Jiří Vinter

Fejeton o Bikubikovi

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 4, 253–[257]

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150959

FEJETON O BIKUBIKOVI

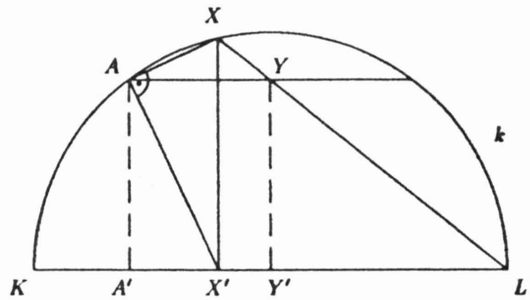
JIŘÍ VINTER

Bikubik je člověk, který se snaží středoškolskými prostředky (i když je neovládá) vyřešit klasický neřešitelný problém zdvojení krychle. O tom, že tento člověk je obvykle též Trisektor a Fermatovec, tu snad nemusím psát.

Dne 4. června 1999 se konal již tradiční Den na MFF. Hojná účast vypovídala o tom, že to s naší mládeží zase není tak špatné. Bouřlivý ohlas si zasloužila přednáška Miroslava Zeleného: *Velká Fermatova věta – historie nejslavnějšího matematického problému.* K diskusi se přihlásil jeden člověk (ano je to ten, o kterém píši) s tím, že nikdo vlastně neví, jak velká Fermatova věta vlastně zní, protože je zapsána latinsky a nikdo to není schopen správně přeložit. A pokračoval dalšími věcmi, více či méně souvisejícími s tím, o čem mluvil předtím, a nedal se odbýt. Snahu ukončit jeho neplánovaný příspěvek komentoval přiléhavě řka: „Na akademické půdě se má říkat pravda!“ (s bouřlivým ohlasem nevěřícně přihlížejících studentů). Načež to vyznělo do ztracena.

Následující přednáška Emila Caldy byla též skvělá a co se nestalo: na její závěr se dostavil opět náš diskutér a (to je nejlepší metoda jak na ně) dostal prostor pro své výsledky. Jeho přítomnost u tabule si snadno zjednala pozornost již rozcházejících se studentů. Z jeho podání nebylo úplně zřejmé, co má platit, a tak jsem si musel udělat jasno opakovanými dotazy. Tvrdil, že jedna z úseček na obrázku má délku $\sqrt[3]{2}$. Jeho náčrt zde reprodukuji s nutným označením některých bodů a vynecháním nepotřebných spojnic.

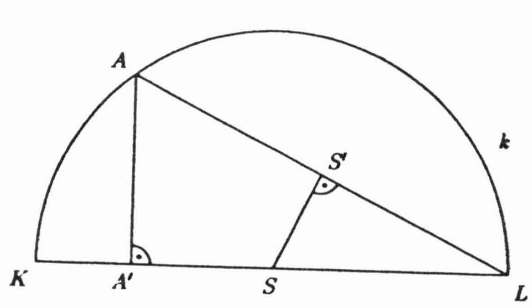
Bikubikova hypotéza: *Mějme kružnici k s průměrem KL. Pak na této kružnici existuje bod A, pro který platí, že je-li A' pata kolmice spuštěné z bodu A na průměr KL a je zvolen jistý poloměr kružnice k, pak $|AA'| = 1$ a $|A'L| = 2$. Dále platí, že na kružnici k existuje bod X, že je-li X' pata kolmice spuštěné* *z bodu X na průměr KL, pak trojúhelník AXX' je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A. Označíme-li pak Y průsečík přímky XL a rovnoběžky s průměrem KL vedoucí bodem A, a Y' patu kolmice spuštěné z bodu Y k průměru KL, potom je $|Y'L| = \sqrt[3]{2}$.*



Tato hypotéza se ukázala jako skutečná pokladnice úloh, které jsou vesměs řešitelné metodami přístupnými středoškolákovi.

