Dag Hrubý

Surdické výrazy

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 1, 9–13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150963

SURDICKÉ VÝRAZY

DAG HRUBÝ

Surdické číslo čili dvojrodé číslo nazývá se dvojčlen složený z čísla racionálního a iracionálního ([1], str. 390). Jsou-li dva výrazy surdické stejné, není to jinak možno, než že se shodují v částech racionálních i iracionálních. Tedy z rovnice

$$x + \sqrt{y} = x_1 + \sqrt{y_1} \tag{1}$$

plyne rovnice $x = x_1, y = y_1$ ([2], str.737).[6]

Těmito citacemi z Ottova slovníku naučného se dostáváme k surdickým výrazům. Není na tom nic objevného, naopak, jedná se o starší záležitost. Se surdickými výrazy se můžeme setkat v celé řadě dříve vydaných sbírek a učebnic matematiky. Členům klubu Paracelsus je důvěrně známý např. příklad 69 ze sbírky [3]. Surdickými výrazy můžeme oživit výuku matematiky, zejména v suplovaných hodinách za nemocného kolegu Nováka nebo za nepřítomnou kolegyni Kodytkovou, která dostala omylem lázně již v únoru. Takovou suplovanou hodinu zahájíme tím, že na tabuli napíšeme rovnost

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{2}$$

a vyzveme studenty k všeobecné diskusi. Ve vyspělé třídě můžeme naznačit, že se jedná o rovnici o dvou neznámých x, y se dvěma parametry a, b. I když bylo suplování řádně oznámeno, lze předpokládat, že polovina studentů nebude mít sešit do matematiky, což bude pro nás výhodné, protože tito studenti se nebudou zdržovat psaním do sešitu a o to více budou s námi diskutovat. Na tyto studenty se zejména zaměříme. Ona taková suplovaná hodina, to

[6]Poznamenejme, že předcházející úvaha není matematicky v pořádku. Z rovnice (1) mohou plynout i jiné závěry, než je výše uvedený. Např. $x = \sqrt{y}_1, x_1 = \sqrt{y}$.

je velmi důležitá hodina a je jen s podivem, že jí didaktici matematiky věnují málo pozornosti. V suplované hodině se nezkouší, nepíšou písemky a nezadávají domácí cvičení. Atmosféra takové hodiny je zcela jiná, a profesor Karel Bystrý toho patřičně využije k oslavě matematiky. Suplovaná hodina, toť velké téma, které si zaslouží odpovědnějšího přístupu a seriozního zpracování.

Vraťme se ale k rovnosti (2). Po umocnění dostáváme

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy} \tag{3}$$

což je rovnost z úvodu našeho článku. V souladu s Ottovým slovníkem naučným potom je

$$a = x + y \tag{4}$$

$$b = 4xy \tag{5}$$

Z rovnosti (4) plyne $y = a - x$ a po dosazení do (5) za y dostáváme

$$b = 4x(a - x) \tag{6}$$

a po úpravě pak

$$4x^2 - 4ax + b = 0, \tag{7}$$

což můžeme přepsat následovně

$$(2x - a)^2 = a^2 - b, \tag{8}$$

a tedy

$$|2x - a| = \sqrt{a^2 - b}. \tag{9}$$

Zřejmě musí být $a^2 - b \geq 0$. Položíme-li $\sqrt{a^2 - b} = r, r \geq 0$, pak dostaneme $|2x - a| = r$. Odtud je $2x - a = r$ nebo $2x - a = -r$, tj.:

$$x_1 = \frac{a + r}{2} \quad \text{nebo} \quad x_2 = \frac{a - r}{2}. \tag{10}$$

Pro y pak ze (4) plyne

$$y_1 = a - x_1 = \frac{a - r}{2} \quad \text{nebo} \quad y_2 = a - x_2 = \frac{a + r}{2}. \tag{11}$$

Soustava (4),(5) má tedy dvě řešení

$$\left[\frac{a+r}{2}, \frac{a-r}{2}\right], \left[\frac{a-r}{2}, \frac{a+r}{2}\right]. \tag{12}$$

