Jiří Veselý
Zlatý řez a co vše s ním souvisí (2)

*Učitel matematiky*, Vol. 7 (1999), No. 1, 14–24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150964

# ZLATÝ ŘEZ

## a co vše s ním souvisí (2)[7]

JIŘÍ VESELÝ

**5.** Obecněji lze definovat řetězové zlomky jako výrazy (konečné či nekonečné) tvaru

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}},$$

kde $a_0 \in \mathbb{Z}$ a $b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots$ jsou z $\mathbb{N}$. Postupným „uřezáváním" dostáváme aproximace čísla, které řetězový zlomek vyjadřuje. Je např.

$$g \approx \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5} \ldots \quad \text{a} \quad \pi \approx \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \ldots ,$$

kde pro aproximující zlomky $P_n/Q_n$ platí (klademe $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$ a $P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$, abychom dostali jednoduché rekurence pro čitatele $P_n$ a jmenovatele $Q_n$)

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_1 a_0 + b_1}{a_1} = \frac{a_1 \cdot P_0 + b_1 \cdot P_{-1}}{a_1 \cdot Q_0 + b_1 \cdot Q_{-1}}, \ldots,$$
$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2}}{a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}}, \quad n \geq 1 .$$

V uvedené obecnosti nemusí řetězový zlomek (tj. posloupnost $\{P_n/Q_n\}$) obecně konvergovat a tak mu nelze rozumným způsobem přiřadit jeho hodnotu. Pokud to jde, není jednoznačně určen;

[7]První část článku byla uveřejněna v *Učiteli matematiky* **6** (1997/98), 153–158.

vyjádření racionálních čísel může mít tvar *nekonečného* řetězového zlomku.

Následující (běžné) zjednodušení může opět posloužit k procvičování rekurentních vzorečků, indukce a pomůže i pochopit „nekonečné procesy“ sloužící k vyjádření reálných čísel jiným způsobem než pomocí desetinných zlomků.

Poznamenejme nejprve, že se řetězové zlomky v minulosti těšily větší popularitě než dnes. Byly o nich napsány i monografie; viz např. [Pe]. Je to nástroj, který má stále význam, např. v teorii čísel. Všimneme si nyní několika jejich základních vlastností, které nám umožní lepší pohled na další zajímavou vlastnost čísla $g$. Omezíme se na speciální tvar řetězových zlomků. Budeme pracovat přesněji a jednodušší tvrzení si nejen uvedeme, ale některá i dokážeme.

Je-li $a_0 \in \mathbb{Z}$ a $a_n \in \mathbb{N}$, pak výraz

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{10}$$

budeme nazývat řetězovým zlomkem řádu $n$. Obecnější případy (uvědomte si, že výraz má smysl i v případě, že je $a_k \in \mathbb{R}$) nebudeme uvažovat. Tento řetězový zlomek (10) budeme zapisovat ve tvaru $[\,a_0; a_1, \ldots, a_n\,]$. Podobně pomocí zápisu $[\,a_0; a_1, a_2, \ldots]$ budeme popisovat i nekonečné řetězové zlomky, musíme je však korektně definovat.

Definujme dvě posloupnosti $\{A_n\}$ a $\{B_n\}$ tak, že položíme nejprve $A_{-1} = 1$, $B_{-1} = 0$, $A_0 = a_0$, $B_0 = 1$ a a induktivně pro $n \geq 1$

$$A_n = a_n A_{n-1} + A_{n-2}\,, \qquad B_n = a_n B_{n-1} + B_{n-2}\,;$$

zřejmě pro vyšetřovaný případ $a_n \in \mathbb{N}$ je též $A_n$ a $B_n$ z $\mathbb{N}$ a je

$$\frac{A_0}{B_0} = a_0\,, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1 + 0} = a_0 + \frac{1}{a_1}\,,$$

což po zobecnění dává pro všechna $n = 0, 1, 2, \dots$ a $a_n \in \mathbb{N}$ vztah

