}$, čímž dostaneme

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}=0.$$

Součin $2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}$ nahradíme podle vzorce pro dvojnásobný argument funkce sinus, další dva součiny v závorce nahradíme s použitím vzorců pro převod součtu nebo rozdílu goniometrických funkcí v součin. Po provedení zmíněných úprav můžeme nyní přepsat naši rovnost takto:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}=0.$$

Po provedení naznačených operací v závorce obdržíme:

$$\frac{\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}=0.$$

Čitatele tohoto složeného zlomku upravíme opět s použitím vzorce pro převod součtu goniometrických funkcí v součin do tvaru

$$\frac{\sin\pi\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}=0.$$

Toto je již zřejmá identita, neboť $\sin\pi$ je rovno nule. Proto je roven nule i celý zlomek. Protože k tomuto zlomku jsme došli z výchozí identity (jejíž platnost dokazujeme) ekvivalentními úpravami, je tím dokázáno, že dokazovaná identita platí. Vlastní důkaz nyní spočívá v obrácení naznačeného postupu.

Podívejme se nyní na další úlohu.

Vypočtěte hodnotu výrazu

$$x = a \cdot \cos 2\omega + b \cdot \sin 2\omega, \text{ je-li } \operatorname{tg}\omega = \frac{b}{a}.$$

Nejprve vyjádříme hodnoty $\cos 2\omega$ a $\sin 2\omega$ pomocí vzorců pro dvojnásobný argument. Pak náš vztah přejde do tvaru $x = a\left(\cos^2\omega - \sin^2\omega\right) + 2b\sin\omega\cos\omega$. Z rozdílu v závorce vytkneme $\cos^2\omega$ a druhého sčítance budeme dělit a zároveň násobit $\cos\omega$. Pak obdržíme: $x = a\cos^2\omega(1 - \operatorname{tg}^2\omega) + 2b\operatorname{tg}\omega\cos^2\omega$. Nyní vyjádříme $\cos^2\omega$ pomocí $\operatorname{tg}\omega$. Vyjdeme ze známého vztahu $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$. Formální úpravou jej lze přepsat do tvaru: $\cos^2\omega + \dfrac{\cos^2\omega \cdot \sin^2\omega}{\cos^2\omega} = 1$, který přepíšeme dále takto: $\cos^2\omega + \cos^2\omega \cdot \operatorname{tg}^2\omega = 1$, neboli $\cos^2\omega \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\omega) = 1$. Odtud již můžeme vyjádřit, že $\cos^2\omega = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\omega}$. Teď se můžeme vrátit k našemu vyjádření pro x a dosadit do něho za $\cos^2\omega$:

$$x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\omega} \cdot \left(a\left(1 - \operatorname{tg}^2\omega\right) + 2b\operatorname{tg}\omega\right).$$

Teď již zbývá jen za $\operatorname{tg}\omega$ dosadit $\frac{b}{a}$ a po jednoduchých úpravách dostaneme výsledek $x = a$.

Ukažme si teď některé zajímavé úlohy o trojúhelnících. První z nich nám bude poněkud připomínat Pythagorovu větu. Je to následující úloha:

Dokažte, že trojúhelník, v němž platí vztah $\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$, kde α, β, γ jsou velikosti jeho vnitřních úhlů, je pravoúhlý.

Důkaz tohoto tvrzení lze provést různými způsoby. Ukažme si alespoň dva z nich.

V prvním případě budeme upravovat výchozí vztah. Nejprve jej upravíme do tvaru $\sin^2\gamma - \sin^2\alpha = \sin^2\beta$. Tento vztah je ekvivalentní se vztahem $(\sin\gamma + \sin\alpha)(\sin\gamma - \sin\alpha) = \sin^2\beta$. Obě závorky nyní upravíme pomocí vzorců pro převod součtu nebo rozdílu goniometrických funkcí v součin a dostaneme: $2 \cdot \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot$ $\cdot \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} = \sin^2\beta$. Jestliže nyní sdružíme goniometrické funkce se stejným argumentem a použijeme vzorce pro dvojnásobný argument funkce sinus, přejde upravovaná rovnost do tvaru: $\sin(\gamma+\alpha)\cdot\sin(\gamma-\alpha) = \sin^2\beta$. Pro vnitřní úhly v trojúhelníku platí: $\gamma + \alpha = \pi - \beta$, tj. $\sin(\gamma+\alpha) = \sin(\pi-\beta) = \sin\beta$. Po dosazení do předchozího tvaru upravované rovnosti a vykrácení obdržíme $\sin(\gamma-\alpha) = \sin\beta$. Odtud můžeme psát, že $\beta = \gamma - \alpha = \pi - (\gamma+\alpha) \implies 2\gamma = \pi$ a tedy $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Dokázali jsme tedy, že trojúhelník, ve kterém platí daná rovnost, je pravoúhlý, neboť úhel γ je pravý.

Jiný a snad poněkud jednodušší a kratší způsob důkazu vychází z platnosti sinové věty. Podle sinové věty můžeme napsat: $\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$, $\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$. Dosadíme-li tyto výrazy do výchozí rovnosti, dostaneme $\sin^2\gamma = \frac{a^2\sin^2\gamma}{c^2} + \frac{b^2\sin^2\gamma}{c^2}$. Nyní můžeme krátit výrazem $\sin^2\gamma$ (neboť γ je vnitřní úhel v trojúhelníku) a rovnost lze upravit na tvar Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Poslední úloha o trojúhelníku, kterou se chci zabývat, je důkaz následujícího tvrzení, které platí pro každý trojúhelník:

Jsou-li α, β, γ vnitřní úhly v trojúhelníku, pak platí:
$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma =$
$= \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Budeme upravovat složitější levou stranu rovnosti a snažit se převést ji pomocí ekvivalentních úprav do tvaru výrazu na pravé straně. Z prvního a třetího členu vytkneme výraz $\cos\beta$:
$\cos\beta(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma) + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma = \cos\beta\sin(\alpha + \gamma) + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

Zde jsme ještě při úpravě použili jeden ze součtových vzorců. Pro vnitřní úhly v trojúhelníku dále platí: $\alpha + \gamma = \pi - \beta \Rightarrow \sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta$. Náš výraz můžeme tedy dále přepsat do tvaru: $\cos\beta\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma = \sin\beta(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)$. Analogicky jako již bylo výše provedeno můžeme dále psát: $\cos\beta = \cos[\pi - (\alpha+\gamma)] = -\cos(\alpha + \gamma) = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma$. Za $\cos\beta$ nyní dosadíme z této úpravy a upravovaná levá strana přejde ve výraz: $\sin\beta(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\gamma) = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. To je již výraz z pravé strany původní rovnosti, k němuž jsme měli dospět a daná identita je dokázána.

Toto byly dvě úlohy ukazující některé zajímavé vlastnosti trojúhelníků, k nimž lze dospět s využitím elementárních vlastností trojúhelníků a součtových vzorců. Mnoho dalších zajímavých úloh s podobnou tématikou nalezneme v dnes již často zapomenutých sbírkách úloh pro střední školy z konce 19. a první poloviny 20. století. Někdy stačí úlohy přeformulovat, aby se staly aktuálními, jindy nabízejí inspiraci pro formulování úloh nových.

NIELS HENRIK ABEL A BERNHARD BOLZANO SE PŘOU O TO, ZDA BRATŘI KAIN A ABEL SPOLU S OPERACÍ „ZAVRAŽDIT" TVOŘÍ ABELOVSKOU GRUPU. BOLZANO VZÁPĚTÍ DOKÁŽE, ŽE VRAŽDA NENÍ KOMUTATIVNÍ.