Jura Charvát

Zkouška není všemocná

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 1, 58–64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150971

ZKOUŠKA NENÍ VŠEMOCNÁ

Poznámka k úloze zkoušky při řešení rovnic (apod.)

JURA CHARVÁT

Třicet let jako učitel matematiky na Stavební fakultě ČVUT v Praze přicházím do styku s absolventy středních škol. Třicet let se u nich setkávám s různými často se opakujícími chybnými návyky. V posledních několika letech jsem recenzoval asi dvacet učebnic matematiky vydávaných nakladatelstvím PROMETHEUS a vysázel jsem nejednu další učebnici tohoto nakladatelství. Též se mi dostala do rukou zadání některých přijímacích zkoušek na střední školy a zúčastnil jsem se několika setkání středoškolských učitelů. Dospěl jsem k přesvědčení, že některé nešvary ve výuce, ať už v učebnicích, nebo přímo v hodinách matematiky, se opakují a ovlivňují jak vztah k matematice, tak i matematické znalosti studentů.

Často se u studentů (ale i u učitelů a autorů učebnic) setkávám s **nevyjasněným chápáním úlohy zkoušky** při řešení rovnic a nerovnic, upravování algebraických výrazů apod.

Začnu pěti modelovými příklady. **Úmyslně se** v nich **dopustím několika** typických **chyb** a formulačních nepřesností.

Příklad 1. Řešte rovnici $x^2 - 2x = x$.
Řešení

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= x \\ x(x-2) &= x \qquad / : x \\ x - 2 &= 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$l(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3, \qquad p(3) = 3, \qquad l(3) = p(3)$$

Jediným kořenem dané rovnice je $x = 3$.

Příklad 2. Řešte rovnici $2^x + 2^{x+2} = 1$.

Řešení

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{x+2} &= 1 \\ 2^{x+x+2} &= 2^0 \\ 2x + 2 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Zkouška:

$$l(-1) = 2^{-1} + 2^{-1+2} = 2^{-1-1+2} = 2^0 = 1, \quad p(-1) = 1,$$
$$l(-1) = p(-1)$$

Rovnice má jediné řešení $x = -1$.

Příklad 3. Řešte rovnici $2^x + 2^{x+1} = \frac{9}{2}$.

Řešení

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{x+1} &= \tfrac{9}{2} \\ 2^{2x+1} &= \tfrac{9}{2} \\ 2 \cdot 2^{2x} &= \tfrac{9}{2} \\ 2^{2x} &= \tfrac{9}{4} \\ 2x &= \log_2 \tfrac{9}{4} \\ x &= \tfrac{1}{2} \cdot \log_2 \tfrac{9}{4} \\ x &= \log_2 \sqrt{\tfrac{9}{4}} \\ x &= \log_2 \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Zkouška:

$$l\left(\log_2 \tfrac{3}{2}\right) = 2^{\log_2 \frac{3}{2}} + 2^{\log_2 \frac{3}{2}+1} = \tfrac{3}{2} + 2 \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{9}{2}$$
$$p\left(\log_2 \tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{9}{2}$$
$$l\left(\log_2 \tfrac{3}{2}\right) = p\left(\log_2 \tfrac{3}{2}\right)$$

Rovnice má jediné řešení $x = \log_2 \frac{3}{2}$.

Příklad 4. Řešte nerovnici $\dfrac{4x+1}{x+4} < x.$

Řešení

$$\frac{4x+1}{x+4} < x$$
$$4x+1 < x^2+4x$$
$$1 < x^2$$

$$x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$$

Zkouška:

Pro $x = 2 \in (1,+\infty)$:

$$l(2) = \tfrac{9}{6},\quad p(2) = 2,\quad l(2) < p(2)$$

Pro $x = -2 \in (-\infty,-1)$:

$$l(-2) = \tfrac{-7}{2},\quad p(-2) = -2,\quad l(-2) < p(-2)$$

Řešeními dané nerovnice jsou všechna $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Příklad 5. Upravte výraz $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$ a správnost výpočtu ověřte dosazením $x = 2$.