$$A_n/B_n = [\, a_0; a_1, a_2, \dots, a_n \,] .$$

Pro důkaz indukcí stačí ověřit „druhý krok":

$$\begin{aligned}
[\, a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \,] &= [\, a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + 1/a_{n+1} \,] = \\
&= \frac{(a_n + 1/a_{n+1})A_{n-1} + A_{n-2}}{(a_n + 1/a_{n+1})B_{n-1} + B_{n-2}} = \frac{A_n + A_{n-1}/a_{n+1}}{B_n + B_{n-1}/a_{n+1}} = \\
&= \frac{a_{n+1}A_n + A_{n-1}}{a_{n+1}B_n + B_{n-1}} = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} .
\end{aligned}$$

Dále snadno spočteme, že

$$\begin{aligned}
&A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n = \\
&= A_{n-1}(a_nB_{n-1} + B_{n-2}) - B_{n-1}(a_nA_{n-1} + A_{n-2}) = \\
&= (-1)(A_{n-2}B_{n-1} - B_{n-2}A_{n-1}) = \dots = \\
&= (-1)^n(A_{-1}B_0 - B_{-1}A_0) = (-1)^n, \qquad (11)
\end{aligned}$$

takže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro $a_n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \right| = \frac{1}{B_nB_{n-1}} . \qquad (12)$$

Nyní ukážeme, že pro každou posloupnost $\{a_n\}$ přirozených čísel a celé číslo $a_0$ řetězový zlomek $[\, a_0; a_1, a_2, \dots]$ *konverguje*, tj. existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} [\, a_0; a_1, a_2, \dots, a_n \,] = [\, a_0; a_1, a_2, \dots] ,$$

a touto rovností je vlastně nekonečný řetězový zlomek definován. K důkazu využijeme úplnost $\mathbb{R}$, tj. faktu, že každá cauchyovská posloupnost reálných čísel konverguje. Skutečně, při naší úmluvě ($a_n \in \mathbb{N}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$) platí nerovnost $B_n > B_{n-1}$, a tedy $B_n > 2B_{n-2}$; iterováním odtud dostaneme nerovnosti $B_{2n} > 2^n B_0 = 2^n$ a $B_{2n+1} > B_{2n} > 2^n$, takže je

$$B_n > (\sqrt{2})^{n-1} \,,$$

z čehož pomocí (12) vyplývá

$$\left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} \right| = \frac{1}{B_n B_{n-1}} < 2^{1-n} \,.$$

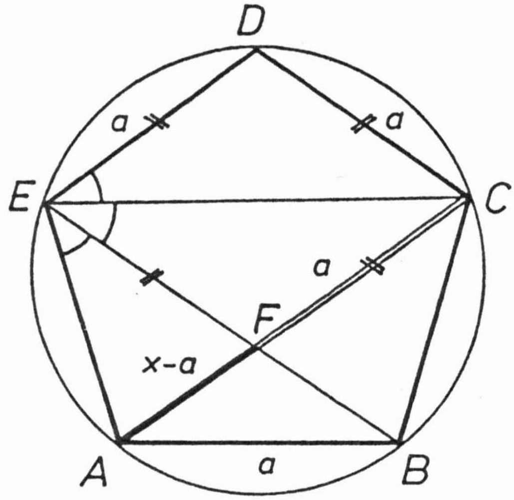
Není již obtížné dokázat, že pro každé iracionální číslo $x$ existuje nekonečný řetězový zlomek, jímž je $x$ vyjádřeno a že je tento zlomek určen jednoznačně. Stačí definovat ([x] je tzv. „celá část $x$“, tj. největší *celé* číslo $\leq x$) postupně $a_0 = [x]$, $r_1 = 1/(x - a_0)$, $a_1 = [r_1]$, atd. Toto nebudeme dokazovat, neboť to pro nás není příliš podstatné. Poznamenejme též, že racionálním číslům přiřazuje popsaný proces *konečné* řetězové zlomky.