Je v podstatě jedno, s kterým řešením budeme dále pracovat. Rozhodněme se pro

$$x = \frac{a+r}{2}, \quad y = \frac{a-r}{2}. \tag{13}$$

Po dosazení do (2) dostáváme

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} + \sqrt{\frac{a-r}{2}}, \tag{14}$$

kde $r^2 = a^2 - b$, resp. vzhledem k $r \geq 0$ $r = \sqrt{a^2-b}$. Po dosazení za r do (13) lze také psáti

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \tag{15}$$

Z dosavadních úvah tedy plyne, že výraz $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, kde a, b jsou přirozená čísla taková, že $a^2 \geq b$, lze zjednodušit, když výraz $a^2 - b$ lze odmocnit, tedy když je druhou mocninou přirozeného čísla. Sami jistě dokážete řešit rovnici

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \tag{16}$$

a odvodit tak vzorce

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} - \sqrt{\frac{a-r}{2}}. \tag{17}$$

Tím jsme ukončili teoretický výklad týkající se surdických výrazů a můžeme přikročit k řešení příkladů.

Příklad 1. Zjednodušte výrazy:

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

c) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$

Řešení:

a) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{6+\sqrt{20}}$, $a = 6$, $b = 20$ a $r = \sqrt{36-20} =$
$= \sqrt{16} = 4$

$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5}+1.$

b) $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{7+\sqrt{40}}$, $a = 7$, $b = 40$ a $r = \sqrt{49-40} =$
$= \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} + \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5}+\sqrt{2}.$

c) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{7-\sqrt{40}}$, $a = 7$, $b = 40$ a $r = \sqrt{49-40} =$
$= \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} - \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}.$

Příklad 2. Vypočtěte: $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

Řešení:

Položme $x = \sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}, x > 0$. Po umocnění dostáváme: $x^2 = 14+6\sqrt{5}-2\sqrt{14+6\sqrt{5}}\cdot\sqrt{14-6\sqrt{5}}+14-6\sqrt{5} =$
$= 28 - 2\sqrt{196-180} = 20 = 2\sqrt{5}$, vzhledem k $x > 0$.

Jiný způsob řešení:

$\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \sqrt{14+\sqrt{180}}, a = 14, b = 180, r = 4$

$\sqrt{14+\sqrt{180}} = \sqrt{\frac{14+4}{2}} + \sqrt{\frac{14-4}{2}} = 3+\sqrt{5}$

$\sqrt{14-\sqrt{180}} = \sqrt{\frac{14+4}{2}} - \sqrt{\frac{14-4}{2}} = 3-\sqrt{5}$ a proto je $\sqrt{14+6\sqrt{5}}-$
$-\sqrt{14-6\sqrt{5}} = 3+\sqrt{5}-(3-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$

Příklad 3. V množině $\mathbb{N}$ řešte rovnici:

$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

Řešení:

Podobně jako v případě rovnosti (2) dostáváme po umocnění $10+$
$+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}+ = x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$ Tato rovnost

je splněna za podmínek: $x+y+z=10 \wedge xy=6 \wedge xz=10 \wedge yz=15$
Řešením této soustavy je trojice $[2;3;5]$, tj. $x=2$, $y=3$, $z=5$.
Můžeme tedy psáti $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

ÚLOHY

1. Vypočtěte:

a) $\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}$

c) $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

2. V $\mathbb{N}$ řešte rovnice:

a) $\sqrt{6+\sqrt{11}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ b) $\sqrt{6-\sqrt{42}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

3. Vypočtěte:

a) $(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$ b) $(\sqrt{9+4\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}})^2$

c) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}})^2$

Přeji Vám, abyste si surdické výrazy oblíbili a aby Vám přinášely radost, aspoň v těch suplovaných hodinách.

LITERATURA:

[1] *Ottův slovník naučný, 24.díl*, Praha, 1906.
[2] *Ottův slovník naučný, 12.díl*, Praha, 1897.
[3] Maška, O., *Řešené úlohy z matematiky*, SNTL, Praha, 1964.