Řešení. Daný výraz upravíme pro všechna $x \in \mathsf{R} - \{-1,1\}$:

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \frac{(x-4)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-4}{x+1}$$

Zkouška:

Do daného i výsledného výrazu dosadíme $x = 2$:

$$\frac{2^2-5\cdot 2+4}{2^2-1} = \frac{-2}{3},\qquad \frac{2-4}{2+1} = \frac{-2}{3}$$

Vidíme, že oba výrazy mají pro $x = 2$ stejnou hodnotu, výpočet je tedy správný.

Příklad 6. Řešte rovnici

$$\sqrt{x+2} = x. \tag{1}$$

Řešení

$$\sqrt{x+2} = x \qquad /^2$$
$$x + 2 = x^2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -1$$

Zkouška:

$$l(x_1) = l(2) = \sqrt{4} = 2, \quad p(x_1) = p(2) = 2, \quad l(x_1) = p(x_1)$$
$$l(x_2) = l(-1) = \sqrt{1} = 1, \quad p(x_2) = p(-1) = -1, \quad l(x_2) \neq p(x_2)$$

Jediným řešením dané rovnice je $x_1 = 2$.

Kde jsem v předcházejících příkladech chyboval?

Příkl. 1: Rovnice má navíc kořen $x = 0$. Přišel jsem o něj při dělení výrazem x.

Příkl. 2: Rovnice je vyřešena špatně. Při provádění zkoušky jsem udělal stejnou chybu, jako při řešení rovnice.

Příkl. 3: Zkouška prokázala správnost výsledku. Výpočet je však špatně, správný výsledek vyšel náhodou.

Příkl. 4: Výsledek je špatně. Má-li daná nerovnice (rovnice) nekonečně mnoho řešení, nelze se o správnosti výsledku přesvědčit dosazením několika z nich.

Příkl. 5: Dosazením konkrétní hodnoty $x = 2$ nelze ověřit správnost výsledku (srov. s příkl. 4), natož výpočtu (srov. s příkl. 3).

Příkl. 6: Zde chyby nejsou.

Nyní podrobně rozeberu, jak to vlastně se zkouškou je.

Mám na mysli zkoušku toho typu, kdy do obou stran dané rovnice nebo nerovnice, případně do výchozího a výsledného výrazu dosazujeme za neznámou nebo proměnnou (může jich být i několik) konkrétní hodnoty.

Nejčastějším případem je, že *řešíme rovnici o jedné neznámé a vypočteme kořen* x_0. K provádění zkoušky můžeme mít dva důvody:

I. *Rovnici jsme řešili ekvivalentními úpravami, nejsme si však jisti, zda jsme při tom neudělali nějakou chybu.* Proto vypočtený kořen x_0 dosadíme do výrazů na levé i pravé straně dané rovnice a vypočteme hodnoty získaných výrazů $l(x_0)$, $p(x_0)$.

Jestliže vyjde

$$l(x_0) = p(x_0),$$

je x_0 opravdu kořenem uvažované rovnice.

(I tento závěr je však nutno učinit *s jistou výhradou.* Je totiž možné, že jsme chybovali při výpočtu $l(x_0)$ nebo $p(x_0)$, což shodou okolností vyústilo v to, že nám vyšlo $l(x_0) = p(x_0)$.)

Vyjde-li

$$l(x_0) \neq p(x_0),$$

znamená to, že jsme určitě někde udělali chybu (není vyloučeno, že při provádění zkoušky). Tuto chybu je nutné najít.

II. *Rovnici jsme řešili důsledkovými úpravami.* Pak je *nutné* zkouškou zjistit, zda vypočtený kořen je opravdu kořenem dané rovnice, zda nejde o kořen, který „přibyl“ při některé z důsledkových úprav, viz příkl. 6.