Porovnáme-li vzorce pro $A_n/B_n$ pro vyjádření $g = [1; 1, 1, \ldots]$ s rekurencí (3), vidíme, že z $A_{-1} = 1$, $B_{-1} = 0$, $A_0 = 1$, $B_0 = 1$, plyne $A_n = F_{n+2}$, $B_n = F_{n+1}$, takže

$$g = \lim_{n \to \infty} F_{n+2}/F_{n+1} \,. \tag{13}$$

**7.** Existuje řada dalších souvislostí zlatého řezu $g$ s geometrickými objekty: zajímavá, byť trochu vzdálenější, je souvislost $g$ s tzv. zlatou spirálou či logaritmickou spirálou, nebudeme se jí však hlouběji zabývat (logaritmická spirála souvisí s tzv. zlatým trojúhelníkem; viz dále). Ne tak stará je souvislost se speciální parketáží, kterou v r. 1974 objevil ROGER PENROSE. Snadno si představíme vyplnění roviny pravidelnými trojúhelníky, čtverci nebo šestiúhelníky. To jsou jednoduché příklady parketáže. Příslušné parketáže mají tři, čtyři a šest „směrů symetrie“ a jsou „periodické“. Spokojíme se jen s intuitivním popisem a všimneme si „mezery“: jak je to s pětiúhelníky?

Pravidelné pětiúhelníky nevytvářejí parketáž roviny, přesto ale existuje nepravidelná parketáž roviny s „pěti směry“ symetrie (není již periodická), při jejíž konstrukci se opět objevuje $g$. Tuto parketáž objevil Penrose. Pokud se čtenář bude zajímat o geometrické souvislosti s $g$ hlouběji, může nahlédnout např. do [BeP]. Tyto souvislosti nepředstavují ostatně nic tak závratně překvapivého, protože $g$ hraje důležitou roli při konstrukci pětiúhelníku; viz např. [Ve2], str. 3. Všimneme si souvislosti s pětiúhelníkem, kterou lze opět snadno vyložit na střední škole, podrobněji.




Obr. 2

Libovolné dvě úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, které se protínají, se dělí navzájem v poměru $g$ resp. $1/g$; označíme-li délku strany pravidelného pětiúhelníku $a$, je délka libovolné jeho úhlopříčky rovna $ga$. Skutečně (sledujte postup na obr. 2), úhly $\sphericalangle DEC, \sphericalangle CEB$ a $\sphericalangle BEA$ jsou stejně velké ($36° = \pi/5$) a tak rovnoramenné trojúhelníky $\triangle EAC$ a $\triangle AFE$ jsou podobné (a jak se ukáže dále i *zlaté*, neboť tak se říká rovnoramenným trojúhelníkům, u nichž délky ramen jsou $g$-násobkem délky základny). Protože přímky $CD$ a $EB$ a rovněž $DE$ a $AC$ jsou rovnoběžné, platí $CF = a$. Je-li $x$ délka úhlopříčky, z již zmíněné podobnosti dostáváme $x : a = a : (a - x) = g$. Odtud vyplývají obě popsané vlastnosti.

Bez zajímavosti nejsou ani hodnoty goniometrických funkcí pro úhly, svázané s pětiúhelníkem, resp. zlatým trojúhelníkem, např.

$$\cos(2\pi/5) = \cos 72° = 1/2g \quad \text{a} \quad \cos(\pi/5) = \cos 36° = g/2 \; .$$

**8.** Bylo by chybou se domnívat, že lze nabídnout jen souvislosti s elementární matematikou. Všimneme si nyní trochu obtížnější látky, související se sčítatelností řad; viz např. [Vel], kde je přístupně vyložena užitečnost tzv. sčítacích metod.

