Naďa Stehlíková

O jedné zajímavé knize z elementární teorie čísel (2)

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 4, 231–236

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150954`

O JEDNÉ ZAJÍMAVÉ KNIZE Z ELEMENTÁRNÍ TEORIE ČÍSEL (2)

NAĎA STEHLÍKOVÁ

2. Prvočísla

Kapitola zkoumá vlastnosti prvočísel a je završena trojicí úloh, které v podstatě testují hloubku studentova porozumění pojmu prvočíslo. Objevuje se v nich slovo *pryme*, což je hříčka na slovo *prime* (prvočíslo) a v angličtině jako slovo neexistuje. Autor jím v postatě vyjadřuje „prvočíslo v rámci nějaké množiny“. Protože čeština není tak flexibilní jako angličtina a nesnáší nové výrazy tak snadno, překládáme slovo „pryme“ jako nerozložitelný prvek.

Problem 7. Let $E = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$. Note that E is closed with respect to multiplication, i.e. the product of any two elements in E is again an element of E since $(2k)(2l) = 2(2kl)$. A "pryme" in E is an integer n in E which cannot be expressed as the product of two integers in E, both of which are less than n. For example, 6, 10, 14 are "prymes", while $8 = 2 \cdot 4$ and $24 = 6 \cdot 4$ are "composites". Which elements of E are "prymes" in E?

Problem 8. Let $T = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$. Is T closed with respect to multiplication? Why? Which elements of T are "prymes" in T?

Problem 9. Let $M = \{5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, \dots\}$; M consists of all integers of the form $4n + 1$. Show that M is closed with respect to multiplication. Find four "prymes" and four "composites" in M.

★ ★ ★

Úloha 7. Nechť $E = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$. Všimněte si, že E je uzavřená vzhledem k násobení, tj. součin dvou libovolných prvků z E je zase prvek z E, protože $(2k)(2l) = 2(2kl)$. „Nerozložitelný prvek" v E je číslo z E, které nemůžeme napsat jako součin dvou čísel z E menších než n. Například 6, 10, 14 jsou „nerozložitelné prvky", zatímco $8 = 2 \cdot 4$ a $24 = 6 \cdot 4$ jsou „složená" čísla. Které prvky z E jsou „nerozložitelné" v E?

Úloha 8. Nechť $T = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$. Je T uzavřená vzhledem k násobení? Proč? Které prvky z T jsou v T „nerozložitelné"?

Úloha 9. Nechť $M = \{5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, \dots\}$; M obsahuje všechna čísla tvaru $4n + 1$. Ukažte, že M je uzavřená vzhledem k násobení. Najděte čtyři „nerozložitelné prvky" a čtyři „složená" čísla v M.

3. Kritéria dělitelnosti

Kapitola vrcholí zkoumáním kritérií dělitelnosti v různých číselných soustavách. Autor vede studenty pomocí nápověd k tomu, aby si uvědomili, jakou roli hrála desítková soustava v důkazech kritérií dělitelnosti, které prováděli na začátku kapitoly, a na základě toho uměli podobné důkazy provést i v soustavách o jiných základech.

Problem 10. Is the divisibility test for 3 valid in base 7? in base 5? For what bases b is it valid? Justify your answer if you can.

Problem 11. For what bases b is your divisibility-by-9 test valid? Justify your answer if you can.

Problem 12. For what bases b is your divisibility-by-4 test valid? Justify your answer if you can.

Problem 13. For those bases b for which any of the above divisibility tests were not valid, see if you can formulate a new divisibility test. For example, find

(a) a "divisibility by 4" test for base 5,
(b) a "divisibility by 5" test for base 9,
(c) a "divisibility by 9" test for base 12.

★ ★ ★

Úloha 10. Platí kritérium dělitelnosti třemi v soustavě o základu 7? o základu 5? Pro jaké základy b platí? Pokuste se svou odpověď zdůvodnit.

Úloha 11. Pro jaký základ b je platné kritérium dělitelnosti devíti? Pokuste se svou odpověď zdůvodnit.