(Ani tentokrát *nelze vyloučit*, že při provádění zkoušky uděláme *chybu* a díky jí „zavrhneme“ skutečný kořen řešené rovnice, nebo naopak „akceptujeme“ jako kořen vypočtené číslo, které ve skutečnosti kořenem není.)

Dodejme, že zkouškou můžeme pouze s výše uvedenými výhradami zjistit, zda vypočtená řešení, pokud jich je konečně mnoho, jsou řešeními uvažované rovnice. V žádném případě nelze zkouškou zjistit, zda tato rovnice nemá ještě některá další řešení, která jsme nenašli.

Poznámka. Z důvodu I. zkoušku zpravidla neprovádíme. I při řešení rovnic, pro něž obvykle používáme důsledkové úpravy vyvolávající *nutnost* zkoušky, se však lze vhodnými úvahami v průběhu řešení nezbytnosti zkoušky vyhnout. Ukažme to na příkl. 6:

Všechny výrazy v rovnici (1) jsou definovány pro $x \geqq -2$. Žádné $x \in \langle -2, 0)$ řešením rovnice (1) není, neboť pro každé takové x má levá strana rovnice (1) kladnou hodnotu, zatímco její pravá strana hodnotu zápornou. Stačí se tedy omezit na $x \in \langle 0, +\infty)$. Pro každé takové x je (1) nerovnost mezi nezápornými čísly, umocnění na druhou je v tomto případě ekvivalentní úprava. Dále pak výpočtem stejným jako v řešení příkl. 6 zjistíme, že rovnice (1) má v intervalu $\langle 0, +\infty)$ jediné řešení, a to $x = 2$.

Dosud jsem hovořil o zkouškách pro rovnice s konečně mnoha kořeny. Příklady 4, 5 však byly poněkud jiného typu. Nerovnice v příkl. 4 měla nekonečně mnoho řešení, v příkl. 5 jsme daný výraz upravovali pro nekonečně mnoho hodnot proměnné. V takových příkladech ověřit správnost výsledku dosazením konečně mnoha hodnot nelze.

Přitom s podobně chybnými formulacemi, jako je ta v zadání příkl. 5, se v rukopisech učebnic, zadáních středoškolských písemek apod. setkávám velmi často.

Dosazením konečně mnoha konkrétních čísel za proměnnou nemůžeme správnost výsledku „obecné" úlohy tohoto typu *ověřit.* Bylo by tak možné pouze případně zjistit, že výsledek je špatně. I kdybychom ověřili, že výsledek je správný (což dosazením konečně mnoha hodnot za proměnnou nelze udělat), neznamenalo by to, že jsme ověřili správnost výpočtu (srov. s příkl. 3). *Ověřit správnost* **výpočtu** *nelze jinak, než výpočet pozorně a podrobně krok za krokem zkontrolovat.*

Správná formulace v zadání příkl. 5 by byla např. tato:

— správnost výsledku pro $x = 2$ ověřte dosazením
(neověřujeme tak totiž správnost výsledku jako takového, tj. jeho správnost pro všechny „přípustné" hodnoty proměnné x, ale pouze pro $x = 2$)

— správnost výsledku „otestujte“ dosazením $x = 2$
(jde totiž pouze o jakousi „namátkovou kontrolu“ — „test“)

Shrnutí. Postavení zkoušky v příkladech uvažovaných typů je toto:

a) **Pokud předpokládáme, že jsme** v úvahách i výpočtech **neomylní**, nemá smysl provádět zkoušku z jiných důvodů, než při použití důsledkových úprav. **Zkouška** (spolu s naší neomylností) **nás** v takovém případě spolehlivě **dovede ke správnému výsledku.**

b) **Pokud** jsme realisté a **nejsme si jisti svou neomylností, může nás zkouška** pouze případně **upozornit na to, že jsme někde udělali chybu.** Tato chyba mohla být kdekoliv, třeba ve zkoušce samé. **Zkouškou** v tom případě **nemůžeme dokázat, že** získaný **výsledek je správný**, o výpočtu nemluvě.

Stačí vám to? Tím dneska končím.