Geometrická řada je příkladem obecnější řady, která se nazývá *mocninná řada*. Mocninná řada (v tomto případě o středu 0) je řada tvaru $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$; čísla $a_k$ jsou její koeficienty. Dá se dokázat, že platí např.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,;$$

první dva vzorečky platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (a dokonce i pro všechna $x \in \mathbb{C}$), ale třetí pouze pro ta $x$, pro něž je $|x| < 1$. Levá strana poslední rovnosti má smysl pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$. Proto dosazením $x = -1$ dostáváme vztah $1/2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ a podobně pro $x = 2$ vztah $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$; oba vztahy jsou na první pohled nesmyslné, neboť přiřazujeme jakýsi „součet" divergentním řadám.

Mocninné řady konvergují na velmi pravidelných množinách: konverguje-li taková řada pro nějaké $x = \zeta$, konverguje i pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (a dokonce z celé komplexní roviny $\mathbb{C}$), pro něž platí $|x| < |\zeta|$; může se však stát, že řada konverguje pouze v jediném bodě $x = 0$. Dá se určit součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$, kde $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost Fibonaciho čísel? Předpokládejme, že tato řada konverguje nejen v počátku a pokusme se určit její součet $s(x)$. Platí

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = F_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k = x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1} + F_{k-2}) x^k =$$
$$= x + x \sum_{k=1}^{\infty} F_k x^k + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = x + x s(x) + x^2 s(x)\,.$$

Odtud snadno spočteme

$$s(x) = x/(1 - x - x^2)\,. \tag{14}$$

Po dosazení $x = 1$ tak dostaneme $\sum_{k=0}^{\infty} F_k = -1$, což je výsledek na první pohled opět dosti absurdní. Rovnost (14) však platí pouze pro ta $x \in \mathbb{R}$, resp. $x \in \mathbb{C}$, pro která je $|x| < h = 0,618\ldots$[8], a to je zdrojem oné „absurdity“. Avšak výsledek není tak absurdní, jak by se mohlo zdát. Předpokládejme na okamžik, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} F_k$ má nějaký „rozumný součet“ $s$. Potom

$$\begin{aligned} 2s &= F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_0 + F_1 + F_2 + \cdots = \\ &= F_0 + (F_1 + F_0) + (F_2 + F_1) + (F_3 + F_2) + \cdots = \\ &= F_0 + F_2 + F_3 + \cdots = s - F_1 = s - 1\,. \end{aligned}$$

Jde tedy o úvahu podobnou následujícímu „výpočtu“

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - s\,,$$

a tedy $s = 1/2$. Tento postup pochází z doby, než se konstituoval pojem konvergence. Je nalezený výsledek stále tak absurdní? Na vysvětlenou: i s divergentními řadami se dá pracovat a některým lze přiřadit určité zobecněné součty tak, že pod jiným zorným úhlem se předvedený výsledek stane „skoro přirozený“.

**9.** Přiblížení nekonečného řetězového zlomku $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ konečnými řetězovými zlomky $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ je příkladem aproximace iracionálních čísel racionálními. Dokážeme tvrzení o tom, jak je kvalitní tato aproximace pro $g$. Nejdříve dokážeme, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| g - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| \cdot F_n^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,. \tag{15}$$

K tomu je vhodné dokázat, že pro libovolnou Lucasovu posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ (tj. vyhovující rekurenci (3)), platí vzorec

$$c_{n+1} = F_n c_2 + F_{n-1} c_1\,. \tag{16}$$

To je zřejmé pro případ $n = 2$, neboť je

$$c_{2+1} = c_3 = c_2 + c_1 = 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_1 = F_2 c_2 + F_1 c_1\,.$$

---

[8] Na množině $\{x \in \mathbb{C};\ |x| < h\}$ je $s$ holomorfní funkce a bod $h$ je jejím pólem. Poloměr konvergence řady lze též spočíst jednoduše podle podílového kritéria a vzorce (13).