Úloha 12. Pro jaký základ b je platné kritérium dělitelnosti čtyřmi? Pokuste se svou odpověď zdůvodnit.

Úloha 13. Pro základy b, pro které neplatila žádná dosud nalezená kritéria, zkuste zformulovat nové kritérium dělitelnosti. Například najděte

(a) kritérium dělitelnosti čtyřmi pro základ 5,
(b) kritérium dělitelnosti pěti pro základ 9,
(c) kritérium dělitelnosti devíti pro základ 12.

4. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

Přes číselné příklady jsou studenti v těchto kapitolách vedeni k objevu základních vlastností pojmů největší společný dělitel (NSD) a nejmenší společný násobek (NSN) a jejich vzájemného vztahu. Pomocí řešení konkrétních číselných příkladů si také sami vyvodí Eukleidův algoritmus a teprve potom je jim autorem vysvětlen. Mohou ho využít i pro úlohu 14 uvedenou níže.

Problem 14. Find all possible values for:

(a) $GCF(p, q)$ p, q distinct primes
(b) $GCF(n, n+1)$ n any integer
(c) $GCF(n, n+2)$ n any integer
(d) $GCF(n, n+5)$ n any integer
(e) $GCF(n, n+30)$ n any odd integer
(f) $GCF(n, n+30)$ n any integer
(g) $GCF(n^2+1, n+1)$ n any integer
(h) $GCF(8n+7, 5n+6)$ n any integer
Justify your answers.

Problem 15. Determine whether the following statements are true or false. Justify your answers. For all integers a, b, c:

(a) If $LCM(a, b) = LCM(a, c)$, then $b = c$.

(b) If $GCF(a, b) = GCF(a, c)$, then $LCM(a, b) = LCM(a, c)$.

(c) $LCM(a^2, b^2) = |LCM(a, b)|^2$.

Problem 16. Find a general formula for:

(a) $LCM(p, q)$ if p, q are primes

(b) $LCM(n, n + 1)$ if n is any integer

(c) $LCM(n, n + 2)$ if n is any odd integer

(d) $LCM(n, n + 2)$ if n is an even integer

(e) $LCM(n, n + 6)$ if n is an odd multiple of 3

Justify your answers.

★ ★ ★

Úloha 14. Najděte všechny možné hodnoty pro:

(a) $NSD(p, q)$ p, q jsou různá prvočísla

(b) $NSD(n, n + 1)$ n je libovolné přirozené číslo

(c) $NSD(n, n + 2)$ n je libovolné přirozené číslo

(d) $NSD(n, n + 5)$ n je libovolné přirozené číslo

(e) $NSD(n, n + 30)$ n je libovolné liché přirozené číslo

(f) $NSD(n, n + 30)$ n je libovolné přirozené číslo

(g) $NSD(n^2 + 1, n + 1)$ n je libovolné přirozené číslo

(h) $NSD(8n + 7, 5n + 6)$ n je libovolné přirozené číslo

Svá řešení zdůvodněte.

Úloha 15. Zjistěte, zda jsou následující tvrzení pravdivá nebo nepravdivá. Své odpovědi zdůvodněte. Pro všechna přirozená čísla a, b, c:

(a) Jestliže $NSN(a, b) = NSN(a, c)$, pak $b = c$.

(b) Jestliže $NSD(a, b) = NSD(a, c)$, pak $NSN(a, b) = NSN(a, c)$.

(c) $NSN(a^2, b^2) = |NSN(a, b)|^2$.

Úloha 16. Najděte obecný vzorec pro:

(a) $NSN(p, q)$, jestliže p, q jsou prvočísla

(b) $NSN(n, n + 1)$, jestliže n je libovolné přirozené číslo

(c) $NSN(n, n + 2)$, jestliže n je libovolné liché přirozené číslo

(d) $NSN(n, n+2)$, jestliže n je libovolné sudé přirozené číslo

(e) $NSN(n, n+6)$, jestliže n je lichý násobek tří

Zdůvodněte své odpovědi.