Úloha 1: *Sestrojte kružnici $k(S, r)$ s průměrem KL a na ní bod A tak, aby $|AA'| = 1$ a $|A'L| = 2$, kde A' je patou kolmice spuštěné z bodu A na průměr KL.*

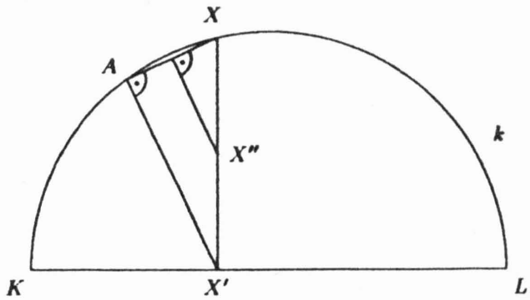
Jedná se tedy o úlohu na sestrojení kružnice, procházející body A a L, jejíž střed leží na přímce $A'L$. Trojúhelník $A'LA$ sestrojíme podle věty *sus*, střed kružnice k leží na průsečíku osy úsečky AL a přímky $A'L$. Tím je dán i poloměr kružnice. Číselné vyjádření hledaných veličin získáme pomocí Pythagorovy věty a z podobnosti trojúhelníků $A'LA$ a $S'LS$, kde bod S' je střed úsečky AL.



$|AL| = \sqrt{5}, \quad r = |SL| = \frac{5}{4}.$

Úloha 2: *Sestrojte bod X na kružnici $k(S,r)$ tak, aby trojúhelník AXX' byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A; bod X' je patou kolmice spuštěné z bodu X na průměr KL.*

Tato úloha je již značně obtížnější. Kdybychom se pokusili takový bod X sestrojit eukleidovsky, nepovedlo by se nám to. Jak to mohu tvrdit? Uvidíte. Vyjdeme z následujícího obrázku a napíšeme vztahy, které musí pro souřadnice hledaného bodu X platit.



Označíme-li souřadnice hledaného bodu (v kartézské soustavě souřadnic s počátkem ve středu S kružnice k a osou $x = KL$) $X = [x_1, x_2]$, pak musí platit

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

protože bod X leží na kružnici $k(S,r)$ (poloměr této kružnice jsme již vypočetli). Tato rovnice však k jednoznačnému určení bodu X nestačí. Vyjdeme z další podmínky, kladené na polohu bodu X. Trojúhelník $X'XA$ má být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A. Znamená to (mimo jiné), že bod A musí ležet na kružnici s průměrem $X'X$ (Thaletova věta). Její střed bude tedy patrně ležet ve středu úsečky $X'X$. Označili jsme ho X''. Bod X'' má stejnou x-ovou souřadnici jako bod X (y-ová je poloviční). Pro souřadnice bodu X dostáváme vztah (podrobné kroky nechávám na čtenáři)

$$x_2 = \left(x_1 + \frac{3}{4}\right)^2 + 1,$$

čili rovnici paraboly s vrcholem v bodě A. Tato parabola protíná naši kružnici ještě v jednom bodě – v hledaném bodě X. Už je vidět, že bod X eukleidovsky nesestrojíme? Zkusme tedy nalézt souřadnice bodu X výpočtem, řešením soustavy rovnic (1) a (2). Pomocí substituce $z = x_1 + \frac{3}{4}$ dojdeme k normované kubické rovnici

$$z\left(z^3 + 3z - \frac{3}{2}\right) = 0,$$

jejíž kořen $z = 0$ vede na bod $A = [-\frac{3}{4}, 1]$. Další reálný kořen je možno určit pomocí Cardanových vzorců (přijít na jejich tvar bez pomůcky je pěkné cvičení). Nebudu unavovat čtenáře podrobnostmi, uvedu pouze výsledek:

$$z = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Vida! K sestrojení dané úsečky onu úsečku potřebujeme! Vypadá to celé nějak podivně. Souřadnice hledaného bodu X jsou tedy

$$X = \left[z - \frac{3}{4}, z^2 + 1\right]$$

Úloha 3: *Zbývá určit průsečík úsečky XL a přímky procházející bodem A a rovnoběžné s KL (byl již označen jako bod Y). Pak jen zjistit vzdálenost paty kolmice Y' a bodu L. Kolik asi vyjde?*

Pro hledanou vzdálenost $d = |Y'L|$ platí:

$$d = \frac{2 - z}{1 + z^2}$$

Dosazením samozřejmě vyjde $d = \sqrt[3]{2}$. Bikubikova hypotéza **platí!** (pokud je formulována tak, jak bylo uvedeno). Kdybychom chtěli $\sqrt[3]{2}$ sestrojit eukleidovsky, dostali bychom se do nepřekonatelných obtíží, pokud bychom měli sestrojit bod X. Průsečík kružnice a paraboly je (v obecném případě) nad možnosti pravítka a kružítka. Vzpomeňme si, že jsme $\sqrt[3]{2}$ museli použít pro určení polohy bodu X. Není jednodušší tvrdit toto? „Dáte-li mi úsečku dané délky, sestrojím vám úsečku té samé délky!“. Nicméně celé je to moc pěkné a proto o tom píši. Zbývá docela zajímavá otázka.