Také druhý krok indukce se snadno provede:

$$\begin{aligned} c_{n+1+1} &= c_{n+2} = c_{n+1} + c_n = \\ &= F_n c_2 + F_{n-1} c_1 + F_{n-1} c_2 + F_{n-2} c_1 = \\ &= (F_n + F_{n-1}) c_2 + (F_{n-1} + F_{n-2}) c_1 = \\ &= F_{n+1} c_2 + F_n c_1 \,. \end{aligned}$$

Z rekurence (1) plyne, že $\{g^k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{(-1/g)^k\}_{k=0}^{\infty}$ jsou Lucasovy posloupnosti a lze na ně použít (16). Pak člen $c_{n+1}$ je $n$-tou mocninou a platí

$$g^n = F_n g + F_{n-1}\,, \quad \text{a též} \quad (-1/g)^n = -F_n/g + F_{n-1}\,.$$

Nyní již snadno dokážeme (15) : platí

$$|1/g^n| = |F_{n-1} - F_n/g| = |F_{n+1} - F_n - F_n(g-1)| = |F_{n+1} - F_n g|\,,$$

z čehož dostaneme

$$\left| g - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| \cdot F_n^2 = |gF_n - F_{n+1}| \cdot F_n = \frac{F_n}{g^n}\,.$$

S pomocí Binetova vzorce (6) dostáváme odtud

$$\left| g - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| F_n^2 = g^{-n}\left(g^n - (-1/g)^n\right)/\sqrt{5} = \left(1 - (-1)^n h^{2n}\right)/\sqrt{5}\,,$$

kde výraz na pravé straně s ohledem na $h < 1$ konverguje k $1/\sqrt{5}$. Zároveň vidíme, že z poslední rovnosti plyne s ohledem na „střídání znamének" ve výrazu existence *nekonečně mnoha* $n \in \mathbb{N}$, pro něž platí

$$\left| g - \frac{F_{n+1}}{F_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,F_n^2}\,.$$

Dá se (celkem elementárně) dokázat, že pro každé $K < 1/\sqrt{5}$ existuje pouze *konečně mnoho* různých zlomků $p/q \in \mathbb{Q}$, pro něž platí

$$\left| g - \frac{p}{q} \right| < K \cdot \frac{1}{q^k} \tag{17}$$

s $k = 2$. Obecněji platí toto: pro každé iracionální $x$ existuje taková konstanta $K$, že nerovnost

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < K \cdot \frac{1}{q^2} \tag{18}$$

má *nekonečně mnoho* řešení tvaru $p/q$. Ta iracionální čísla, jejichž nekonečný řetězový zlomek $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ obsahuje čísla $a_k \neq 1$ pouze pro konečně mnoho $k \in \mathbb{N}$, se nazývají *spřízněná* čísla s $g$; tak např. $g^2$ či $h$ jsou spřízněná s $g$. Pro všechna iracionální $y \in \mathbb{R}$, která *nejsou* spřízněna s $g$ existuje *nekonečně mnoho* různých zlomků $p/q$ takových, že platí

$$\left| y - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{q^2} \, .$$

Zároveň pro každé $k > 2$ a každé $K > 0$ existuje nekonečně mnoho $x \in \mathbb{R}$, pro něž nerovnost (17) má nekonečně mnoho různých řešení $p/q \in \mathbb{Q}$.

V tomto smyslu je číslo $g$ (spolu se svými „příbuznými") to iracionální číslo, které je „nejhůře aproximovatelné" racionálními čísly v závislosti na jmenovateli zlomku, kterým je toto racionální číslo vyjádřeno.