5. Racionální a reálná čísla

V těchto kapitolách nás zaujal způsob, jakým autor pracuje s typickými chybami studentů (úloha 17, 18 a 19). Dále se věnuje problematice uspořádání (např. úloha 20), práci s odmocninami, důkazu iracionality čísla apod.

Problem 17. One error is $\frac{2}{3}+\frac{3}{5} = \frac{2+3}{3+5} = \frac{5}{8}$. Is this phenomenon ever true, i.e. do there exist integers a, b, c, d such that $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$? Either show that no such integers exist or determine how these integers a, b, c, d must be related in order for this phenomenon to occur. Give three examples.

Problem 18. Another common error is $\frac{5+\cancel{4}\cdot 3}{6+\cancel{4}\cdot 7} = \frac{5+3}{6+7} = \frac{8}{13}$. Is this phenomenon ever true, i.e. do there exist integers a, b, c, d, e such that $\frac{a+e\cdot b}{c+e\cdot d} = \frac{a+b}{c+d}$? Either show that no such integers can exist or determine how the integers a, b, c, d, e must be related in order for this phenomenon to occur. Give three examples.

Problem 19. A common error involving square roots of numbers is to assume that $\sqrt{a+b} =$
$= \sqrt{a} + \sqrt{b}$ where a and b are integers.

(a) Give three examples where this statement is false.

(b) Are there any values of a and b for which it is true? Justify.

Problem 20.

(a) Arrange the following rational numbers in increasing order: $\frac{143}{210}, \frac{47}{70}, \frac{2}{3}, \frac{24}{35}, \frac{71}{105}$.

(b) If $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ are rational numbers with $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} < 1$, arrange the following in increasing order: $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}, \frac{bd}{ac}, \frac{b+d}{a+c}, 1$.

★ ★ ★

Úloha 17. Chybou je, že $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2+3}{3+5} = \frac{5}{8}$. Platí to někdy, tedy existují čísla a, b, c, d taková, že $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$? Ukažte, že taková čísla neexistují, nebo zjistěte, jaký musí být mezi čísly a, b, c, d vztah, aby rovnost platila. Najděte tři příklady.

Úloha 18. Další běžná chyba je, že $\frac{5+\cancel{4}\cdot 3}{6+\cancel{4}\cdot 7} = \frac{5+3}{6+7} = \frac{8}{13}$. Platí to někdy, tedy existují čísla a, b, c, d, e taková, že $\frac{a+e\cdot b}{c+e\cdot d} = \frac{a+b}{c+d}$? Ukažte, že taková čísla neexistují, nebo zjistěte, jaký musí být mezi čísly a, b, c, d, e vztah, aby rovnost platila. Najděte tři příklady.

Úloha 19. Běžná chyba u počítání s druhými odmocninami čísel je, že $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, kde a a b jsou nezáporná celá čísla.

(a) Najděte tři příklady, kdy je toto tvrzení nepravdivé.

(b) Existují čísla a a b, pro která je pravdivé? Zdůvodněte.

Úloha 20.

(a) Uspořádejte následující racionální čísla vzestupně: $\frac{143}{210}$, $\frac{47}{70}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{24}{35}$, $\frac{71}{105}$.

(b) Nechť jsou $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ racionální čísla, kde $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} < 1$. Uspořádejte následující čísla vzestupně: $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{bd}{ac}$, $\frac{b+d}{a+c}$, 1.

LITERATURA

[1] Butts, T., *Problem Solving in Mathematics. Elementary Number Theory and Arithmetic.*, Scott, Foresman and Company, Illinois, 1973.

[2] Cachová, J., *Konstruktivní přístupy k vyučování a „Investigating teaching“ B. Jaworské*, Matematika – fyzika – informatika **8** (1998/99), str. 77 – 82.

[3] Hejný, M., Kuřina, F., *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice*, Matematika – fyzika – informatika **7** (1997/98), str. 385 – 395.