**10.** Cesta k souvislosti $\pi$ a $g$ je poněkud obtížnější a tak prozradíme výsledek a pak naznačíme, jak se k němu dospěje. Zvídavého čtenáře odkazujeme na [Ca][9]. Čtenář k pochopení tohoto vztahu potřebuje znát mj. součtový vzorec pro funkci arccotg. Platí

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arccotg} 2 + \operatorname{arccotg} 5 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} F_{2k} \, . \tag{19}$$

Poznamenejme, že pak vzhledem ke známé formuli obsahující pět důležitých konstant $e^{\pi i} + 1 = 0$, jsme dostali nepřímo i jistou

[9]Děkuji autorovi za dosud nezveřejněný článek, který mi dal k dispozici.

souvislost s číslem e. Zde je stručný popis postupu:

$$
\begin{gathered}
F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = \\
= F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+1} - F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = \\
= F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} - F_nF_{n+2} = \\
= F_n(F_{n+1} - F_{n+2}) + F_{n-1}F_{n+1} = \\
= (-1)(F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}) = (-1)^2(F_{n-1}^2 - F_{n-2}F_n) = \cdots = \\
= (-1)^n(F_1^2 - F_0F_2) = (-1)^{n+1} ,
\end{gathered}
$$

neboli po jednoduché úpravě, za předpokladu $n \geq 1$ (je $F_2 = F_1$, pro $n = 0$ nemohli bychom dělit),

$$
F_{n+3} = \frac{F_{n+1}F_{n+2} + (-1)^n}{F_{n+2} - F_{n+1}} . \tag{20}
$$

Poznamenávám, že jsme při úpravách stále používali v různé formě pouze rekurenci (3). Po dosazení $n = 2k$ do (20) dostaneme ze „součtového vzorce“ pro funkci arccotg

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arccotg} F_{2k+3} &= \operatorname{arccotg}\big((F_{2k+1}F_{2k+2} + 1)/(F_{2k+2} - F_{2k+1})\big) = \\
&= \operatorname{arccotg} F_{2k+1} - \operatorname{arccotg} F_{2k+2} .
\end{aligned}
$$

Sečtením rovností, které dostaneme z předcházející rovnosti dosazením $k = 1, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arccotg} F_5 &= \operatorname{arccotg} F_3 - \operatorname{arccotg} F_4 , \\
\operatorname{arccotg} F_7 &= \operatorname{arccotg} F_5 - \operatorname{arccotg} F_6 , \\
\cdots &= \cdots \\
\operatorname{arccotg} F_{2n+3} &= \operatorname{arccotg} F_{2n+1} - \operatorname{arccotg} F_{2n+2} ,
\end{aligned}
$$

dostaneme rovnost

$$
\operatorname{arccotg} F_3 = \pi/4 = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arccotg} F_{2k+2} + \operatorname{arccotg} F_{2n+3} ,
$$

z níž již limitním přechodem pro $n \to \infty$ plyne (19).

## LITERATURA:


[BeP] Beutelspacher, A., Petri, B., *Der Goldene Schnitt*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996 (2. vydání, první je z roku 1988).

[Ca] Calda, E., *Kterak od jedné vlastnosti Fibonacciovy posloupnosti ku číslu $\pi$ dospěti možno jest*, (rukopis, vyjde patrně v časopise Matematika – fyzika – informatika).

[Ev] Eves, H., *An introduction to the history of mathematics*, CBS College Publishing, New York, 1982 (5. vydání, první je z roku 1953).

[Kli] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[Ko] Koecher, M., *Klassische elementare Analysis*, Birkhäuser Ver., Basel, 1987.

[Kon] Konforovič, A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989.

[KrL] Křížek, M., Liu, L., *Matematika ve starověké Číně*, Pokroky MFA **42** (1997), 223 – 233.

[Pe] Perron, O., *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1914.

[Ve1] Veselý, J., *O násobení řad*, Učitel matematiky, (v tisku).

[Ve2] Veselý, J., *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha, 1997.

[Wa] Walter, W., *Analysis 1*, Springer Ver., Berlin, 1992 (3. vydání, původně třetí svazek řady Grundwissen Mathematik).



NIELS HENRIK ABEL VYVOLÁVÁ TRANSCENDENTNÍ ČÍSLO